ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ

♦

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

♦

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

5 (315)

ҚЫРКҮЙЕК – ҚАЗАН 2017 Ж.
СЕНТЯБРЬ – ОКТЯБРЬ 2017 Г.
SEPTEMBER – OCTOBER 2017

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

---

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 315 (2017), 101 – 111

UDC 517.977

K.B.Bapayev[1], S.S.Slamzhanova[2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
[2]Zhetysu State University named after I.Zhansugurov
v_gulmira@mail.ru, beksultan.82@mail.ru

ON STABILITY OF DIFFERENCE-DYNAMICAL SYSTEMS

Abstract. The evolution of the system in time is usually represented in the form of a trajectory in the corresponding phase space. As a rule trajectories are continuous. However their observation is possible only at certain time intervals which is the basis for the discreteness of information.

Another reason for the discreteness of the evolution of the system is the need to use digital computer technology which requires the construction of algorithms to resolve the corresponding dependencies. The study of such models is associated with the knowledge of the qualitative aspects of their development. When the discreteness in the system is generated by the above reason obtained by recurrence relations the systems are called "difference-dynamic systems".

Models of evolution of the difference-dynamical systems are sequences. These sequences are subject to the dependences called recurrence equations. All the tasks of the difference-dynamical systems are presented: as a problem related to the properties of the solution of recurrence equations; or as a problem related to the properties of mappings in Euclidean or other spaces.

Every fact formulated according to the first method can be formulated according to the second method, and vice versa. Therefore when the solutions of nonlinear difference-dynamical systems are investigated people try to do similar methods for investigating the corresponding problem of a system of differential and algebraic equations.

In this work the various types of stability definitions are introduced to investigate the qualitative property of solutions of the difference-dynamical systems. Using the analogy of the Lyapunov second method the conditions under which the difference-dynamical systems solutions are asymptotically stable in general, exponentially stable, Lagrange-stable.And the difference-dynamical system is convergent.

Keywords: Asymptotic stability in general, exponential stability, Lagrangian stability, convergence.

УДК517.977

К.Б.Бапаев, С.С.Сламжанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК,
Жетысуский государственный университет имени И.Жансугурова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНО – ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация. Эволюция системы во времени представляется обычно в виде траектории в соответствующем фазовом пространстве. Как правило, траектории являются непрерывными часто, однако, их наблюдение является возможным только через определенные промежутки времени, которое является основой дискретности информаций.

Другой причиной дискретности эволюции системы является необходимость использования цифровой вычислительной техники, которая требует построения алгоритмов, разрешающих соответствующие зависимости. Изучение таких моделей связано не только с методами численного определения состояний, но также и с познанием качественных аспектов их развития.

Когда дискретности в системе порождаются по сказанной причине, полученной рекуррентными соотношениями, системы называются «разностно-динамическими системами» (или сокращенно РДС).

Моделями эволюции РДС являются последовательности, которые подчиняются зависимостям, называемым рекуррентными уравнениями.

По этой причиневсе задачи РДС представляются:как проблема относящаяся к свойствам решения рекуррентных уравнений; или как проблема относящаяся к свойствам отображений в евклидовых или других пространствах.

Каждый факт, сформулированный по первому способу, может быть сформулирован и по второму способу, и наоборот. Поэтому при исследовании решения нелинейных РДС стараются придумать аналогичные методы исследования соответствующей задачи системы дифференциальных и алгебраических уравнений.

В данной работе для исследования качественного свойства решения РДС вводятся различные типы понятий устойчивости (поскольку устойчивость является первичным качеством любой системы) и с помощью аналогии второго метода Ляпунова устанавливаются условия, при которых решения РДС будут асимптотически устойчивыми в целом, экспоненциально устойчивыми, устойчивыми по Лагранжу и РДС является конвергентной.

Ключевые слова: Асимптотическая устойчивость в целом, экспоненциальная устойчивость, устойчивость по Лагранжу, конвергентность.

Введение.Во многих научных дисциплинах и их приложениях в последнее время все в большей степени можно заметить стремление замены описания системы в данный момент времени на исследование ее развития во времени. Эволюция системы во времени представляется обычно в виде траектории в соответствующем фазовом пространстве . Как правило, траектории являются непрерывными часто, однако, их наблюдение является возможным только через определенные промежутки времени, которое является основой дискретности информаций.

