

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

2 (312)

НАУРЫЗ – СӘУІР 2017 Ж.

МАРТ – АПРЕЛЬ 2017 г.

MARCH – APRIL 2017

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошқаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. PhD докторы (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

Джумадильдаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. доктор PhD (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. PhD (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskiy I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 87 – 97

UDC 517.9

M. I. Akylbayev¹, S. Parkhatova², A.Sh. Shaldanbayev²

¹Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Kazakhstan, Shymkent;

²M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

ON JOINTLY COMPLETENESS OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS

Annotation. Completeness and basicity is one of the key concepts of the spectral theory of operators. The eigenvectors and associated vectors of the Sturm-Liouville model operator always form a complete system, excluding the Volterian case. If we confine ourselves only to our own vectors, then they can not form a complete system, which is a consequence of the presence of a multiple spectrum of the operator. In the present paper it is shown that the set of eigenvectors of the Sturm-Liouville operator and its conjugate can form a complete system, which is evidence of the presence of non-trivial invariant subspaces in the operator.

Keywords: Sturm-Liouville operator, completeness, joint completeness, invariant subspaces, conjugate operator.

УДК 517.9

М.И. Ақылбаев¹, С. Пархатова², А.Ш. Шалданбаев²

¹Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы;

²Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті

БІРЛЕСІП ТОЛЫҚҚАН ОПЕРАТОРЛАР

1. Кіріспе

Кәдімгі дифференциалдық операторлардың спектралді теориясы, Ш. Штурм мен Ж. Лиувиллдің, және кейінгі В.А. Стеклов [1,2] пен Я.Д. Тамаркиннің [3,4], Д. Биркгофтың [5,6] және көптеген басқа авторлардың зерттеулерінен бастау алады, бұл еңбектерде әртүрлі шекаралық есептердің меншікті мәндерінің асимптотикасы зерттеліп, және соның барысында спектралді таралымдардың жинақталу кластары анықталады.

Бастапқы кезеңде, жалқы дифференциалдық операторлардың спектралдік қасиеттері зерттелді. Спектрі сирек жалқы дифференциалдық операторлардың меншікті векторларының L_2 кеңістігінде ортанормаланған базис құрайтыны қазіргі кезеңде көпке мәлім.

Жалқы эллипстік дифференциалдық оператордың спектралдік таралымдарының жинақталу проблемалары Ш.А. Алимов, Б.А. Ильин, Е.М. Никишиндердің [7] көлемді еңбегінде зерттелген, және ол зерттелулер В.А. Ильиннің [8] кітабынан орын алған.

Соңғы он жылдықта, математикалық физиканың әртүрлі салаларында бейбайырғы есептер пайда болды (мысалы, сиретілген плазманың орнықтылық мәселелері, ядролық реактордың есептері т.с.с). сынарлы есептерді зерттелгенде мамандар көптеген қиындықтармен кездеседі. Мұндай есептердің спектрі мүлдем болмауы мүмкін, болған сәттің өзінде меншікті функциялары негізгі кеңістікте толымсыз болуы мүмкін. Бұл сәтте оларды жапсарлас функциялармен толықтыру

қалыптасты. Түпкі функциялардың толымдылық проблемаларына М.В. Келдыштың [9.10] еңбектері арналған, бұл еңбектер сыңарлы дифференциалдық операторлардың спектралді теориясына қосылған сүбелі үлес болып саналады және бұл еңбектер осы саладағы көптеген басқа еңбектердің пайда болуына мұрындық болды, соның нәтижесінде бұл мәселе қазіргі сәтте біршама тәуір зерттелген десекте болады, мысалы В.Б. Лидский [11.12], М.А. Неймарк [13.14], В.Н. Визитей мен А.С. Маркус [15.16], А.М. Кралл [17.18], М.Стоун [19], А.А. Шкаликов [20.21] және т.б.

Елімізде түпкі функциялардың толымдылық проблемасына М. Өтелбаевтың [22], Т.Ш. Кәлменовтың [23], Б.Е. Кангужиннің [24], және олардың оқыушыларының еңбектері арналған.

Көптеген шекаралық есептердің меншікті мәндерінің асимптотикасы төмендегі, Я.Д. Тамаркин [3.4], Д. Биркгоф [6] М.В. Келдыш [9.10], Р. Лангер [25.26], М.В. Федорюк [27], А.Г. Костюченко [28], М. Өтелбаев [29], Б.Е. Кангужин, М.А. Садыбеков [30] еңбектерде кеңінен зерттеледі.

Дифференциалдық оператордың меншікті функциялар системасы L_2 кеңістігінде толымсыз болған сәтте, оны сыңар оператордың меншікті функцияларымен толықтыруға болады ма? деген мәселе күні бүгінге дейін толық шешімін таппай келеді. Біз өз зерттеулерімізді осы арнаға бұрдық.

Бірінші бөлімде есеп қойылды, 2- бөлімде әдісі, 3- бөлімде нәтижелері, 4- бөлімде алынған нәтижелер талқыға салынды, 5- бөлімде тиісті қорытындылар жасалды.

Есептің қойылуы немесе мәселенің мән жайы

Мәселе. H - гилберттің кеңістігі, ал A - осы кеңістікте анықталған сызықтық дискретті оператор болсын делік, яғни $Vf, g \in H, f, g \in D(A)$ үшін

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha Af + \beta Ag$$

Теңдігі орындалады, мұндағы α, β скаляр шамалар, ал f, g әлгі H кеңістігінің векторлары. A операторының спектрі тек меншікті мәндерден $\{\lambda_n\}, n = 1, 2, \dots$ тұрады және $\{\lambda_n\}$ тізбегінің шектік нүктесі тек ∞ болуы мүмкін. Бұл A операторының меншікті векторлары H кеңістігінде толымды болса жақсы, толымсыз болған жағдайда еншілес функцияларды қарастыруға тура келеді. Бұл сәтте, белгілі бір қиындықтар туындайды. Осыған байланысты, мынадай, мәселелер туындайды.

1) Егер A операторының меншікті векторлары H кеңістігінде толымсыз болса, онда оны, оның сыңар A^* операторының меншікті векторлары арқылы толықтыруға бола ма? Жалпы өзі осындай операторлар кездеседі ме?

