

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ**

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES**

**5 (315)**

**ҚЫРКУЙЕК – ҚАЗАН 2017 Ж.  
СЕНТЯБРЬ – ОКТЯБРЬ 2017 Г.  
SEPTEMBER – OCTOBER 2017**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Жұмаділдаев А.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Қазақстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Жұмабаев Д.С.** проф. (Қазақстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошқаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Сұраған Д.** корр.-мүшесі (Қазақстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Қырғыстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорус)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)  
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде  
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.  
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2017

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Джумадильдаев А.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Кальменов Т.Ш.** проф., академик (Казахстан)  
**Жантаев Ж.Ш.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф. чл.-корр. (Казахстан)  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Джумабаев Д.С.** проф. (Казахстан)  
**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Сураган Д.** чл.-корр. (Казахстан)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Джунушалиев В.Д.** проф. (Кыргызстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов  
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2017

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f  
doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

**Dzhumadildayev A.S.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Kalmenov T.Sh.** prof., academician (Kazakhstan)  
**Zhantayev Zh.Sh.** prof., corr. member. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof. corr. member. (Kazakhstan)  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Dzhumabayev D.S.** prof. (Kazakhstan)  
**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Suragan D.** corr. member. (Kazakhstan)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Dzhunushaliyev V.D.** prof. (Kyrgyzstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz](http://www.nauka-nanrk.kz/physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2017

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 315 (2017), 101 – 111

UDC 517.977

**K.B.Bapayev<sup>1</sup>, S.S.Slamzhanova<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Institute of Mathematics and Mathematical Modeling<sup>2</sup>Zhetysu State University named after I.Zhansugurov[v\\_gulmira@mail.ru](mailto:v_gulmira@mail.ru), [beksultan.82@mail.ru](mailto:beksultan.82@mail.ru)**ON STABILITY OF DIFFERENCE-DYNAMICAL SYSTEMS**

**Abstract.** The evolution of the system in time is usually represented in the form of a trajectory in the corresponding phase space. As a rule trajectories are continuous. However their observation is possible only at certain time intervals which is the basis for the discreteness of information.

Another reason for the discreteness of the evolution of the system is the need to use digital computer technology which requires the construction of algorithms to resolve the corresponding dependencies. The study of such models is associated with the knowledge of the qualitative aspects of their development. When the discreteness in the system is generated by the above reason obtained by recurrence relations the systems are called "difference-dynamic systems".

Models of evolution of the difference-dynamical systems are sequences. These sequences are subject to the dependences called recurrence equations. All the tasks of the difference-dynamical systems are presented: as a problem related to the properties of the solution of recurrence equations; or as a problem related to the properties of mappings in Euclidean or other spaces.

Every fact formulated according to the first method can be formulated according to the second method, and vice versa. Therefore when the solutions of nonlinear difference-dynamical systems are investigated people try to do similar methods for investigating the corresponding problem of a system of differential and algebraic equations.

In this work the various types of stability definitions are introduced to investigate the qualitative property of solutions of the difference-dynamical systems. Using the analogy of the Lyapunov second method the conditions under which the difference-dynamical systems solutions are asymptotically stable in general, exponentially stable, Lagrange-stable. And the difference-dynamical system is convergent.

**Keywords:** Asymptotic stability in general, exponential stability, Lagrangian stability, convergence.

УДК517.977

**К.Б.Бапаев, С.С.Сламжанова**

Институт математики и математического моделирования МОН РК,

Жетысуский государственный университет имени И.Жансугурова

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНО –  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Аннотация.** Эволюция системы во времени представляется обычно в виде траектории в соответствующем фазовом пространстве. Как правило, траектории являются непрерывными часто, однако, их наблюдение является возможным только через определенные промежутки времени, которое является основой дискретности информации.

Другой причиной дискретности эволюции системы является необходимость использования цифровой вычислительной техники, которая требует построения алгоритмов, разрешающих соответствующие зависимости. Изучение таких моделей связано не только с методами численного определения состояний, но также и с познанием качественных аспектов их развития.

Когда дискретности в системе порождаются по сказанной причине, полученной рекуррентными соотношениями, системы называются «разностно-динамическими системами» (или сокращенно РДС).

Моделями эволюции РДС являются последовательности, которые подчиняются зависимостям, называемым рекуррентными уравнениями.

По этой причине все задачи РДС представляются как проблема относящаяся к свойствам решения рекуррентных уравнений; или как проблема относящаяся к свойствам отображений в евклидовых или других пространствах.

Каждый факт, сформулированный по первому способу, может быть сформулирован и по второму способу, и наоборот. Поэтому при исследовании решения нелинейных РДС стараются придумать аналогичные методы исследования соответствующей задачи системы дифференциальных и алгебраических уравнений.

В данной работе для исследования качественного свойства решения РДС вводятся различные типы понятий устойчивости (поскольку устойчивость является первичным качеством любой системы) и с помощью аналогии второго метода Ляпунова устанавливаются условия, при которых решения РДС будут асимптотически устойчивыми в целом, экспоненциально устойчивыми, устойчивыми по Лагранжу и РДС является конвергентной.

**Ключевые слова:** Асимптотическая устойчивость в целом, экспоненциальная устойчивость, устойчивость по Лагранжу, конвергентность.

**Введение.** Во многих научных дисциплинах и их приложениях в последнее время все в большей степени можно заметить стремление замены описания системы в данный момент времени на исследование ее развития во времени. Эволюция системы во времени представляется обычно в виде траектории в соответствующем фазовом пространстве. Как правило, траектории являются непрерывными часто, однако, их наблюдение является возможным только через определенные промежутки времени, которое является основой дискретности информации.

Другой причиной дискретности эволюции системы является необходимость использования цифровой вычислительной техники, которая требует построения алгоритмов, разрешающих соответствующие зависимости. Изучение таких моделей связано не только с методами численного определения состояний, но также и с познанием качественных аспектов их развития.