Другой причиной дискретности эволюции системы является необходимость использования цифровой вычислительной техники, которая требует построения алгоритмов, разрешающих соответствующие зависимости. Изучение таких моделей связано не только с методами численного определения состояний, но также и с познанием качественных аспектов их развития.

Когда дискретности в системе порождаются по второй причине, полученной рекуррентными соотношениями, системы называются «разностно-динамическими системами» (или сокращенно РДС).

Моделями эволюции рассматриваемых РДС являются последовательности, которые подчиняются зависимостям, называемыми рекуррентными уравнениями.

Поэтому, рассматривая модель РДС, удобно говорить просто о свойствах соответствующего рекуррентного уравнения.

По этой причине все задачи представляются:

1) как проблема относящаяся к свойствам решения рекуррентных уравнений;

2) как проблема относящаяся к свойствам отображений в евклидовых или других пространствах.

Каждый факт, сформулированный по первому способу, может быть сформулирован и по второму способу, и наоборот.

В теории РДС используются оба способа, однако в случае линейных РДС речь будет идти главным образом о свойствах рекуррентных уравнений, а в случае нелинейных РДС речь будет идти главным образом о свойствах отображений. Поэтому при исследовании решения нелинейных РДС обычно стараются придумать аналогичные методы исследования соответствующей задачи системы дифференциальных и алгебраических уравнений [1,4-9,16-18,20].

В данной работе для исследования качественного свойства решения РДС вводятся различные типы понятий устойчивости (поскольку устойчивость является первичным качеством любой системы), использованные для системы дифференциальных уравнений [1,4-8] и с помощью аналогии второго метода Ляпунова [2,3,11,13,14] устанавливаются условия, при которых решения РДС будут асимптотически устойчивыми в целом, экспоненциально устойчивыми, устойчивыми по Лагранжуи РДС является конвергентной[1,4-10,15, 16-20].

Асимптотическая устойчивость в целом

Рассмотрим РДС

$$x_{n+1} = X(n, x_n) \quad (X(n,0)) = 0 \ , \tag{1}$$

где $$X(n,x_n)\in C^{(0,1)}_{n,x_n}(Z^+\times R^k),$$

где Z^+ - множество неотрицательных целых чисел, $R^k - k$ - мерные евклидовы пространства.

Определение 1. Говорят, что нулевое решение $x_n = 0$ РДС (1) асимптотически устойчиво в целом, если

1) оно асимптотически устойчиво по Ляпунову и
2) для каждого решения $x_n = x(n;n_0,x_{n_0})\,(\forall n_0 \in Z^+)$выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \tag{2}$$

(т.е. область притяжения представляет собой все пространство R^k).

Определение 2. Будем говорить, что

$$V(n,x_n)\in C^{(0,1)}_{n,x_n}(Z^+\times R^k)$$

допускает бесконечно большой низший предел при $x_n \to\infty$, если

$$\lim_{\|x_n\|\to\infty} V(n,x_n)=\infty \tag{3}$$

т.е. для любого $M > 0$ существует $R = R(M)$ такое, что

$$|V(n,x_n)| > M \text{ при } n\in Z^+ \text{ и } \|x_n\| \geq R.$$

Определение 3. Будем говорить, что

$$V(n,x_n)\in C^{(0,1)}_{n,x_n}(Z^+\times R^k)$$

допускает в R^k сильный бесконечно малый высший предел при $x_n \to 0$, если существует функция

$$U(x_n)\in C(R^k)$$

такая, что

$$|V(n,x_n)| \leq U(x_n) (4)$$

при

$$(n,x_n)\in Z^+\times R^k \text{ и } U(0)=0 .$$

Теорема 1. Если для РДС (1) существует положительно определенная функция

$$V(n,x_n)\in C^{(0,1)}_{n,x_n}(Z^+\times R^k),$$

допускающая в R^k сильный бесконечно малый высший предел при $x_n \to 0$ и бесконечно большой низший предел при $x_n \to\infty$, причем первые разности $\Delta V(n,x_n)$, взятые в силу РДС(1) отрицательно определены в R^k, то тривиальное решение $x_n = 0$ (1) асимпотически устойчиво в целом.