2) Осындай операторлар бар болса, ондамынадай

$$u_t = Au,$$

$$u \in D(A)$$

Параболалық теңдеулердің аралас есептердің шешімін табуға болады ма?

Біз өз зерттеулерімізде 1) мәселенің жалқы шешімін таптық, дәлірек айтқанда нақты мысал құрастырдық.

2. Зерттеу әдістері

Гилберттің $H = L^2(0, \pi)$ кеңістігінде мынадай,

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi); \quad (1)$$

$$y(0) = 0, y'(0) + y'(\pi) = 0 \quad (2)$$

Шекаралық есепті қарастыралық. Жоғарыдағы (1) теңдеудің жалпы шешімі

$$y(x; \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \quad (3)$$

болары белгілі, мұндағы A, B - кезкелген тұрақты шамалар. Осы, (3), формуланы (2) шекаралық шарттарға апарып қоялық:

$$A = 0, \Rightarrow y(x; \lambda) = B \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}, y'(x; \lambda) = B \cos \sqrt{\lambda}x,$$

$$y'(0) + y'(\pi) = B + B \cos \pi \sqrt{\lambda} = B [1 + \cos \pi \sqrt{\lambda}] = 0, B \neq 0,$$

сондықтан,

$$\Delta(\lambda) = 1 + \cos \pi \sqrt{\lambda} = 0, \cos \pi \sqrt{\lambda} = -1, \pi \sqrt{\lambda} = (2n - 1)\pi,$$

$$\sqrt{\lambda} = 2n - 1, \lambda_n = (2n - 1)^2, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Бұлменшіктімәндерге мынадай,

$$y_n(x) = B_n \sin(2n - 1)x, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

Меншікті функциялар сәйкескеледі.

Мына,

$$\begin{aligned} y_{-n}(x) &= B_{-n} \times \sin(-2n - 1)x = -B_{-n} \sin(2n + 1)x = -B_{-n} \frac{y_{n+1}(x)}{B_{n+1}} = \\ &= -\frac{B_{-n}}{B_{n+1}} y_{n+1}(x), \end{aligned}$$

жайтқа байланысты теріс индекстерді қарастырмаймыз, сонымен меншікті функциялар мыналар,

$$y_n(x) = B_n \times \sin(2n - 1)x, n = 1, 2, \dots,$$

болады екен.

Енді, осы меншікті функциялардың қасиеттеріне тоқталайық.

$$\begin{aligned} y_n(\pi - x) &= B_n \times \sin(2n - 1)(\pi - x) = B_n \sin[(2n - 1)\pi - (2n - 1)x] = \\ &= -B_n \cos(2n - 1)\pi \times \sin(2n - 1)x = B_n \sin(2n - 1)x = y_n(x). \end{aligned}$$

Демек, бұл меншікті функциялар системасы $H = L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымсыз, шынында-да, егер $f(x) \in L^2(0, \pi)$ функциясы мынадай,

$$f(\pi - x) = -f(x) \quad (4)$$

болса, онда

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) y_n(x) dx &= \left| \frac{x = \pi - t}{dx = -dt} \right| = - \int_\pi^0 f(\pi - t) y_n(\pi - t) dt = \\ &= \int_0^\pi f(\pi - t) y_n(\pi - t) dt = - \int_0^\pi f(t) y_n(t) dt = - \int_0^\pi f(x) y_n(x) dx, \Rightarrow \\ &2 \int_0^\pi f(x) y_n(x) dx = 0, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Енді (4) қасиетке ие функцияның бар екеніне көз жеткізейік. Егер $g(x) \in L^2(0, \pi)$ функциясы H кеңістігінің кезкелген элемент болса, онда

$$f(x) = \frac{g(x) - g(\pi - x)}{2}$$

деуімізге болады, шынында-да

$$f(\pi - x) = \frac{g(\pi - x) - g(x)}{2} = -\frac{g(x) - g(\pi - x)}{2} = -f(x).$$

Алынған нәтижелерді біртұжырымдап қоялық.

Теорема 1. Штурм-Лиувиллдің, мына,

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi) \quad (1)$$

$$y(0) = 0, y'(0) + y'(\pi) = 0 \quad (2)$$

Шекаралық есебінің меншікті мәндері, мыналар,

$$\lambda_n = (2n - 1)^2, n = 1, 2, \dots$$

Бұл меншікті мәндерге, мынадай,

$$y_n(x) = B_n \sin(2n - 1)x, n = 1, 2, \dots,$$

меншікті функциялар сәйкес келеді, және олар $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымсыз система құрайды.

Гилберттің $H = L^2(0, \pi)$ кеңістігінде мына,

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi)$$

$$y(0) = 0, y'(0) + y'(\pi) = 0$$

шекаралық есепке сыңарлас шекаралық есепті қарастыралық. Алдымен, L операторының сыңарласын табайық

$$\begin{aligned} (Ly, z) &= - \int_0^\pi y'' \bar{z} dx = - \int_0^\pi \bar{z} dy' = - \bar{z} y' \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \bar{z}' dy = \\ &= - \bar{z} y' \Big|_0^\pi + \bar{z}' y \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \bar{z}'' y dx = \\ &= - \bar{z}(\pi) y'(\pi) + \bar{z}(0) y'(0) + \bar{z}'(\pi) y(\pi) - \bar{z}'(0) y(0) + (y, L^+ z) = \\ &= - \bar{z}(\pi) y'(\pi) - \bar{z}(0) y'(0) + \bar{z}'(\pi) y(\pi) + (y, L^+ z) = \\ &= - [\bar{z}(\pi) + \bar{z}(0)] y'(\pi) + \bar{z}'(\pi) y(\pi) + (y, L^+ z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Демек, } y(\pi) \times z'(\pi) - [\bar{z}(0) + \bar{z}(\pi)] \times y'(0) &= 0, \text{ мұнан,} \\ \bar{z}'(\pi) = 0, \bar{z}(0) + \bar{z}(\pi) = 0; \Rightarrow z'(\pi) = 0, z(0) + z(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Лемма 1. Мына

$$Ly = -y''(x); y(0) = 0, y'(0) + y'(\pi);$$

$$L^+ z = -z''(x); z(0) + z(\pi) = 0, z'(\pi) = 0$$

операторлар өзара сыңарлас.