Когда дискретности в системе порождаются по второй причине, полученной рекуррентными соотношениями, системы называются «разностно-динамическими системами» (или сокращенно РДС).

Моделями эволюции рассматриваемых РДС являются последовательности, которые подчиняются зависимостям, называемыми рекуррентными уравнениями.

Поэтому, рассматривая модель РДС, удобно говорить просто о свойствах соответствующего рекуррентного уравнения.

По этой причине все задачи представляются:

- 1) как проблема относящаяся к свойствам решения рекуррентных уравнений;
- 2) как проблема относящаяся к свойствам отображений в евклидовых или других пространствах.

Каждый факт, сформулированный по первому способу, может быть сформулирован и по второму способу, и наоборот.

В теории РДС используются оба способа, однако в случае линейных РДС речь будет идти главным образом о свойствах рекуррентных уравнений, а в случае нелинейных РДС речь будет идти главным образом о свойствах отображений. Поэтому при исследовании решения нелинейных РДС обычно стараются придумать аналогичные методы исследования соответствующей задачи системы дифференциальных и алгебраических уравнений [1,4-9,16-18,20].

В данной работе для исследования качественного свойства решения РДС вводятся различные типы понятий устойчивости (поскольку устойчивость является первичным качеством любой системы), использованные для системы дифференциальных уравнений [1,4-8] и с помощью аналогии второго метода Ляпунова [2,3,11,13,14] устанавливаются условия, при которых решения РДС будут асимптотически устойчивыми в целом, экспоненциально устойчивыми, устойчивыми по Лагранжу и РДС является конвергентной [1,4-10,15, 16-20].

#### Асимптотическая устойчивость в целом

Рассмотрим РДС

$$x_{n+1} = X(n, x_n) \quad (X(n, 0)) = 0, \quad (1)$$

где  $X(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k)$ ,

где  $Z^+$  - множество неотрицательных целых чисел,  $R^k - k$  - мерные евклидовы пространства.

**Определение 1.** Говорят, что нулевое решение  $x_n = 0$  РДС (1) асимптотически устойчиво в целом, если

- 1) оно асимптотически устойчиво по Ляпунову и
- 2) для каждого решения  $x_n = x(n; n_0, x_{n_0}) (\forall n_0 \in Z^+)$  выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad (2)$$

(т.е. область притяжения представляет собой все пространство  $R^k$ ).

**Определение 2.** Будем говорить, что

$$V(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k)$$

допускает бесконечно большой нижний предел при  $x_n \rightarrow \infty$ , если

$$\lim_{\|x_n\| \rightarrow \infty} V(n, x_n) = \infty \quad (3)$$

т.е. для любого  $M > 0$  существует  $R = R(M)$  такое, что

$$|V(n, x_n)| > M \text{ при } n \in Z^+ \text{ и } \|x_n\| \geq R.$$

**Определение 3.** Будем говорить, что

$$V(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k)$$

допускает в  $R^k$  сильный бесконечно малый высший предел при  $x_n \rightarrow 0$ , если существует функция

$$U(x_n) \in C(R^k)$$

такая, что

$$|V(n, x_n)| \leq U(x_n) \quad (4)$$

при

$$(n, x_n) \in Z^+ \times R^k \text{ и } U(0) = 0.$$

**Теорема 1.** Если для РДС (1) существует положительно определенная функция

$$V(n, x_n) \in C_{n, x_n}^{(0,1)}(Z^+ \times R^k),$$

допускающая в  $R^k$  сильный бесконечно малый высший предел при  $x_n \rightarrow 0$  и бесконечно большой нижний предел при  $x_n \rightarrow \infty$ , причем первые разности  $\Delta V(n, x_n)$ , взятые в силу РДС(1) отрицательно определены в  $R^k$ , то тривиальное решение  $x_n = 0$  (1) асимптотически устойчиво в целом.

**Доказательство.** Так как условия этой теоремы, очевидно, включают условия первой теоремы Ляпунова [2], т.е. нулевое решение  $x_n = 0$  устойчиво по Ляпунову.

Пусть  $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$  - решение РДС(1), определяемое начальными условиями

$$x_n = x(n; n_0, x_{n_0}) = x_{n_0} \neq 0$$

при  $\forall n_0 \in Z^+$  и  $\forall x_{n_0} \in R^k$ .

Обозначим через  $D_{x_n}$  - некоторый компакт содержащий точку  $x_n$

$$x_{n_0} \in D_{x_n} \subset R^k$$

и пусть  $M = \sup V(n, x_n)$  на  $Z^+ \times D_{x_n}$ .

В силу неравенства (4) имеем  $M < +\infty$

Так как функция  $V(n, x_n)$  обладает в  $R^k$  бесконечно большим пределом при  $x_n \rightarrow \infty$ , то существует шар  $S\{\|x_n\| < R\} \supset D_{x_n}$  такой, что

$$V(n, x_n) > M$$

при

$$\|x_n\| \geq R. \quad (5)$$

По условию теоремы вдоль траектории  $x(n; n_0, x_{n_0})$  выполнено неравенство  $\Delta V_n < 0$ , поэтому при  $n \geq n_0$  имеем

$$V(n; x(n; n_0, x_{n_0})) \leq V(n_0, x_{n_0}) \leq M$$

и следовательно

$$\|x(n; n_0, x_{n_0})\| < R,$$

т.е. все решения РДС (1) ограничены.

Покажем теперь, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n; x(n; n_0, x_{n_0})) = 0.$$

Пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно и  $\delta > 0$  такова, что функция  $U(x_n)$ , определяемая неравенством (4), удовлетворяет условию

$$0 \leq U(x_n) < \varepsilon$$

При

$$\|x_n\| < \delta. \quad (6)$$

Покажем, что решение  $x(n; n_0, x_{n_0})$  при  $n \rightarrow \infty$  обязательно войдет внутри замкнутого шара  $\|x_n\| \leq \delta$ .