Доказательство.Так как условия этой теоремы, очевидно, включают условия первой теоремы Ляпунова [2], т.е. нулевое решение $x_n = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Пусть $x_n = x(n;n,x_{n_0})$ - решение РДС(1), определямое начальными условиями

$$x_n = x(n;n,x_{n_0}) = x_{n_0} \neq 0$$

при $\forall n_0 \in Z^+$ и $\forall x_{n_0} \in R^k$.

Обозночим через D_{x_n} - некоторый компакт содержащий точку x_n

$$x_{n_0} \in D_{x_n} \subset R^k$$

и пусть $M = \sup V(n,x_n)$ на $Z^+\times D_{x_n}$.

В силу неравенства (4) имеем $M < +\infty$

Так как функция $V(n,x_n)$ обладает в R^k бесконечно большим пределом при $x_n \to \infty$, то существует шар $S\{\|x_n\| < R\ \} \supset D_{x_n}$ такой, что

$$V(n,x_n) > M$$

при

$$\|x_n\| \geq R. \quad (5)$$

По условию теоремы водоль траектории $x(n;n_0,x_{n_0})$ выполнено неравенство $\Delta V_n < 0$, поэтому при $n \geq n_0$ имеем

$$V(n;x(n;n_0,x_{n_0})) \leq V(n_0,x_{n_0}) \leq M$$

и следовательно

$$\|x(n;n_0,x_{n_0})\| < R,$$

т.е. все решенияРДС (1) ограничены.

Покажем теперь, что

$$\lim_{n\to\infty} V(n;x(n;n_0,x_{n_0})) = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\delta > 0$ такова, что функция $U(x_n)$, определяемая неравенством (4), удовлетворяет условию

$$0 \leq U(x_n) < \varepsilon$$

При

$$\|x_n\| < \delta. \quad (6)$$

Покажем, что решение $x(n;n_0,x_{n_0})$ при $n \to \infty$ обязательно войдет внутри замкнутого шара $\|x_n\| \leq \delta$.

Действительно, предположим обратно, т.е.

$$0 < \delta < \|x_n\| < R$$

при $n \geq n_0$.

Тогда ΔV_n будет отрицательно определенной, имеет в области

$$Z^+ \times \{\delta \leq \|x_n\| < R\ \}$$

отрицательную верхнюю грань - m $(m > 0)$ и, значит, при $n \geq n_0$ справедливо неравенство

$$\Delta V_n \leq -m.$$

Суммируя это неравенство в пределах от n_0 до n получим

$$V(n,x_n) \leq V(n_0,x_{n_0}) - m(n-n_0) < 0.$$

Если только

$$n > \left[n_0 + \frac{V(n, x_{n_0})}{m} \right],$$

(где[ ]-целые части), что противоречит положительности функции $V(n, x_n)$.Следовательно, существует момент $n_1 > n_0$ такой, что

$$\left\| x(n; n_0, x_{n_0}) \right\| \leq \delta$$

т.е.

$$U(x(n; n_0, x_{n_0})) < \varepsilon$$

Отсюда ввиду монотонности убывания функции

$$V(n; x(n; n_0, x_{n_0}))$$

при $n > n_1$, будем иметь

$$V(n, x_n) < V(n_1, x_{n_1}) \leq U(x_{n_1}) < \varepsilon$$

и таким образом

$$\lim_{n \to \infty} V(n; x_{n_0}) = 0 \, . \quad (7)$$

Из последнего равенства выводим, что

$$\lim_{n \to \infty} x(n; n_0, x_{n_0}) = 0 \, .$$

Так как в противном случае существовала бы последовательность

$$x(n_1; n_0, x_{n_0}) \ (l = 1,2, \ldots; \ n_1 \to \infty \ )$$

такая, что

$$\lim_{n \to \infty} V(n_1; x_{n_1}) \neq 0 \, .$$

Это противоречило бы равенству (7). Теорема доказана.