Енді, осы L^+ сыңарлас операторының спектралдік қасиеттерін зерттейік, дәлірек айтқанда, мына,

$$L^+ z = -z''(x) = \mu z(x), x \in (0, \pi) \quad (5)$$

$$z'(\pi) = 0, z(0) + z(\pi) = 0 \quad (6)$$

шекаралық есепті зерттейік.

Жоғарыдағы, (5) теңдеудің жалпы шешімі, мынадай,

$$z(x, \mu) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, A, B - const \quad (7)$$

екені, бесенеден белгілі.

Осы, (7) формуланы (6) шекаралық шарттарға апарып қойсақ, меншікті мәндер мен меншікті функцияларды табамыз.

$$z'(x; \mu) = -\sqrt{\lambda}A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$z'(x; \mu)|_{x=\pi} = -\sqrt{\lambda}A \sin \pi \sqrt{\lambda} + B \cos \pi \sqrt{\lambda} = 0;$$

$$z(0) + z(\pi) = A + A \cos \pi \sqrt{\lambda} + B \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0;$$

Белгісіз A және B шамалары үшін, мынадай,

$$\begin{cases} -\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} A + \cos \pi \sqrt{\lambda} B = 0, \\ (1 + \cos \pi \sqrt{\lambda}) A + \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} B = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Теңдеулер системасын алдық. Бұл теңдеулер системасының шешімі бар болуы үшін оның анықталушы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} & \cos \pi \sqrt{\lambda} \\ 1 + \cos \pi \sqrt{\lambda} & \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix}$$

Нөлге айналуы қажетті әрі жеткілікті. $\Delta(\lambda)$ -ны ашып жазсақ

$$\Delta(\lambda) = -\sin^2 \pi \sqrt{\lambda} - \cos \pi \sqrt{\lambda} - \cos^2 \pi \sqrt{\lambda} = -1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}$$

боларын көреміз. Ендіосы $\Delta(\lambda)$ - функциясының нөлдерін зерттейік.

$$\Delta(\lambda) = -[1 + \cos \pi \sqrt{\lambda}] = 0, \cos \pi \sqrt{\lambda} = -1, \pi \sqrt{\lambda} = (2n - 1)\pi,$$

$$\sqrt{\lambda} = 2n - 1, \lambda_n = (2n - 1)^2, n = \pm 1, \pm 2, \dots;$$

Енді меншікті функцияларды табайық. Бұл үшін (8) системаға назар аударайық, оның бірінші теңдеуінен

$$A_n = K_n \times \cos \pi \sqrt{\lambda_n}, B_n = K_n \sqrt{\lambda_n} \sin \pi \sqrt{\lambda_n}, K_n - const$$

алу кере кекенін байқаймыз. Сонымен,

$$\begin{aligned} z_n(x) &= K_n \cos \pi \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + K_n \sqrt{\lambda_n} \sin \pi \sqrt{\lambda_n} \frac{\sin \sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} = \\ &= K_n [\cos \pi \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x + \sin \pi \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} x] = \\ &= K_n \times \cos \sqrt{\lambda_n} (\pi - x); \end{aligned}$$

Демек, $K_n \cos(2n - 1) (\pi - x), n = \pm 1, \pm 2, \dots$, мұнан,

$$\begin{aligned} K_{-n} &= \cos(-2n - 1) (\pi - x) = K_{-n} \times \cos(2n + 1)(\pi - x) = \\ &= K_{-n} \times \frac{y_{n+1}(x)}{K_{n+1}} = \frac{K_{-n}}{K_{n+1}} \end{aligned}$$

олай болса теріс индекстерге назар аудармауға болады.

Әріқарай,

$$K_n \cos[(2n - 1)\pi - (2n - 1)x] = K_n \cos(2n - 1)\pi \cos(2n - 1)x =$$

$$= -K_n \cos(2n - 1)x;$$

$$(\pi - x) = K_n \cos(2n - 1)x = -(x), n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

Осы соңғы (9) қасиеттің салдарынан $\{y_n(x)\}, n = 1, 2, \dots$ системасы $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымсыз система құрайды, шынында-да $f(x) \in L^2(0, \pi)$ және $f(\pi - x) = f(x)$ болсын делік, онда

$$\begin{aligned} (f, z_n) &= \int_0^\pi f(x)z_n(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = - \int_\pi^0 f(\pi - t)z_n(\pi - t)dt = \\ &= \int_0^\pi f(\pi - t)z_n(\pi - t)dt = - \int_0^\pi f(t)z_n(t)dt = - \int_0^\pi f(x)z_n(x)dx, \\ 2 \times \int_0^\pi f(x)z_n(x)dx &= 0, \Rightarrow \int_0^\pi f(x)z_n(x)dx = 0, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Алынған нәтижелерді тұжырымдап қоялық.

Теорема 2. Мына,

$$L^+z = -z''(x) = \mu z(x), x \in (0, \pi) \quad (5)$$

$$z'(\pi) = 0, z(0) + z(\pi) = 0 \quad (6)$$

шекаралық есептің меншікті мәндері, мыналар,

$$\lambda_n = (2n - 1)^2, n = 1, 2, \dots$$

ал бұларға сәйкес меншікті функциялар мыналар,

$$z_n(x) = K_n \cos(2n - 1)(\pi - x), n = 1, 2, \dots$$

Олар, $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымсыз система құрайды.

3. Зерттеу нәтижелері

Теорема 3.

Мына,

$$Ly = -y''(x); y'(0) + y'(\pi) = 0, y(0) = 0, x \in (0, \pi) \quad (10)$$

Штурм-Лиувилл операторы мен оныңсыңарласы

$$L^+z = -z''(x); z'(\pi) = 0, z(0) + z(\pi) = 0 \quad (11)$$

операторының меншікті функциялары бірлесіп $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымды система құрайды, бірақ, әрқайсысы жеке-жеке толымды емес.