Действительно, предположим обратно, т.е.

$$0 < \delta < \|x_n\| < R$$

при  $n \geq n_0$ .

Тогда  $\Delta V_n$  будет отрицательно определенной, имеет в области

$$Z^+ \times \{\delta \leq \|x_n\| < R\}$$

отрицательную верхнюю грань -  $m$  ( $m > 0$ ) и, значит, при  $n \geq n_0$  справедливо неравенство

$$\Delta V_n \leq -m.$$

Суммируя это неравенство в пределах от  $n_0$  до  $n$  получим

$$V(n, x_n) \leq V(n_0, x_{n_0}) - m(n - n_0) < 0.$$

Если только



$$n > \left[ n_0 + \frac{V(n, x_{n_0})}{m} \right],$$

(где  $[ \ ]$  -целые части), что противоречит положительности функции  $V(n, x_n)$ . Следовательно, существует момент  $n_1 > n_0$  такой, что

$$\|x(n; n_0, x_{n_0})\| \leq \delta$$

т.е.

$$U(x(n; n_0, x_{n_0})) < \varepsilon$$

Отсюда ввиду монотонности убывания функции

$$V(n; x(n; n_0, x_{n_0}))$$

при  $n > n_1$ , будем иметь

$$V(n, x_n) < V(n_1, x_{n_1}) \leq U(x_{n_1}) < \varepsilon$$

и таким образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n; x_{n_0}) = 0. \quad (7)$$

Из последнего равенства выводим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n; n_0, x_{n_0}) = 0.$$

Так как в противном случае существовала бы последовательность

$$x(n_l; n_0, x_{n_0}) \quad (l = 1, 2, \dots; n_l \rightarrow \infty)$$

такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n_l; x_{n_l}) \neq 0.$$

Это противоречило бы равенству (7). Теорема доказана.

#### Экспоненциальная устойчивость

**Определение 4.** Нулевое решение РДС (1) называется экспоненциально устойчивым при  $n \rightarrow \infty$ , если для каждого решения  $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$  в некоторой области

$$D_{x_n} = Z^+ \times \{x_n \in R^k / \|x_n\| < h < H\}$$

(где  $h$  и  $H$  - некоторые постоянные) справедливо неравенство

$$\|x_n\| \leq L \cdot \|x_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)}, \quad n \geq n_0, \quad (8)$$

где  $L$  и  $\alpha$  - положительные постоянные, не зависящие от выбора решения  $x_n$ . Из определения видно, что из экспоненциальной устойчивости нулевого решения  $x_n = 0$  следует его асимптотическая устойчивость. Действительно, полагая

$$\|x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{L} = \delta,$$

где  $0 < \varepsilon$  - сколь угодно малое произвольное постоянное.

Из неравенства (8) имеем

$$\|x_n\| < \varepsilon \quad \text{при } n \geq n_0,$$

т.е. решение  $x_n = 0$  устойчиво по Ляпунову.

Кроме того, очевидно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

если только  $\|x_{n_0}\| < h$ .

Если неравенство (8) справедливо для всех точек  $x_{n_0} \in R^k$ , то имеет место асимптотическая устойчивость в целом.

**Теорема 2.** Если нулевое решение однородной линейной РДС

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{9}$$

с постоянной матрицей  $A$  асимптотически устойчиво при  $n \rightarrow \infty$ , то эта РДС экспоненциально устойчива, т.е. каждое ее решение экспоненциально устойчиво при  $n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство:** Как известно [2] нулевое решение РДС (9) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы  $A$  по модулю меньше единицы, т.е.

$$|\lambda_\rho(A)| < 1 \quad (\rho = 1, 2, \dots, k).$$

Положим

$$\max_\rho |\lambda_\rho(A)| < e^{-\alpha} < 1,$$

где  $\alpha > 0$ .

Тогда при  $n \in Z^+$  получим

$$|A^n| \leq L e^{-\alpha n}, \tag{10}$$

где  $L$  - некоторая положительная постоянная. Из РДС (9) для любого решения  $x_n$  находим

$$x_n = A^{n-n_0} x_{n_0},$$

где начальный момент  $n_0$  произволен. Следовательно, на основании (10) при  $n_0 < n$  получаем

$$\|x_n\| \leq L \cdot \|x_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)}.$$

Отсюда для любого решения  $y_n$  РДС (9) учитывая, что разность  $x_n - y_n$  есть решение этой РДС при  $n_0 \leq n$  будем иметь

$$\|x_n - y_n\| \leq L \cdot \|x_{n_0} - y_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)}.$$

Что и требовалось доказать.

**Замечание.** Для нестационарной линейной РДС из асимптотической устойчивости ее нулевого решения вообще говоря не следует экспоненциальная устойчивость [3].

**Теорема 3.** Если существует положительно – определенная квадратичная форма

$$V(x_n) = x_n' A x_n \tag{11}$$

( $'$  - знак транспонированная) первой разности которой  $\Delta V_n$  в силу РДС (1) удовлетворяет неравенству

$$\Delta V_n \leq W(x_n), \tag{12}$$

$$(n_0 < n; \|x_n\| \leq h < H),$$

где

$$W(x_n) = x_n' B x_n \tag{13}$$

отрицательно определенная квадратичная форма ( $A$  и  $B$  - постоянные симметрические матрицы),

то нулевое решение РДС (1) экспоненциально устойчиво при  $n \rightarrow +\infty$ .

**Доказательство:** На основании формул (11) и (13) получаем:

$$a_1(x_n; x_n) \leq V_n \leq a_2(x_n; x_n)$$

и

$$b_1(x_n; x_n) \leq -W \leq b_2(x_n; x_n)$$

где

$$a_1 = \min_{\rho} \lambda_{\rho}(A), \quad a_2 = \max_{\rho} \lambda_{\rho}(A)$$

и соответственно

$$b_1 = \min_{\rho} \lambda_{\rho}(B), \quad b_2 = \max_{\rho} \lambda_{\rho}(B).$$

Причем  $0 < a_1 \leq a_2$  и  $0 < a_1 \leq a_2$ .