Экспоненциальная устойчивость

Определение 4. Нулевое решение РДС (1) называется экспоненциально устойчивым при $n \to \infty$,если для каждого решения $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$ в некоторой области

$$D_{x_n} = Z^+ \times \{ x_n \in R^k / \| x_n \| < h < H \ \}$$

(где h и H - некоторые постоянные) справдливо неравенство

$$\| x_n \| \leq L \cdot \| x_{n_0} \| e^{-\alpha(n - n_0)} , \ n \geq n_0 \, , \quad (8)$$

где L и α - положительные постоянные, не зависящие от выбора решения x_n. Из определения видно, что из экспоненциальной устойчивости нулевого решения $x_n = 0$ следует его асимптотическая устойчивость. Действительно, полагая

$$\| x_{n_0} \| < \frac{\varepsilon}{L} = \delta,$$

где $0 < \varepsilon$ - сколь угодно малое произвольное постоянное.

Из неравенства (8) имеем

$$\left\| x_n \right\| < \varepsilon \quad при \quad n \geq n_0 ,$$

т.е. решение $x_n = 0$ устоичиво по Ляпунову.

Кроме того, очевидно

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 ,$$

если только $\left\| x_{n_0} \right\| < h$.

Если неравенство (8) справедливо для всех точек $x_{n_0} \in R^k$, то имеет место асимптотическая устойчивость в целом.

Теорема 2. Если нулевое решение однородной линейной РДС

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{9}$$

с постоянной матрицей A асимптотически устойчиво при $n \to \infty$, то эта РДС экспоненциально устойчива, т.е. каждое ее решение экспоненциально устойчиво при $n \to \infty$.

Доказательство: Как известно [2] нулевое решение РДС (9) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы A по модулю меньшие единицы, т.е.

$$\left| \lambda_\rho (A) \right| < 1 \qquad (\rho = 1,2......,k).$$

Положим

$$\max_\rho \left| \lambda_\rho (A) \right| < e^{-a} < 1 ,$$

где $\alpha > 0$.

Тогда при $n \in Z^+$ получим

$$\left| A^n \right| \leq Le^{-\alpha n} , \tag{10}$$

где L - некоторая положительная постоянная. Из РДС (9) для любого решения x_n находим

$$x_n = A^{n-n_0} x_{n_0} ,$$

где начальный момент n_0 произволен. Следовательно, на основании (10) при $n_0 < n$ получаем

$$\left\| x_n \right\| \leq L \cdot \left\| x_{n_0} \right\| e^{-\alpha(n-n_0)} .$$

Отсюда для любого решения y_n РДС (9) учитывая, что разность $x_n - y_n$ есть решение этой РДС при $n_0 \leq n$ будем иметь

$$\left\| x_n - y_n \right\| \left\| x_n \right\| \leq L \cdot \left\| x_{n_0} - y_{n_0} \right\| e^{-\alpha(n-n_0)} .$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Для нестационарной линейной РДС из асимптотической устойчивости ее нулевого решения вообще говоря не следует экспоненциальная устойчивость [3].

Теорема 3. Если существует положительно – определенная квадратичная форма

$$V(x_n) = x_n' Ax_n \tag{11}$$

($'$ - знак транспонированная) первой разности которой ΔV_n в силу РДС (1) удовлетворяет неравенству

$$\Delta V_n \leq W(x_n) ,(12)$$
$$\left(n_0 < n; \left\| x_n \right\| \leq h < H \right),$$

где

$$W(x_n) = x_n' Bx_n \tag{13}$$

отрицательно определенная квадратичная форма (A и B - постоянные симметрические матрицы), то нулевое решение РДС (1) экспоненциально устойчиво при $n \to +\infty$.

Доказательство: На основании формул (11) и (13) получаем:

$$a_1(x_n; x_n) \le V_n \le a_2(x_n; x_n)$$

и

$$b_1(x_n; x_n) \le -W \le b_2(x_n; x_n)$$

где

$$a_1 = \min_{\rho} \lambda_{\rho}(A), \qquad a_2 = \max_{\rho} \lambda_{\rho}(A)$$

и соотваетственно

$$b_1 = \min_{\rho} \lambda_{\rho}(B), \qquad b_2 = \max_{\rho} \lambda_{\rho}(B).$$

Причем $0 < a_1 \le a_2$ и $0 < a_1 \le a_2$.