Дәлелі. Жоғарыда (10) оператор мен (11) оператордың меншікті функциялары толымсыз система құрайтынын көрсеттік. Енді олар бірлесіп толымды система құрайтынын көрсеттейік. Сонымен $\{y_n\} \cup \{z_n\}, n = 1, 2, \dots$ системасын қарастырайық, мұндағы,

$$y_n(x) = B_n \times \sin(2n - 1)x, n = 1, 2, \dots$$

$$z_n(x) = A_n \cos(2n - 1)x, n = 1, 2, \dots$$

Белгілібір $f(x) \in L^2(0, \pi)$ функциясы үшін

$$(f, y_n) = \int_0^\pi f(x) y_n(x) dx = B_n \times \int_0^\pi f(x) \sin(2n-1)x dx = 0, n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$(f, z_n) = \int_0^\pi f(x) z_n(x) dx = A_n \times \int_0^\pi f(x) \cos(2n-1)x dx = 0, n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

теңдіктер орындалсын делік. Онда $(0, \pi)$ интервалының барлық нүктелерінде дерлік $f(x) = 0$ теңдігі орындалатынын көрсетейік.

Лемма 2.

Егер $Pu(x) = \frac{u(x)+u(\pi-x)}{2}$ және $Qv(x) = \frac{v(x)-v(\pi-x)}{2}$ болса, онда P мен Q операторлары $L^2(0, \pi)$ кеңістігінің проекторлары, яғни

$$\text{а) } P^2 = P, P^* = P; \quad (14)$$

$$\text{б) } Q^2 = Q, Q^* = Q \quad (15)$$

теңдіктер орындалады.

Дәлелі.

$$\begin{aligned} \text{а) } P^2 u(x) &= P(Pu)x = P_0 \frac{u(x)+u(\pi-x)}{2} = \frac{Pu(x)+Pu(\pi-x)}{2} = \\ &= \frac{u(x) + u(\pi-x)}{2} + \frac{u(\pi-x) + u(x)}{2} = \frac{u(x) + (\pi-x)}{2} = Pu(x); (Pu, v) \\ &= \int_0^\pi Pu \times v dx = \int_0^\pi \frac{u(x) + u(\pi-x)}{2} v(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi u(x)v(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi u(\pi-x)v(x) dx = \left| \begin{matrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi u(t)v(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi u(t)v(\pi-t) dt = \int_0^\pi u(t) \frac{v(t) + v(\pi-t)}{2} dt = \\ &(u, Pv), \Rightarrow P^* = P. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } Q^2 v &= Q(Qv) = Q_0 \frac{v(x)-v(\pi-x)}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [Qv - Qv(\pi-x)] = \frac{1}{2} \left[\frac{v(x) - v(\pi-x)}{2} - \frac{v(\pi-x) - v(x)}{2} \right] = \\ &= \frac{v(x) - v(\pi-x)}{2} = Qv(x), \rightarrow Q^2 = Q; \\ (Qv, u) &= \int_0^\pi \frac{v(x) - v(\pi-x)}{2} u(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi v(x)u(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi v(\pi-x)u(x) dx = \left| \begin{matrix} x = \pi - t \\ dx = -dt \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi v(t)u(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^\pi v(t)u(\pi-t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi v(t)[u(t) - u(\pi-t)] dt = \int_0^\pi v(t) \frac{u(t) - u(\pi-t)}{2} dt = (v, Qu), \rightarrow \end{aligned}$$

$\rightarrow Q^* = Q;$

Енді, мына, жайларға назар аударайық.

$$P \sin nx = \frac{\sin n(\pi-x) + \sin nx}{2} = \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{2} \sin nx;$$

$$Q \sin nx = \frac{\sin nx - \sin n(\pi - x)}{2} = \frac{\sin nx - (-1)^{n+1} \sin nx}{2} = \frac{1 + (-1)^n}{2} \sin nx.$$

Демек,

$$P \sin(2n - 1)x = \sin(2n - 1)x, Q \sin(2n - 1)x = 0.$$

Солсыйақты,

$$P \cos nx = \frac{\cos(\pi - x) + \cos nx}{2} = \frac{\cos n\pi \cos nx + \sin n\pi \sin nx + \cos nx}{2} = \frac{1 + \cos n\pi}{2} \cos nx = \frac{1 + (-1)^n}{2} \cos nx.$$

$$Q \cos nx = \frac{\cos nx - \cos(\pi - x)}{2} = \frac{\cos nx - (-1)^n \cos nx}{2} = \frac{1 - (-1)^n}{2} \cos nx.$$

Демек,

$$Q \cos 2nx = 0, Q \cos(2n - 1)x = \cos(2n - 1)x$$

Егер (12) теңдіктер орындалса, онда (14) және (15) формулалар қасында

$$(f, \sin(2n - 1)x) = \int_0^\pi f(x) \sin(2n - 1)x dx = \int_0^\pi f(x) P \sin(2n - 1)x dx = (f, P \sin(2n - 1)x) = (Pf, \sin(2n - 1)x) = (Pf, \sin nx) = 0, n = 1, 2, \dots,$$

мұнан, $Pf(x) = 0$;

Егер (13) орындалса, онда (14) және (15) формулалар қылы

$$(f, \cos(2n - 1)x) = \int_0^\pi f(x) \cos(2n - 1)x dx = \int_0^\pi f(x) Q \cos(2n - 1)x dx = (f, Q \cos(2n - 1)x) = (Qf, \cos(2n - 1)x) = (Qf, \cos nx) = 0,$$

мұнан, $Qf = 0$.

Егер (12) және (13) шарттар бірдей орындалса, онда $f(x) = (P + Q)f(x) = Pf(x) + Qf(x) = 0$ Теорема дәлелденді.

4. Талқысы

Зерттелген Штурм-Лиувилл операторының ішкі инвариантты кеңістігі бар екен, және ол көпсалалы, мұндай жақдай сирек кездеседі. Оператордың сыңарының да қасиеті сондай, шамасы бұл кеңістіктердің арасында тығыз байланыс бар. Біз кейінірек бұл мәселелерге қайта оралмақпыз.