Отсюда на основании неравенства (12) выводим

$$\Delta V_n \leq -b_1(x_n; x_n) \leq -\frac{b_1}{a_2} V(x_n).$$

Суммируя это неравенство, будем иметь при  $n_0 < n$

$$V(x_n) \leq V(x_{n_0}) e^{-2\alpha(n-n_0)},$$

где  $n_0 \leq n$  - находим

$$\|x_n\|^2 \leq \frac{1}{a_1} V(x_n) \leq \frac{a_2}{a_1} \|x_{n_0}\|^2 e^{-2\alpha(n-n_0)},$$

т.е. при  $n_0 < n$

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{a_1} \|x_{n_0}\| e^{-\alpha(n-n_0)},$$

где  $S = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$  и  $\|x_{n_0}\|$  - достаточно мала.

#### Устойчивость по Лагранжу

**Определение 5.** РДС (1) называется устойчивой по Лагранжу, если

- 1) каждое решение  $x(n; n_0, x_{n_0})$ , где  $n_0 \in Z^+$  существует для всех  $n \in Z^+$ ;
- 2)  $\|x_{n_0}\|$  - ограничена на  $Z^+$ .

Используя функции Ляпунова, нетрудно сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости РДС (1) по Лагранжу.

**Теорема 4.** Для того, чтобы РДС (1) была устойчива по Лагранжу, необходимо и достаточно, чтобы в  $Z^+ \times R^k$  существовала функция  $V(n, x_n)$  такая что

- 1)  $V(n, x_n) \geq W(x_n)$  где  $\lim_{x_n \rightarrow \infty} W(x_n) = \infty$ ;
- 2) для каждого решения  $x_n$  функция была невозрастающей относительно  $n \in Z^+$ .

#### Доказательство.

*Достаточность:* Пусть для РДС (1) существует функция  $V(n, x_n)$  обладающая свойствами 1) и 2).

Для всякого решения РДС (1)

$$x(n; n_0, x_{n_0}) \quad (n_0 \in Z^+; \|x_{n_0}\| < \infty)$$

в силу условия 2) при  $n \geq n_0$  имеем

$$V(n, x_n) \leq V(n_0, x_{n_0}).$$

Отсюда на основании 1) получаем

$$W(x(n; n_0, x_{n_0})) \leq V(n; x(n; n_0, x_{n_0})) \leq V(n_0, x_{n_0}) \quad (14)$$

при  $n \geq n_0$ .

Из последнего неравенства следует, что решение  $x(n; n_0, x_{n_0})$  ограничено.

Действительно, если это не так, то нашлась бы последовательность моментов  $n_l \rightarrow \infty$  ( $l = 1, 2, \dots; n_l > n_0$ ) такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|x_{n_l}\| = \infty$$

и следовательно  $\lim_{l \rightarrow \infty} W(x_{n_l}) = \infty$ .

Это противоречило бы неравенству (14), что невозможно.

*Необходимость:* Пусть любое решение  $x_n = x(n; n_0, x_{n_0})$  РДС (1) существует и ограничено в  $Z^+$ .

Положим

$$V(n, x_n) = \sup_{v>0} \|x_{n+v}\| = \sup_{v>0} \|x(n+v; n, x_n)\|^2, \quad (15)$$

где

$$\|x_n\| < \infty, \quad n > n_0 \in Z^+,$$

из формулы (15) имеем

$$V_n \geq \|x(n+v; n, x_n)\|^2 = \|x_n\|^2 = W(x_n)$$

Причем, очевидно

$$\lim_{\|x_n\| \rightarrow \infty} W(x_n) = \infty$$

т.е. условие 1) выполнено.

Далее, при  $n_0 < n_1 < n_2$ , учитывая, что в силу свойства единственности решения  $x_n = x(n; n_2; x_{n_2})$  является продолжением решения  $x_n = (n; n_1; x_{n_1})$ , получаем

$$\begin{aligned} V(n; x_{n_1}) &= \sup_{v>0} \|x(n_1+v; n_1; x(n_1; n_0; x_{n_0}))\|^2 \geq \\ &\geq \sup_{v \geq 0} \|x(n_2+v; n_2; x(n_2; n_0; x_{n_0}))\|^2 = V(n_2; x(n_2; n_0; x_{n_0})). \end{aligned}$$

Таким образом, условия 2) так же выполнено. Т.е. теорема полностью доказана.

### РДС с конвергенцией

**Определение 5.** Будем говорить, что РДС (1) обладает свойством конвергенции, если:

1) все решения  $x(n_2; n_0; x_{n_0})$  определены при

$$\forall n \in Z_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, \dots, \infty\};$$

2) существует единственное решение  $r_n$  определенное и ограниченное на  $Z$  т.е.

$$\sup \|r_n\| < \infty;$$

3) решение  $r_n$  асимптотически устойчиво в целом при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. для любого  $x(n_2; n_0; x_{n_0})$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x(n; n_0; x_{n_0}) - r_n] = 0.$$

Можно сказать, что в некотором смысле  $r_n$  является предельным режимом [7] РДС (1).

Очевидно, если РДС (1) обладает свойством конвергенции, то все ее решения  $x(n_2; n_0; x_{n_0})$  предельно ограничены при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. существует положительное число  $R$  такое, что

$$\|x(n; n_0, x_{n_0})\| < R \text{ при } n \gg n_0$$

В частности, например, можно принять:

$$R = \sup_{n \in Z} \|r_n\| + 1$$

**Замечание.** Если правая часть  $X(n; x_n)$  конвергентной РДС (1)  $\bar{N}$ -периодична по  $n$  где ( $\bar{N} \in N$  - множества натуральных чисел), то ограниченное решение  $r_n$  также  $\bar{N}$ -периодична по  $n$ .