Отсюда на основании неравенства (12) выводим

$$\Delta V_n \le -b_1(x_n; x_n) \le -\frac{b_1}{a_2} V(x_n).$$

Суммируя это неравенство, будем иметь при $n_0 < n$

$$V(x_n) \le V(x_{n_0}) e^{-2\alpha(n-n_0)},$$

где $n_0 \le n$ - находим

$$\|x_n\|^2 \le \frac{1}{a_1} V(x_n) \le \frac{a_2}{a_1} \|x_{n_0}\|^2 e^{-2\alpha(n-n_0)},$$

т.е. при $n_0 < n$

$$\|x_n\| \le \frac{1}{a_1} \|x_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)},$$

где $S = \sqrt{\dfrac{a_2}{a_1}}$ и $\|x_{n_0}\|$ - достаточно мала.

Устойчивость по Лагранжу

Определение 5. РДС (1) называется устойчивой по Лагранжу, если

1) каждое решение $x(n; n_0, x_{n_0})$, где $n_0 \in Z^+$ существует для всех $n \in Z^+$;

2) $\|x_{n_0}\|$ - ограничена на Z^+.

Используя функции Ляпунова, нетрудно сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости РДС (1) по Лагранжу.

Теорема 4. Для того, чтобы РДС (1) была устойчива по Лагранжу, необходимо и достаточно, чтобы в $Z^+ \times R^k$ существовала функция $V(n, x_n)$ такая что

1) $V(n, x_n) \ge W(x_n)$ где $\lim\limits_{x_n \to \infty} W(x_{n_1}) = \infty$;

2) для каждого решения x_n функция была невозрастающей относительно $n \in Z^+$.

Доказательство.

Достаточность: Пусть для РДС (1) существует функция $V(n, x_n)$ обладающая свойствами 1) и 2).

Для всякого решения РДС (1)

$$x(n; n_0, x_{n_0}) \ \left(n_0 \in Z^+; \|x_{n_0}\| < \infty\right)$$

в силу условия 2) при $n \ge n_0$ имеем

$$V(n, x_n) \le V(n_0, x_{n_0}).$$

Отсюда на основании 1) получаем

$$W\left(x\left(n;n_0,x_{n_0}\right)\right)\le V\left(n;x\left(n;n_0,x_{n_0}\right)\right)\le V\left(n_0,x_{n_0}\right)(14)$$

при $n\ge n_0$.

Из последнего неравенства следует, что решение $x\left(n;n_0,x_{n_0}\right)$ ограничено.

Действительно, если это не так, то нашласьбы последовательность моментов $n_l\to\infty$ $\left(l=1,2,....;n_l>n_0\right)$ такая, что

$$\lim_{l\to\infty}\left\|x_{n_l}\right\|=\infty$$

и следовательно $\lim\limits_{l\to\infty}W\left(x_{n_l}\right)=\infty$.

Это противоречило бы неравенству (14), что невозможно.

Необходимость: Пусть любое решение $x_n=x\left(n;n_0,x_{n_0}\right)$ РДС (1) существует и ограничено в Z^+.

Положим

$$V\left(n,x_n\right)=\sup_{\nu>0}\left\|x_{n+\nu}\right\|=\sup_{\nu>0}\left\|x\left(n+\nu;n,x_n\right)\right\|^2,(15)$$

где

$$\left\|x_n\right\|<\infty,\ n>n_0\in Z^+,$$

из формулы (15) имеем

$$V_n\ge\left\|x\left(n+\nu;n,x_n\right)\right\|^2=\left\|x_n\right\|^2=W\left(x_n\right)$$

Причем, очевидно

$$\lim_{\|x_n\|\to\infty}W\left(x_n\right)=\infty$$

т.е. условие 1) выполнено.

Далее, при $n_0<n_1<n_2$, учитывая, что в силу свойства единственности решения $x_n=x(n;n_2;x_{n_2})$ является продолжением решения $x_n=(n;n_1;x_{n_1})$, получаем

$$V(n;x_{n_1})=\sup_{\nu>0}\left\|x(n_1+\nu;n_1;x(n_1;n_0;x_{n_0}))\right\|^2\ge$$

$$\ge\sup_{\nu\ge0}\left\|x(n_2+\nu;n_2;x(n_2;n_0;x_{n_0}))\right\|^2=V(n_2;x(n_2;n_0;x_{n_0})).$$

Таким образом, условия 2) так же выполнено. Т.е. теорема полностью доказана.