5. Қорытынды

Табиғатта ешбір құбылыс жеке дара кездеспейді, оларды оқшаулау біздің ниетімізден туындаған, олай етпесек біз ешбір құбылысты зерттей алмас едік. Мысалы, вакуум ұғымын адамдар енгізген, ол дүниеде жоқ нәрсе, сол сыйақты абсолютті нөл ұғымын да біз енгізгенбіз. Сонымен, біз бір құбылысты зерттегенде, оған басқа сыртқы әсерлер жоқ деп санаймыз, яғни біз сол құбылыстың ең негізгі қасиеттеріне тоқталып, басқа нәрселерге көңіл бөлмейміз, яғни сыртқы әсер жоқ. Мұндай системалар тұйық жабық болады, сондықтан толық энергиясы сақталады. Міне,

дәл осындай системалар жалқы дифференциалдық операторлармен өрнектеледі, ал егер сыртқы әсерлерді ескерер болсақ, онда сыңарлы дифференциалдық операторларды қарастыруымызға тура келеді. Егерде құбылысқа әсер етуші барлық нәрселер еленген болса, онда, әрине, системаның толық энергиясы сақталар еді, бірақ, бұл сәтте толық энергия ішкі және сыртқы болып екіге бөлінер еді. Дифференциалдық операторлар тілімен айтқанда бастапқы оператор мен мен оның сыңарының меншікті функциялары бірлесіп толық система құрайды. Мысалы, көл бетіне түскен күн сәулесі толық шығылысқан сәтте, осындай системаны құрайды.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Стеклов В.А. Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям. Харьков: Издательство ХГУ, 1956. - С. 1 - 138.
- [2] Стеклов В. А. Solution generale du problem de developpement d'une fonetion arbitruire en series suivent les fonction fondamentales de Sturm- Liouville//PAL.5,serie. – 1940. - V.19, P.490-496.
- [3] Тамаркин Я.Д. Sur quelques points de theorie des equations differentielleslineairesordinfires of sur la generalization de la serie de Fourier // Rend. Di Palermo. – 1912. – Vol. 34.-P.345-382.
- [4] Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград., 1917. - 308 с.
- [5] Биркгоф Д. (BirkhoffG.D.) Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans.Amer.Math.Soc. – 1908. - V. 9, № 4. -P. 373-395.
- [6] Биркгоф Д. (Birkhoff G.D.) On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter// Trans. Amer.Math.Soc. – 1908. - V.9,- P.219-231.
- [7] Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. I, II, // Успехи мат. Наук. – 1976. - Т. 31, вып.6. - С.28-83.; 1977. - Т. 32, вып. 1. - С. 107-130.
- [8] Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. - М., 1991. - 368 с.
- [9] Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений//ДАН СССР. – 1951. - Т. 77, № 1. - С. 11-14.
- [10] Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряжённых линейных операторов // Успехи матем.наук. – 1971. - Т. 26,Вып. 4(160). - С. 15-41.
- [11] Лидский В.Б. О полноте системы собственных и присоединённых функций несамосопряжённого дифференциального оператора // ДАН СССР. – 1956. - Т. 110, № 2. - С. 172-175.
- [12] Лидский В.Б. Несамосопряжённый оператор типа Штурма-Лиувилля с дискретным спектром //Труды Моск. матем. общества. - 1960. - № 9. - С. 45-79.
- [13] Наймарк М.А. О разложении по собственным функциям несамосопряжённых сингулярных дифференциальных операторов второго порядка //ДАН СССР. – 1953. - Т. 89, № 2. - С. 213-216.
- [14] Наймарк М.А. О некоторых признаках полноты систем собственных и присоединённых векторов в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1954. - Т. 98, № 5. – С. 727-730.
- [15] Визитей В.Н., Маркус А.С. О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединённых векторов операторного пучка //Матем. Сборник. – 1965. - Т. 66, № 2(108). - С. 287-320.
- [16] Маркус А.С. О кратной полноте и сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединённых векторовоператорного пучка //ДАН СССР. – 1965. - Т. 163, № 5. - С. 1061 - 1064.
- [17] Кралл А.М. (Kroll A.M.). О несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных операторах второго порядка //ДАН СССР. – 1965. - Т. 165, № 6. - С. 1235-1237.
- [18] Кралл А.М. (Kroll A.M.). The development of general differential and general differential boundary systems // Rochg Mountain. J.Math. – 1975. - V. 5, № 4. - P. 493-542.
- [19] Стоун М. (Stone M.H.).A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans.Amer.Math.Soc. –1926. -V. 28. - P. 695-761.
- [20] Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды сем. им. И.Г.Петровского. – 1983. - Вып. 9. - С. 190-229.
- [21] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями //Вестник МГУ, сер.матем. – 1982. - № 6. - С. 12-21.
- [22] Отелбаев М. Оценки S-чисел и условия полноты системы корневых векторов несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля // Мат. Заметки. - 1979. - Т. 25, № 3. - С. 409-418.
- [23] Кальменов Т.Ш., Бименов М.А. Об одном признаке полноты корневых векторов задачи Трикоми // Дифференц.уравнения. - 2003. - Т. 39, № 10. - С. 1425-1428.
- [24] Кангузин Б.Е. Полнота и минимальность систем корневых функций дифференциального оператора на отрезке // Узбекский математический журнал. - 2002. - № 1. - С. 23-29.
- [25] Лангрен Р.(Langer R.). The asymptotic solution of certain linear ordinary differential equations of the second order // Trans.Amer.Math.Soc. –1934. -V. 36. - P. 90-106.

- [26] Лангер Р.(Langer R.). The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order,with spectral reference to a turning point // Trans.Amer.Math.Soc. –1949. - V. 67. - P. 461-490.
- [27] Федорюк М.В. Асимптотика решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения n -го порядка //Дифференц. Уравнения. – 1966. - Т. 2, № 4. - С. 492-507.
- [28] Костюченко А.Г. Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов //ДАН СССР. - 1960. -Т. 168, № 1. - С. 21-24.
- [29] Отелбаев М. Оценки собственных чисел сингулярных дифференциальных операторов // Математические заметки. –1976. - Т. 20, № 6. - С. 859-867.
- [30] Кангузин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. - Шымкент:Ғылым, 1999. - 270с.
- [31] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. - 528 с.
- [32] Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. I. Москва: Иностран. лит-ра, 1960. - 278 с.
- [33] Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч.зап. МГУ. – 1951. -Т. 4, Вып. 148. - С. 69-107.