Действительно, пусть

$$X(n + \bar{N}; x_n) = X(n; x_n).$$

Рассмотрим вектор-функцию  $r(n + \bar{N})$  имеем  $r(n + \bar{N} + 1) = X(n + \bar{N}; x_{n + \bar{N}})$ . Таким образом,  $r(n + \bar{N})$  также является решением РДС (1) и притом ограниченным на  $Z$ . А так как РДС с конвергенцией обладает единственным ограниченным на  $Z$  решением то

$$r(n + \bar{N}) = r(n).$$

т.е.  $r_n$  есть  $\bar{N}$  периодическое решение РДС (1).

**Теорема 5.** Пусть  $x_{n+1} = Ax_n + f(n)$ , (16)

где  $A$ -постоянная  $k \times k$  матрица и  $(k \times 1)$  столбца  $f(n) \in C(Z_+)$ .

Если

1) все собственные числа  $\lambda_j(A)$ -матрицы  $A$  по модулю меньше единицы т.е.

$$|\lambda_j(A)| < 1; \quad j = \overline{1, k}; \quad (17)$$

2)  $\sup_{n \in Z} \|f(n)\| = \beta < \infty$ ,

то РДС (16) обладает свойством конвергенции, причем

$$r(n) = \sum_{j=-\infty}^n A^{n-j} f(j-1) \quad (18)$$

представляет собой единственное ограниченное на  $Z_+$  решение РДС (16).

**Доказательство.** Из условия (17) имеет

$$\|A^n\| \leq \gamma \cdot e^{-\alpha n}$$

при  $n \geq 0$ , где  $\gamma > 0$  и  $0 < \alpha < -\max_j \ln |\lambda_j|$ .

Отсюда  $\|r_n\| \leq \gamma \sum_{j=-\infty}^n e^{-\alpha(n-j)} \|f(j-1)\| \leq \beta \gamma e^{-\alpha n} \cdot \frac{e^{\alpha n}}{\alpha} = \frac{\beta \gamma}{\alpha} < \infty$

следовательно, сумма (18) сходится и функция  $r(n)$  ограничена, причем

$$\sup_{n \in Z} \|r_n\| \leq \frac{\lambda}{\alpha} \sup_{n \in Z} \|f(n)\|,$$

варьируя функцию (18) по  $n$ , получим

$$r(n+1) = f(n) + A \sum_{j=-\infty}^n A^{n-j} f(j-1) = f(n) + Ar(n)$$

и таким образом,  $r(n)$  является решением РДС (16).

То, что ограниченное решение РДС (16) единственное следует из того обстоятельства, что разность двух ограниченных решений неоднородной РДС (16) является ограниченным решением соответствующей однородной РДС

$$x_{n+1} = Ax_n,$$

не имеющей нетривиальные решения, ограниченных на  $Z_+$ .

Действительно, если  $r(n)$ -другое решение РДС (16), ограниченное на  $Z_+$ , то при любом  $n_0 \in Z$  имеем

$$r_1(n) - r(n) = A^{n-n_0} [r_1(n_0) - r(n_0)]$$

отсюда

$$\|r_1(n) - r(n)\| \leq \gamma e^{-\alpha(n-n_0)} \|r_1(n_0) - r(n_0)\| \quad (19)$$

Так как

$$\sup_{n_0 \in Z} \|r_1(n_0) - r(n_0)\| < \infty,$$

то фиксируя  $n$  и переходя при  $n_0 \rightarrow \infty$  в (19), получим

$$\|r_1(n) - r(n)\| \leq 0,$$

т.е.  $r_1(n) = r(n)$  и таким образом, других, кроме  $r_n$  ограниченных на  $Z_+$ , решение РДС (16) не имеет.

Если  $x_n$ -любое решение неоднородной РДС (16), то учитывая, что разность  $x_n - r(n)$  удовлетворяет однородной РДС получим

$$x_n - r(n) = A^{n-n_0} [x_{n_0} - r(n_0)].$$

Отсюда

$$\|x(n) - r(n)\| \leq \gamma e^{-\alpha(n-n_0)} \|x_{n_0} - r(n_0)\|,$$

при  $n \geq n_0$  и следовательно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x(n) - r(n)\| = 0.$$

Таким образом,  $r(n)$  устойчиво в целом при  $n \rightarrow \infty$  и значит РДС (16) конвергентна.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Барбашин Е.А., Красовский М.Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. Прикладная математика и механика, Т. 18, вып 3, 1954, с. 345-350.
- [2] Бапаев К.Б., Бапаева С.К. Об устойчивости линейных РДС. Материалы II міжнародної Науково-практичної конференції «Дні науки», 2006, Днепропетровск, С. 52-58.
- [3] Бромберг П.В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967, 324 с.
- [4] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959, 212 с.
- [5] Лефшец С., Ла-Силль И.С. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.
- [6] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949, 550 с.
- [7] Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний. М.: Наука, 1964, 367 с.
- [8] Zevinsan N. The asymptotic nature at solutions at linear systems at differential equations. Puke Wath Journ. 15(1948). p. 111-126.
- [9] ZiangZhang-chao. The bondedness at solutions at certain nonlinear differential equations. ChineseMath -3,2(1963). p. 169-183.
- [10] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967, 324 р.
- [11] Александров А.Ю., Жабко А.П. Устойчивости разностных систем. Санкт Петербург, 2003.
- [12] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1935, 371 с.
- [13] Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. Киев.: Наукова Думка, 1972.
- [14] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
- [15] Yoshizawa T. stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: Japan, 1966.
- [16] Wichel A.N., Wu S.H. Stability of discrete systems over finite integral time // Int. J. control. 1969. V. 9. P. 679-693.
- [17] Talpalaru P. Stability problems for difference equations // An. Sti. Univ. «Al. I. Cuza». Tasi. Mat. 2005. 51, № 2. P. 231-244.
- [18] Hahn W. Theory stability of motion / Berlin Heidelberg-New York: Springer Verlag. 1967.
- [19] Yoshizawa T. Stability theory by Lyapunov's second method. Tokio: Math.Soc. Japan, 1966.
- [20] Yoshizawa T. Stability theory and existence of periodic solutions almost periodic solutions. NewYork. Heidelberg. Berlin. 1975.