РДС с конвергенцией

Определение 5. Будем говорить, что РДС (1) обладет свойством конвергенции, если:

1) все решения $x(n_2;n_0;x_{n_0})$ определены при

$$\forall n\in Z_{n_0}=\{n_0,n_0+1,....,\infty\};$$

2) существует единственное решение r_n определенное и ограничное на *Z* т.е.

$$\sup\left\|r_n\right\|<\infty;$$

3) решение r_n асимтотически устойчиво в целом при $n\to\infty$, т.е. для любого $x(n_2;n_0;x_{n_0})$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left\lfloor x(n;n_0;x_{n_0})-r_n\right\rfloor=0.$$

Можно скажать, что в некотором смысле r_n является предельным режимом [7] РДС (1).

Очевидно, если РДС (1) обладет свойством конвергенции, то все ее решения $x(n_2;n_0;x_{n_0})$ предельно ограничены при $n\to\infty$, т.е. существует положительное число *R* такое, что

$\left\| x(n; n_0, x_{n_0}) \right\| < R$ при $n >> n_0$

В частности, например, можно принять:

$$R = \sup_{n \in Z} \left\| r_n \right\| + 1$$

Замечание. Если правая часть $X(n; x_n)$ конвергентной РДС (1) $\overline{N}$ -периодична по n где ($\overline{N} \in N$ -множества натуральных чисел), то ограниченное решение r_n также $\overline{N}$ -периодична по n .

Действительно, пусть

$$X(n + \overline{N}; x_n) = X(n; x_n) .$$

Рассмотрим вектор-функцию $r(n + \overline{N})$ имеем $r(n + \overline{N} + 1) = X(n + \overline{N}; x_{n+\overline{N}})$. Таким образом, $r(n + \overline{N})$ также является решением РДС (1) и притом ограниченным на *Z*. А так как РДС с конвергенцией обладает единственным ограииченным на *Z* решением то

$$r(n + \overline{N}) = r(n).$$

т.е. r_n есть $\overline{N}$ периодическое решение РДС (1).

Теорема 5. Пусть
$$x_{n+1} = Ax_n + f(n), \tag{16}$$
где *A*-постоянная $k \times k$ матрица и ($k \times 1$) столбца $f(n) \in C(Z_+)$.

Если

1) все собственные числа $\lambda_j(A)$ -матрицы *A* по модулю меньше единицы т.е.

$$\left| \lambda_j(A) \right| < 1; \quad j = \overline{1, k}; \tag{17}$$

2) $\sup_{n \in Z} \left\| f(n) \right\| = \beta < \infty,$

то РДС (16) обладает свойством конвергенции, причем

$$r(n) = \sum_{j=-\infty}^{n} A^{n-j} f(j-1) \tag{18}$$

представляет собой единственное ограниченное на Z_+ решение РДС (16).

Доказательство. Из условия (17) имеет

$$\left\| A^n \right\| \le \gamma \cdot e^{-\alpha n}$$

при $n \ge 0$, где $\gamma > 0$ и $0 < \alpha < -\max_j \ln \left| \lambda_j \right|$.

Отсюда
$$\left\| r_n \right\| \le \gamma \sum_{j=-\infty}^{n} e^{-\alpha(n-j)} \left\| f(j-1) \right\| \le \beta\gamma e^{-\alpha n} \cdot \frac{e^{\alpha n}}{\alpha} = \frac{\beta\gamma}{\alpha} < \infty$$

следовательно, сумма (18) сходится и функция $r(n)$ ограничена, причем

$$\sup_{n \in Z} \left\| r_n \right\| \le \frac{\lambda}{\alpha} \sup_{n \in Z} \left\| f(n) \right\|,$$

варьируя функцию (18) по n, получим

$$r(n+1) = f(n) + A \sum_{j=-\infty}^{n} A^{n-j} f(j-1) = f(n) + Ar(n)$$

и таким образом, $r(n)$ являетсч решением РДС (16).

То, что ограниченное решение РДС (16) единственное следует из того обстоятельства, что разность двух ограниченных решений неоднородной РДС (16) является ограниченным решением соответствующей однородной РДС

$$x_{n+1} = Ax_n ,$$

не имеющей нетривиальные решения, ограниченных наZ_+.