REFERENCES

- [1] Steklov V. A. About asymptotic expression of some the functions determined by the linear differential equation of the second order and their application to a problem of decomposition of proizvolny function in a row by these functions. Kharkiv: HGU publishing house, 1956. - Page I - 138.
- [2] Steklov V. A. Solution generale du problem de developpment d'une fonetion arbitruire en series suivent les fonction fondamentales de Sturm-Liouville//PAL.5, serie. – 1940. - V.19, P.490-496.
- [3] Tamarkinya.D. Sur quelques points de theorie des equations differentielleslineairesordinfires of sur la generalization de la serie de Fouries//Rend. Di Palermo. – 1912. – Vol. 34. - P.345-382.
- [4] Tamarkin Ya. D. About some general tasks of the theory the obyknokvennykh the linear differential equations and about decomposition the prokizvolnykh of functions in ranks. – Petrograd., 1917. - 308 pages.
- [5] Birkgofd. (BirkhoffG.D.) Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations//Trans.Amer.Math.Soc. – 1908. - V. 9, No. 4. - River 373-395.
- [6] Birkgofd. (Birkhoff G.D.) On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter//Trans. Amer.Math.Soc. – 1908. - V.9. - R.219-231.
- [7] Alims Sh. A., Ilyin V. A., Nikishin E. M. Questions of convergence multiple trigonometrical ranks and spectral decomposition. I, II//Progress mat. Sciences. – 1976. - Т. 31, issue 6. - Page 28-83.; 1977. - Т. 32, issue 1. - Page 107-130.
- [8] Ilyin V. A. Spectral theory of differential operators. - М, 1991. - 368 pages.
- [9] Keldysh M. V. About own values and own functions some classes of not self-conjugate equations//the USSR is GIVEN. – 1951. - Т. 77, No. 1. - Page 11-14.
- [10] Keldysh M. V. to 0 completeness of own functions of some classes not self-conjugate linear operators//Progress матем.наук. – 1971. - Т. 26, Issue 4(160). - Page 15-41.
- [11] Lidsky V. B. O to completeness of system own and prisoyediknyonnykh functions not self-conjugate differential operatora//the USSR is GIVEN. – 1956. - Т. 110, No. 2. - Page 172-175.
- [12] Lidsky V. B. Not self-conjugate operator of type of Storm -Liouville with a discrete range//Works Mosk. maty. the general stvo. - 1960. - No. 9. - Page 45-79.
- [13] Naymark M. A. About decomposition on own functions not self-conjugate singular differential operators the second order//the USSR is GIVEN. – 1953. - Т. 89, No. 2. - Page 213-216.
- [14] Naymark M. A. About some signs of completeness of systems own and attached vectors in Hilbert it is simple -ranstvo//the USSR is GIVEN. – 1954. - Т. 98, No. 5. – Page 727-730.
- [15] Vizitya V. N., Markus Ampere-second. About convergence of multiple decomposition on to system of own and attached vectors of OPEC rotor bunch//Matem. Collection. – 1965. - Т. 66, No. 2(108). - Page 287-320.
- [16] Markus A. S. About multiple completeness and convergence of multiple decomposition on system of own and attached vectors operator bunch//the USSR is GIVEN. – 1965. - Т. 163, No. 5. - Page of I06I - I064.
- [17] Krall A.M. (Kroll A.M.). About not self-conjugate ordinary the differentsialnykh operators of the second order//is GIVEN to the USSR.
- [18] Krall A.M. (Kroll A.M.). The development of general differential and general differential boundary systems//Rochg Mountain. J.Math. – 1975. - V. 5, No. 4. - River 493-542.
- [19] Stounm. (Stone M.H.). A comparison of the series of Fourier and Birkhoff//Trans.Amer.Math.Soc. –1926. - V. 28. - P. 695-761.
- [20] Shkalikov A. A. Regional tasks for ordinary diffek the rentsialnykh of the equations with parameter in boundary conditions//Works this. of I.G.Petrovsky. – 1983. - Issue 9. - Page 190-229.
- [21] Shkalikov A. A. 0 bazisnost of own functions obyknok the wine differential operator with integrated regional conditions//the Bulletin of MSU, ser.maty. – 1982. - No. 6. - Page 12-21.
- [22] Otelbayev M. Estimates of S-numbers and condition of completeness of system root vectors of not self-conjugate operator Shturma-Liuvillya//Mat. Notes. - 1979. - Т. 25, No. 3. - Page 409-418.

- [23] Kalmenov T. Sh., Bimenov M. A. About one sign of completeness root vectors of a task of Triкоми // *Differents.Uravneniya*. - 2003. - Т. 39, No. 10. - Page 1425-1428.
- [24] Kanguzhin B. E. Completeness and minimality of systems root functions of the differential operator on a piece//the *Uzbek mathematical magazine*. - 2002. - No. 1. - Page 23-29.
- [25] Langer. (Langer R.). The asymptotic solution of certain linear ordinary differential equations of the second order//*Trans.Amer.Math.Soc.* -1934. - V. 36. - P. 90-106.
- [26] Langer. (Langer R.). The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with spectral reference to a turning point//*Trans.Amer.Math.Soc.* -1949. - V. 67. - P. 461-490.
- [27] Fedoryuk M. V. Asymptotics of solutions of ordinary likneyny differential equation p-go about//*Differents. Equations*. - 1966. - Т. 2, No. 4. - Page 492-507.
- [28] Kostyuchenko A. G. Distribution of own values for singular differential operators//the USSR is GIVEN. - 1960. -Т. 168, NO. 1. - PAGE 21-24.
- [29] Otelbayev M. Estimates of own numbers singular differential operators//*Mathematical notes*. -1976. - Т. 20, No. 6. - Page 859-867.
- [30] Kanguzhin B. E., Sadybekov M. A. Differential operators on a piece. Distribution of own values. - Shymkent: F yly, 1999. - 270 pages.
- [31] Naymark M. A. Linear differential operators. - Moscow: Science, 1969. - 528 pages.
- [32] Titchmarsh E. Ch. Decomposition on own functions, connected with the differential equations of the second order. Т. I. Moscow: Inostr. liter, 1960. - 278 pages.
- [33] Bari N. K. Biorthogonal systems and bases in Hilbert space//*Uch.Zap. MSU.* - 1951. - Т. 4, Issue 148. - Page 69-107.