## REFERENCES

- [1] Barbashin E.A., Krasovsky M.N. On the existence of a Lyapunov function in the case of asymptotic stability in general. *Applied Mathematics and Mechanics*, 18, issue 3 (1954) p. 345-350.
- [2] Бапаев К.Б., Бапаева С.К. On the stability of linear RDS. Proceedings of III Int. Scientific-Practical Conference "Science Day". Dnipropetrovsk, 2006, pp. 52-58.
- [3] Bromberg P.V. Matrix methods in the theory of relay and impulse regulation. Moscow: Nauka, 1967, 324 p.
- [4] Krasovskiy N.N. Some problems of the theory of stability of motion. Moscow: Fizmatgiz, 1959, 212 p.
- [5] Lefschetz S., LaSalle I.S. Investigation of stability by the direct Lyapunov method. Moscow: Mir, 1964.
- [6] Nemytskiy V.V., Stepanov V.V. Qualitative theory of differential equations. Moscow: Gostekhizdat, 1949, 550.
- [7] Pliss V.A. Nonlocal problems of the theory of oscillations. Moscow: Nauka, 1964, 367.
- [8] Zevinan N. The asymptotic nature at solutions at linear systems at differential equations. *Puke Wath Journ.* 15(1948). p. 111-126.
- [9] ZiangZhang-chao. The bondedness at solutions at certain nonlinear differential equations. *Chinese Math* -3,2(1963). p. 169-183.
- [10] Demidovich B.P. Lectures on the mathematical theory of stability. Moscow: Nauka, 1967, 324 p.
- [11] Aleksandrov A.Yu., Zhabko A.P. Stability of difference systems. St. Petersburg, 2003.
- [12] Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. Moscow, 1935, 371 p.
- [13] Martynuk D.I. Lectures on the qualitative theory of difference equations. Kiev: Naukova Dumka, 1972.
- [14] Khalanay A., Wexler D. Qualitative theory of impulse systems. Moscow: Mir, 1971.
- [15] Yoshizawa T. stability theory by Liapunov's second method. Tokyo: Japan, 1966.
- [16] Wichel A.N., Wu S.H. Stability of discrete systems over finite integral time // *Int. J. control.* 1969. V. 9. P. 679-693.
- [17] Talpalaru P. Stability problems for difference equations // *An. Sti. Univ. «Al. I. Cuza». Tasi. Mat.* 2005. 51, № 2. P. 231-244.
- [18] Hahn W. Theory stability of motion / Berlin Heidelberg-New York: Springer Verlag. 1967.
- [19] Yoshizawa T. Stability theory by Lyapunov's second method. Tokio: Math.Soc. Japan, 1966.
- [20] Yoshizawa T. Stability theory and existence of periodic solutions almost periodic solutions. New York, Heidelberg, Berlin. 1975.

**К.Б. Бапаев, С.С. Слэмжанова**

Математика және математикалық моделдеу институты,  
И.Жансугурова атындағы Жетісу мемлекеттік университеті

### АЙЫРЫМДЫҚ-ДИНАМИКАЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

**Аннотация.** Уақытқа байланысты жүйелер эволюциясы фазалық кеңістіктегі олардың траекториясымен сипатталады. Ал траектория көп жағдайда үздіксіз болып бейнеленілітінімен оның бақыланылуы дискретті хабарларға негізделеді.

Екінші жағынан жүйелер эволюциясының дискреттік сипатталуы ол жүйелер эволюциясын зерттегенде оған цифрлық техникаларды қолдану қажеттілігі бизді тағыда дискретті информацияға алып келеді. Міне осылардың негізінде жүйеміз дискретті жүйе болып шығады. Оны айырымдық-динамикалық жүйе деп атайды. Айырымдық-динамикалық жүйелер эволюциясы рекурренттік қатынаста болады. Ол қатынастар рекурренттік теңдеулермен анықталады.

Сөйтіп айырымдық-динамикалық жүйелер есебін: не рекурренттік теңдеулер шешулерімен байланысты проблемалар немесе евклидтік немесе басқа кеңістіктердегі бейнелеу теорияларының проблемасы деп қарастыруға болады.

Сондықтанда сызқты емес айырымдық-динамикалық жүйелерді зерттеу үшін дәл сандай дифференциалдық теңдеулер теориясының немесе алгебралық теңдеулер теориясының әдістерінің баламаларын жасап пайдалануға тырысады.

Бұл жұмыста айырымдық-динамикалық жүйелердің шешулерін сапалы зерттеу үшін дифференциалдық теңдеулер жүйелеріне пайдаланылған орнықтылықтың әр-түрлі типтері енгізіледі және Ляпуновтың екінші әдісінің дискретті баламасы бойынша айырымдық-динамикалық жүйелер шешулерінің тұтас асимптотикалық, экспоненттік Лагранж мағынасындағы, орнықтылықтарымен конвергенттілік шарттары алынған.

**Тірек сөздер:** тұтас асимптотикалық орнықтылық, экспоненттік орнықтылық, Лагранж мағынасындағы орнықтылық, конвергенттілік.