Действительно, если $r(n)$-другое решение РДС (16), ограниченное на Z_+, то при любом $n_0 \in Z$ имеем

$$r_1(n) - r(n) = A^{n-n_0}\left[r_1(n_0) - r(n_j)\right]$$

отсюда

$$\left\|r_1(n) - r(n)\right\| \le \gamma e^{-\alpha(n-n_0)}\left\|r_1(n_0) - r(n_0)\right\| \quad (19)$$

Так как

$$\sup_{n_0 \in Z}\left\|r_1(n_0) - r(n_0)\right\| < \infty,$$

то фиксируя n и переходя при $n_0 \to \infty$ в (19), получим

$$\left\|r_1(n) - r(n)\right\| \le 0,$$

т.е. $r_1(n) = r(n)$ и таким образом, других, кроме r_n ограниченных на Z_+, решение РДС (16) не имеет.

Если x_n-любое решение неоднородной РДС (16), то учитывая, что разность $x_n - r(n)$ удовлетворяет однородной РДС получим

$$x_n - r(n) = A^{n-n_0}\left[x_{n_0} - r(n_0)\right].$$

Отсюда

$$\left\|x(n) - r(n)\right\| \le \gamma e^{-\alpha(n-n_0)}\left\|x_{n_0} - r(n_0)\right\|,$$

при $n \ge n_0$ и следовательно

$$\lim_{n\to\infty}\left\|x(n) - r(n)\right\| = 0.$$

Таким образом, $r(n)$ устойчиво в целом при $n \to \infty$ и значит РДС (16) конвергентна.

ЛИТЕРАТУРА

[1]Барбашин Е.А., Красовский М.Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. Прикладная математика и механика, Т. 18, вып 3, 1954, с. 345-350.

[2]Бапаев К.Б., Бапаева С.К. Об устойчивости линейных РДС. Матеріали ІІ міжнародноі Науково-практичноі конференціі «Дні науки», 2006, Днепропетровск, С. 52-58.

[3]БромбергП.В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука,1967, 324 с.

[4]Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959, 212 с.

[5]Лефщец С., Ла-Силль И.С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.

[6]Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949, 550 с.

[7]Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964, 367 с.

[8]Zevinsan N. The asymptotic nature at solutions at linear systems at differential equations. Puke Wath Journ. 15(1948). p. 111-126.

[9]ZiangZhang-chao. The bondedness at solutions at certain nonlinear differential equations. ChineseMath -3,2(1963). p. 169-183.

[10]Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 324 р.

[11]Александров А.Ю., Жабко А.П. Устойчивости разностных систем. Санкт Петербург, 2003.

[12]Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1935, 371 с.

[13]Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев.:Наукова Думка, 1972.

[14]Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

[15]Yoshizawa T. stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: Japan, 1966.

[16]Wichel A.N., Wu S.H. Stability of discrete systems over finite integral time // Int. J. control. 1969. V. 9. P. 679-693.

[17] Talpalaru P. Stability problems for difference equations // An. Sti. Univ. «Al. I. Cuza». Tasi. Mat. 2005. 51, № 2. P. 231-244.

[18] Hahn W. Theory stability of motion / Berlin Heidelderg-New York: Springer Verlag. 1967.

[19] Yoshizava T. Stability theory by Lyapunov's second method. Tokio: Math.Soc. Japan, 1966.

[20] Yoshizava T. Stability theory and existence of periodic solutions almost periodic solutions. NewYork. Heidelberg. Berlin. 1975.

REFERENCES

[1] Barbashin E.A., Krasovsky M.N. On the existence of a Lyapunov function in the case of asymptotic stability in general. Applied Mathematics and Mechanics, 18, issue 3 (**1954**) p. 345-350.

[2] Bapaev K.B., Bapaeva S.K. On the stability of linear RDS. Proceedings of IIInt. Scientific-Practical Conference "Science Day". Dnipropetrovsk, **2006**, pp. 52-58.

[3]Bromberg P.V. Matrix methods in the theory of relay and impulse regulation. Moscow: Nauka, **1967**, 324 p.

[4]Krasovskiy N.N. Some problems of the theory of stability of motion. Moscow: Fizmatgiz, **1959**, 212 p.