УДК 517.9

М.И. Ақылбаев,¹ С. Пархатова,² А.Ш. Шалданбаев²

¹Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, г.Шымкент

²Южно-Казахстанский государственный университет, г.Шымкент

О СОВМЕСТНО ПОЛНЫХ ОПЕРАТОРАХ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. Полнота и базисность является одним из ключевых понятий спектральной теории операторов. Собственные и присоединенные векторы модельного оператора Штурма-Лиувилля всегда образует полную систему, исключая, вольтероваго случая. Если ограничиться только собственными векторами, то они могут образовать не полную систему, что является следствием наличия кратного спектра оператора. В настоящей работе показано, что совокупность собственных векторов оператора Штурма-Лиувилля и его сопряженного могут образовать полную систему, что является свидетельством наличия у оператора нетривиальных инвариантных подпространств.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, полнота, совместная полнота, инвариантные подпространства, сопряженный оператор.

МАЗМҰНЫ

<i>Джумабаев Д.С., Жармагамбетов А.С.</i> Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеуі үшін сызықтық шеттік есепті шешудің сандық әдісі.....	5
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Қәдірбаева Ж.М.</i> Жүктелген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін көпнүктелі есептің бірмәнді шешімділігі туралы	12
<i>Дауылбаев М. К., Джумабаев Д. С., Атахан Н.</i> Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеуге арналған шекаралық есептің асимптотикалық бейнелеуі.....	18
<i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> ПК-39 және БКЗ-160 қазандықтарының жану камераларының аэродинамикасы мен жылу масса алмасуын зерттеу.....	27
<i>Абишев М.Е., Токтарбай С., Абылаева А.Ж., Талхат А.З., Белсарова Ф.Б.</i> Екі массивті айналмалы дене өрісіндегі айналмалы сынақ дене орбитасының орнықтылығы.....	39
<i>Ақжігітова Э.М., Құрманғалиева В.О., Арбузов А.Б.</i> Мюонның радиациялық ыдырауын модельден тәуелсіз түрде сипаттау	54
<i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> ПК-39 қазандығының жану камерасындағы шаң тозанды көмір отынын жағу процесін сандық модельдеу.....	58
<i>Әбішев М., Малыбаев А., Кеведо Э.</i> Мінсіз газдың геометротермодинамикасы.....	64
<i>Шыныбаев М.Д., Беков А.А., Рахимжанов Б.Н., Моминов С.Б., Сәдібек А.Ж., Дауырбеков С.С., Жолдасов С.А.</i> Хилдың екінші есебіндегі ұйытқулы шеңбер типтес орбиталар.....	69
<i>Асқарова А.С., Бөлегенова С.А., Бөлегенова С.А., Максимов В.Ю., Максұтханова А.М., Турбекова А.Г., Бейсенов Х.И.</i> БКЗ-160 жану камерасындағы термохимиялық-газдандырылған көмір жануын зерттеудің есептеу эксперименті.....	75
<i>Салғараева Г.И., Базарбаева А.</i> Білім берудегі Steam жүйесі және робототехника.....	81
<i>Ақылбаев М.И., Пархатова С., Шалданбаев А.Ш.</i> Бірлесіп толыққан операторлар	87
<i>Шыныбаев М.Д., Дауырбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиасқаров Д.Р., Мырзақасова Г.Е., Сәдібек А.Ж.</i> Жердің жасанды серігінің сәуле қысымынан алған ұйытқуын Делоне элементтерінде есепке алу.....	99
<i>Қабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Қыдырбекова Ж.Б., Джумағалиева А.И.</i> Соққы құбылысын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....	104
<i>Қожамқұлова Ж.Ж., Аманкелдіқызы Н., Кабаева Д.А.</i> Болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауда қолданылатын ақпараттық технологиялар және олардың даму болашағы.....	110
<i>Қошанов Б.Д., Әділбеков Е.Н., Дүйсен Е.</i> Шектелмеген облыста пуассон және Бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебі шешімдер кеңістігінің өлшемі – I.....	116
<i>Қошанов Б.Д., Әділбеков Е.Н., Дүйсен Е.</i> Шектелмеген облыста Пуассон және бигармониалы теңдеулер үшін Дирихле есебі шешімдер кеңістігінің өлшемі – II.....	126
<i>Сапрыгина М.Б., Ақылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Штурм-Лиувилл операторының периодты кері есебі.....	132
<i>Қойшыева Т.Қ., Қожамқұлова Ж.Ж., Сабит Б.</i> Жоғары оқу орнында болашақ мұғалімдерді объектілі-бағдарлы жобалау негізінде кәсіби дайындау моделі.....	146
<i>Исаева Г.Б., Бейсенова А.М.</i> Виртуалды машина және виртуалды машина ерекшеліктері мен виртуалдану деңгейлері жайлы жалпы мәселелер.....	153
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Көлденең ұңғымалардың өнімдік қабатын тиімді ашу үшін биополимерлі бұрғылау ерітіндісін қолдану.....	161
Ғалымды еске алу	
Э.Г. Боос.....	166