МАЗМУНЫ

<i>Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.</i> Сызықты біртекті $D_e$ -жүйелерді жордандық канондық түрге келтіру.....	5
<i>Сайдуллаева Н.С., Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Каликулова А.О., Пазылова Д.Т.</i> Matlab бағдарламалар пакетін қолданып «Сыртқы күш әсер еткенде мәжбүрлі тербелістерді есептеу және визуализациялау» компьютерлік зертханалық жұмысты орындауды ұйымдастыру.....	13
<i>Сайдуллаева Н.С., Тагаев Н.С., Пазылова Д.Т., Каликулова А.О.</i> Влияние однократной перегрузки на развитие усталостной трещины.....	22
<i>Жантаев Ж.Ш., Виляев А.В., Серикбаева Э.Б.</i> Солтүстік Тянь-Шаньнің сейсмикалық тәртіп ерекшелігін бағалауда геотермиялық үлгілеуді қолдану.....	26
<i>Гордиенко Г.И., Яковец А.Ф., Литвинов Ю.Г.</i> Ионосфералақы F-аймақтың биіктігін бағалау әдістерін салыстыру.....	35
<i>Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Крюков С.В., Жумабаев Б.Т., Литвинов Ю.Г.</i> Электрондық концентрацияның ионосфераның F2-қабатының максималындағы күнделікті өзгеруі.....	44
<i>Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Жумабаев Б.Т., Литвинов Ю.Г., Абдрахманов Н.</i> Максимум F2-қабатының түнгі көбеюлерінің жұқа құрылымы.....	50
<i>Васильев И.В., Жұмбаев Б.Т.</i> Жердің электрлік өрісінің қалыптасуына гравитациялық күшінің әсері.....	55
<i>Козин И.Д., Федулina И.Н.</i> Радиофизика есептерін шешудегі вакуум – орта.....	60
<i>Козин И.Д., Федулina И.Н.</i> Радиотолқынның қабылдағыш антеннаға әсері.....	66
<i>Жантаев Ж.Ш., Стихарный А.П., Виляев А.В.</i> Жердің қазіргі заманғы қозғалысының GPS бақылауындағы уақыттық қатарларының кедергісін сүзу алгоритмі.....	71
<i>Батрышев Д.Ф., Ерланұлы Е., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т.</i> Бір қабырғалы көміртекті нанотүтікшелердің құрылымдық және электрондық қасиеттерін BECKE 3-PARAMETER LEE-YANG-PARR (B3LYP) гибрид функционалы негізінде зерттеу.....	75
<i>Серебрянский А. В., Усольцева Л. А., Комаров А. А., Рева И.В.</i> Атмосфералық экстинкцияның лездік мәндері және ауысуы коэффициенттері.....	84
<i>Бақтыбаев Қ., Бақтыбаев М.К., Наукенов Д.Д., Далелханкызы А.</i> Өзара әрекеттесуші бозондар моделінің микроскоптық негіздемесі және ядролық теориядағы жалпыланған квазиспиндік формализм.....	91
<i>Бапаев К.Б., Слэмжанова С.С.</i> Айырымдық-динамикалық жүйелердің орнықтылығы.....	101
<i>Иманбаева А.Б., Шалданбаев А.Ш., Копжасарова А.А.</i> Коэффициенттері тұрақты кәдімгі дифференциалдық теңдеулер системасының сингуляр әсерленген Коши есебін спектралдік әдіспен шешу.....	112
<i>Копжасарова А.А., Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б.</i> Ұқсастық әдісі бойынша, сингуляр әсерленген Кошидің есебін шешу.....	127
<i>Косов В.Н., Жакебаев Д.Б., Федоренко О.В.</i> Изотермиялық диффузия кезіндегі тік каналдардағы үшкомпонентті газдар қоспаларында пайда болатын конвективтік қозғалыстардың сандық талдауы.....	134
<i>Мырзақұл Ш.Р., Белисарова Ф.Б., Мырзақұл Т.Р., Мырзакулов К.Р.</i> Старобинский моделінің негізіндегі F-эссенция динамикасы .....	143
<i>Мамырбаев О.Ж., Мухсина Қ.Ж.</i> Мәтін үндесітілігін анықтауға арналған қолданыстағы жүйелерді талдау.....	149
<i>Омашова Г.Ш., Спабекова Р., Қабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Абдрахманова Х.К., Аширбаев Х.А.</i> Физикалық құбылыстарды компьютерлік моделдеуде MATLAB жүйесін қолдану.....	156



## СОДЕРЖАНИЕ

Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Приведение линейных однородных $D_e$ -систем к жордановому каноническому виду.....	5
Сайдуллаева Н.С., Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Каликулова А.О., Пазылова Д.Т. Организация выполнения компьютерной лабораторной работы «Расчет и визуализация вынужденных колебаний при наличии внешней силы» с применением пакета программ Matlab.....	13
Сайдуллаева Н.С., Тагаев Н.С., Пазылова Д.Т., Каликулова А.О. Влияние однократной перегрузки на развитие усталостной трещины.....	22
Жантаев Ж.Ш., Виляев А.В., Серикбаева Э.Б. Применение геотермического моделирования в оценке особенностей сейсмического режима Северного Тянь-Шаня.....	26
Гордиенко Г.И., Яковец А.Ф., Литвинов Ю.Г. Сравнение методов оценки высоты максимума F-области ионосферы.....	35
Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Крюков С.В., Жумабаев Б.Т., Литвинов Ю.Г. День ото дня вариации электронной концентрации в максимуме F2-слоя ионосферы.....	44
Яковец А.Ф., Гордиенко Г.И., Жумабаев Б.Т., Литвинов Ю.Г., Абдрахманов Н. Тонкая структура ночных увеличений в максимуме F2-слоя.....	50
Васильев И.В., Жумабаев Б.Т. Влияние гравитации на формирование электрического поля земли.....	55
Козин И.Д., Федулина И.Н. Вакуум – среда в решении задач радиофизики.....	60
Козин И.Д., Федулина И.Н. Воздействие радиоволны на приёмную антенну.....	66
Жантаев Ж.Ш., Стихарный А.П., Виляев А.В. Алгоритм фильтрации помех временных рядов GPS мониторинга современных движений земной поверхности .....	71
Батрышев Д.Г., Ерланулы Е., Рамазанов Т.С., Габдуллин М.Т. Исследование структурных и электронных свойств одностенных углеродных нанотрубок на основе гибридного функционала bescke 3-PARAMETER LEE-YANG-PARR (B3LYP).....	75
Серебрянский А. В., Усольцева Л. А., Комаров А. А., Рева И. В. Коэффициенты перехода и мгновенные значения атмосферной экстинкции.....	84
Бактыбаев К., Бактыбаев М.К., Наукенов Д.Д., Далелханкызы А. Микроскопическое обоснование модели взаимодействующих бозонов и обобщенный квазиспиновый формализм в теории ядра .....	91
Бапаев К.Б., Сламжанова С.С. Об устойчивости разностно – динамических систем.....	101
Иманбаева А.Б., Копжасарова А.А., Шалданбаев А.Ш. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.....	112
Копжасарова А.А., Шалданбаев А.Ш., Иманбаева А.Б. Решение сингулярно возмущенной задачи Коши методом подобия.....	127
Косов В.Н., Жакебаев Д.Б., Федоренко О.В. Численный анализ конвективных движений, возникающих при изотермической диффузии в вертикальных каналах в трехкомпонентных газовых смесях.....	134
Мырзакул Ш.Р., Белисарова Ф.Б., Мырзакул Т.Р., Мырзакулов К.Р. Динамика F-эссенции в рамках модели старобинского .....	143
Мамырбаев О.Ж., Мухсина Қ.Ж. Анализ существующих систем для определения тональности текста.....	149
Омашова Г.Ш., Спабекова Р., Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Абдрахманова Х.К., Аширбаев Х.А. Использование системы MATLAB при компьютерном моделировании физических процессов.....	156