[5]Lefschetz S., LaSill I.S. Investigation of stability by the direct Lyapunov method. Moscow: Mir, **1964**.

[6]Nemytsky V.V., Stepanov V.V. Qualitative theory of differential equations. Moscow: Gostekhizdat, **1949**, 550.

[7]Pliss V.A. Nonlocal problems of the theory of oscillations. Moscow: Nauka, **1964**, 367.

[8] Zevinsan N. The asymptotic nature at solutions at linear systems at differential equations. Puke Wath Journ. 15(**1948**). p. 111-126.

[9] ZiangZhang-chao. The bondedness at solutions at certain nonlinear differential equations. Chinese Math -3,2(**1963**). p. 169-183.

[10]Demidovich BP Lectures on the mathematical theory of stability. Moscow: Nauka, **1967**, 324 p.

[11]Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Stability of difference systems. St. Petersburg, **2003.**

[12]Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. Moscow, **1935**, 371 p.

[13]Martynyuk D.I. Lectures on the qualitative theory of difference equations. Kiev: Naukova Dumka, **1972.**

[14]Khalanay A., Wexler D. Qualitative theory of impulse systems. Moscow: Mir, **1971.**

[15]Yoshizawa T. stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: Japan, **1966.**

[16] Wichel A.N., Wu S.H. Stability of discrete systems over finite integral time // Int. J. control. **1969**. V. 9. P. 679-693.

[17] Talpalaru P. Stability problems for difference equations // An. Sti. Univ. «Al. I. Cuza». Tasi. Mat. **2005.** 51, № 2. P. 231-244.

[18] Hahn W. Theory stability of motion / Berlin Heidelderg-New York: Springer Verlag. **1967.**

[19] Yoshizava T. Stability theory by Lyapunov's second method. Tokio: Math.Soc. Japan, **1966.**

[20] Yoshizava T. Stability theory and existence of periodic solutions almost periodic solutions. New York, Heidelberg, Berlin. **1975.**

К.Б. Бапаев, С.С. Слəмжанова

Математика жəне математикалық моделдеу институты,
И.Жансугурова атындағы Жетысу мемлекеттік университеті

АЙЫРЫМДЫҚ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Аннотация. Уақытқа байланысты жүйелер эволюциясы фазалық кеңістіктегі олардың траекториясымен сипатталады. Ал траектория көп жағдайда үздіксіз болып бейнеленілітінімен оның бақыланылуы дискретті хабарларға негізделеді.

Екінші жағынан жүйелер эволюциясының дискреттік сипатталуы ол жүйелер эволюциясын зерттегенде оған цифрлық техникаларды қолдану қажеттілігі бізді тағыда дискретті информацияға алып келеді. Міне осылардың негізінде жүйеміз дискретті жүйе болып шығады. Оны айырымдық-динамикалық жүйе деп атайды. Айырымдық-динамикалық жүйелер эволюциясы реккуренттік қатынаста болады. Ол қатынастар реккуренттік теңдеулермен анықталады.

Сөйтип айырымдық-динамикалық жүйелер есебін: не реккуренттік теңдеулер шешулерімен байланысты проблемалар немесе евклидттік немесе басқа кеңістіктердегі бейнелеу теорияларының проблемасы деп қарастыруға болады.

Сондықтанда сызықты емес айырымдық-динамикалық жүйелерді зерттеу үшін дəл сандай дифференциалдық теңдеулер теориясының немесе алгебралық теңдеулер теориясының əдістерінің баламаларын жасап пайдалануға тырысады.

Бұл жұмыста айырымдық-динамикалық жүйелердің шешулерін сапалы зерттеу үшін дифференциалдық теңдеулер жүйелеріне пайдаланылған орнықтылықтың əр-түрлі типтері енгізіледі жəне Ляпуновтың екінші əдісінің дискретті баламасы бойынша айырымдық-динамикалық жүйелер шешулерінің тұтас асимптотикалық, экспонеттік Лагранж мағынасындағы, орнықтылықтарымен конвергенттілік шарттары алынған.

Тірек сөздер: тұтас асимптотикалық орнықтылық, экспоненттік орнықтылық, Лагранж мағынасындағы орнықтылық, конвергенттілік.

МАЗМҰНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 25.09.2017.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
11 п.л. Тираж 300. Заказ 5.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19