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Джумабаев Д.С., Жармагамбетов А.С.</i> Численный метод решения линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.....	5
<i>Асанова А.Т., Иманчиев А.Е., Кадирбаева Ж.М.</i> Об однозначной разрешимости многоточечной задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений	12
<i>Дауылбаев М. К., Джумабаев Д. С., Атахан Н.</i> Асимптотическое представление сингулярно возмущенных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений.....	18
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Оспанова Ш.С.</i> Исследование аэродинамики и теплообмена в топочных камерах котлов ПК-39 и БКЗ-160	27
<i>Абишев М.Е., Токтарбай С., Абылаева А.Ж., Талхат А.З., Белисарова Ф.Б.</i> Устойчивость орбиты вращательного движения пробного тела в поле двух массивных вращающихся тел.....	39
<i>Акжигитова Э.М., Курмангалиева В.О., Арбузов А.Б.</i> Описание радиоационного распада мюона в модельно – независимом подходе	54
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Шортанбаева Ж.К.</i> Численное моделирование процессов сжигания пылеугольного топлива в топочной камере котла ПК 39.....	58
<i>Абишев М., Мальбаев А., Кеведо Э.</i> Геометротермодинамика идеального газа.....	64
<i>Шинибаев М.Д., Беков А.А., Рахимжанов Б.Н., Моминов С.Б., Садыбек А.Ж., Даиырбеков С.С., Жолдасов С.А.</i> Возмущенная орбита кругового типа во второй задаче Хилла.....	69
<i>Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Максутханова А.М., Турбекова А.Г., Бейсенов Х.И.</i> Вычислительный эксперимент по исследованию горения термохимически-газифицированного угля в топочной камере котла БКЗ-160.....	75
<i>Салгараева Г.И., Базарбаева А.</i> Система Steam в образовании и робототехника.....	81
<i>Ақылбаев М.И., Пархатова С., Шалданбаев А.Ш.</i> О совместно полных операторах Штурма-Лиувилля.....	87
<i>Шинибаев М.Д., Даирбеков С.С., Жолдасов С.А., Алиаскаров Д.А., Мырзакасова Г.Е., Садыбек А.Ж.</i> Возмущения спутника земли от светового давления в элементах Делоне.....	99
<i>Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Абекова Ж.А., Омашова Г.Ш., Кыдырбекова Ж.Б., Джумагалиева А.И.</i> Организация выполнения компьютерной лабораторной работы по исследованию явления биения.....	104
<i>Кожамкулова Ж.Ж., Аманкелдикызы Н., Кабаева Д.А.</i> Информационные технологии, используемые при подготовке будущих педагогов, и их развитие.....	110
<i>Кошанов Б.Д., Адильбеков Е.Н., Дуйсен Е.</i> Размерность пространства решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области-I.....	116
<i>Кошанов Б.Д., Адильбеков Е.Н., Дуйсен Е.</i> Размерность пространства решений задачи Дирихле для уравнений Пуассона и бигармонического уравнения в неограниченной области- II.....	126
<i>Сапрыгина М.Б.¹, Акылбаев М.И., Шалданбаев А.Ш.</i> Обратная периодическая задача оператора Штурма-Лиувилля.....	132
<i>Койшиева Т.К., Кожамкулова Ж.Ж., Сабит Б.</i> Профессиональная подготовка будущих преподавателей в высших учебных заведениях на основе объектно-ориентированного проектирования	146
<i>Исаева Г.Б., Бейсенова А.М.</i> Виртуальные машины, преимущества виртуальных машин и уровни виртуализации...153	
<i>Сарсенбаев Х.А., Хамзина Б.С., Колдасова Г.А., Исаева Г.Б.</i> Применение биополимерных буровых растворов для эффективного вскрытия продуктивных горизонтов горизонтальных скважин.....	161
Памяти ученого	
Краткий очерк научной и общественной деятельности академика Национальной академии наук Республики Казахстан Э.Г.Бооса.....	166

CONTENTS

<i>Dzhumabaev D.S., Zharmagambetov A.S.</i> Numerical method for solving a linear boundary value problem for fredholm integro-differential equations.....	5
<i>Assanova A.T., Imanchiev A.E., Kadirbayeva Zh.M.</i> On the unique solvability of a multi-point problem for system of the loaded differential equations hyperbolic type	12
<i>Dauylbayev M. K., Dzhumabaev D. S., Atakhan N.</i> Asymptotical representation of singularly perturbed boundary value problems for integro-differential equations	18
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Ospanova Sh.S.</i> Investigation of aerodynamics and heat and mass transfer in the combustion chambers of the boilers PK-39 and BKZ-160.....	27
<i>Abishev M.E., Toktarbay S., Abylayeva A.Zh., Talkhat A.Z., Belissarova F.B.</i> The orbital stability of the motion of a test particle in a field of two massive rotating bodies.....	39
<i>Akzhigitova E.M., Kurmangalieva V.O., Arbuzov A.B.</i> Description of radiative muon decay using model-independent approach.....	54
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Shortanbaeva Zh.K.</i> Numerical modeling of burning pulverized coal in the combustion chamber of the boiler PK 39.....	58
<i>Abishev M., Malybayev A., Quevedo H.</i> Geometrothermodynamics of the ideal gas	64
<i>Shinibaev M.D., Bekov A.A., Rahimganov B.N., Mominov S.B., Sadybek A.G., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A.</i> Perturbed orbit of a circular type for the Hill second task	69
<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Maxutkhanova A.M., Turbekova A.G., Beisenov Kh.I.</i> A Computational experiment for studying the combustion of thermochemically-gasified coal in the combustion chamber of the boiler BKZ-160.....	75
<i>Salgarayeva G.I., Bazarbayeva A.</i> Steam system in education and robotics.....	81
<i>Akylbayev M. I., Parkhatova S., Shaldanbayev A.Sh.</i> On jointly completeness of Sturm-Liouville operators.....	87
<i>Shinibaev M.D., Dairbekov S.S., Zholdasov S.A., Aliaskarov D.A., Myrzakasova G.E., Sadybek A.G.</i> Perturbations satellites from the light pressure in the delaunay elements.....	99
<i>Kabyrbekov K.A., Ashirbaev H. A., Abekova Zh. A., Omashova G.Sh., Kydyrbekova Zh. B., Dzhumagalieva A.I.</i> The organization of performance of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of palpation.....	104
<i>Kozhamkulova Zh.Zh., Amankeldikyzy N., Kabaeva D.A.</i> Information technology used in the preparation of future teachers and their development.....	110
<i>Koshanov B.D., Adilbekov E.N., Duysen E.</i> The dimension of the space solutions of the dirichlet problem for the Poisson and biharmonic equations in unbounded Domains – I.....	116
<i>Koshanov B.D., Adilbekov E.N., Duysen E.</i> The dimension of the space solutions of the Dirichlet problem for the Poisson and biharmonic equations in unbounded domains – II.....	126
<i>Saprigina M.B., Akylbayev M. I., Shaldanbayev A.Sh.</i> The inverse periodic problem of the Sturm-Liouville operator.....	132
<i>Koyschieva T.K., Kozhamkulova Zh.Zh., Sabit B.</i> Training in higher education for future teachers on the basis of object-oriented design.....	146
<i>Issayeva G.B., Beisenova A.M.</i> The virtual machines, advantages of the virtual machines and virtualization levels.....	153
<i>Sarsenbayev Kh.A., Khamzina B.S., Koldassova G.A., Issayeva G.B.</i> Application of biopolymer drilling fluid for effective opening productive horizons horizontal wells.....	161
The memory of the scientist	
E. G. Boos	166

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, Т. А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А. М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 10.04.2017.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11,4 п.л. Тираж 300. Заказ 2.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19