CONTENTS

<i>Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.</i> Reduction of linear homogeneous $D_e$ -systems to the jordan canonical form.....	5
<i>Saidullayeva N.S., Kabyzbekov K.A., Ashirbaev Kh.A., Kalikulova A.O., Pazylova D.T.</i> Organization of computer lab work "Calculation and visualization of forced oscillations in the presence of an external force" with the use of the software package Matlab.....	13
<i>Saidullayeva N.S., Tagaev N.S., Pazylova D.T., Kalikulova A.O.</i> Effect of single overload on the development of a fatigue crack.....	22
<i>Zhantaev Zh.Sh., Vilyayev A.V., Serikbaeva E.B.</i> The application of geothermal modeling in the assessment of the features of the seismic regime of the Northern Tien Shan.....	26
<i>Gordienko G.I., Yakovets A.F., Litvinov Yu.G.</i> Comparison of the methods for estimating the hight of the maximum of th $F$ region of the ionosphere.....	35
<i>Yakovets A.F., Gordienko G.I., Kryukov S.V., Zhumabayev B.T., Litvinov Yu.G.</i> Day-to-day variability of electron concentration n the ionospheric $F2$ layer maximum.....	44
<i>Yakovets A.F., Gordienko G.I., Zhumabayev B.T., Litvinov Yu.G., Abdrakhmanov N.</i> Fine structure of nighttime enhancements of the electron concentration in the $F2$ layer maximum .....	50
<i>Vassilyev I.V., Zhumabayev B.T.</i> Influence of gravitation on formation of the electric field of the earth.....	55
<i>Kozin I.D., Fedulina I.N.</i> Vacuum - environment in the decision of radio physics problems.....	60
<i>Kozin I.D., Fedulina I.N.</i> Radio-wave action on the receiving antenna.....	66
<i>Zhantaev Zh.Sh., Stikharny A.P., Vilyayev A.V.</i> The algorithm for filtering the errors of time series GPS monitoring of factual movements of the earth's surface.....	71
<i>Batryshev D.G., Yerlanuly Ye., Ramazanov T.S., Gabdullin M.T.</i> Investigation of structural and electronic properties of single-walled carbon nanotubes on the basis of a hybrid functional becke 3-parameter LEE-YANG-PARR (B3LYP).....	75
<i>Serebryanskiy A., Usoltseva L., Komarov A., Reva I.</i> The trasformation coefficients and instantaneous values of atmospheric extinction.....	84
<i>Baktybaev K., Baktybaev M.K., Naukenov D.D., Dalelkhankyzy A.</i> Microscopic justification of the model of interacting bosons and a generalizedquasispin formalism in the theory of the nuclei.....	91
<i>Bapayev K.B., Slamzhanova S.S.</i> On stability of difference-dynamical systems .....	101
<i>Imanbayeva A.B., Shaldanbayev A.Sh., Kopzhasarova A.A.</i> Asymptotic decomposition the decision is singular the indignant task of Cauchy for the system of the ordinary differential equations with constant coefficients.....	112
<i>Kopzhasarova A.A., Shaldanbayev A.Sh., Imanbayeva A.B.</i> The decision is singular the indignant task of Cauchy by a similarity method.....	127
<i>Kossov V.N., Zhakebaev D.B., Fedorenko O.V.</i> Numerical analysis of convective motions occurring under isothermal Diffusion in the vertical channels in ternary gaseous mixtures.....	134
<i>Myrzakul S.R., Belisarova F.B., Myrzakul T.R., Myrzakulov K.R.</i> Dynamics of F-essence in frame of the starobinsky model.....	143
<i>Mamyrbayev O.Zh., Muhsina K.Zh.</i> Analysis of existing systems for determination of tonnity of text.....	149
<i>Omashova G. Sh., Spabekova R., Kabyzbekov K. A., Saidahmetov P. A., Abdrakhmanova H. K., Ashirbaev H. A.</i> The use of the system MATLAB in the compyter simulation of physical processes.....	156

---

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы *М. С. Ахметова, Д.С. Аленов, Т.А. Апендиев*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 25.09.2017.  
Формат 60x88<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
11 п.л. Тираж 300. Заказ 5.

---

*Национальная академия наук РК*  
*050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19*