

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

1 (317)

**ҚАҢТАР – АҚПАН 2018 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2018 г.
JANUARY – FEBRUARY 2018**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

NAS RK is pleased to announce that News of NAS RK. Series of physico-mathematical scientific journal has been accepted for indexing in the Emerging Sources Citation Index, a new edition of Web of Science. Content in this index is under consideration by Clarivate Analytics to be accepted in the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index, and the Arts & Humanities Citation Index. The quality and depth of content Web of Science offers to researchers, authors, publishers, and institutions sets it apart from other research databases. The inclusion of News of NAS RK. Series of physico-mathematical in the Emerging Sources Citation Index demonstrates our dedication to providing the most relevant and influential content of physics and mathematics to our community.

Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясы "ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы" ғылыми журналының Web of Science-тің жаңаланған нұсқасы Emerging Sources Citation Index-те индекстелуге қабылданғанын хабарлайды. Бұл индекстелу барысында Clarivate Analytics компаниясы журналды одан әрі the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index және the Arts & Humanities Citation Index-ке қабылдау мәселесін қарастыруда. Web of Science зерттеушілер, авторлар, баспашылар мен мекемелерге контент тереңдігі мен сапасын ұсынады. ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы Emerging Sources Citation Index-ке енуі біздің қоғамдастық үшін ең өзекті және беделді физика-математика бойынша контентке адалдығымызды білдіреді.

НАН РК сообщает, что научный журнал «Известия НАН РК. Серия физико-математическая» был принят для индексирования в Emerging Sources Citation Index, обновленной версии Web of Science. Содержание в этом индексировании находится в стадии рассмотрения компанией Clarivate Analytics для дальнейшего принятия журнала в the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index и the Arts & Humanities Citation Index. Web of Science предлагает качество и глубину контента для исследователей, авторов, издателей и учреждений. Включение Известия НАН РК. Серия физико-математическая в Emerging Sources Citation Index демонстрирует нашу приверженность к наиболее актуальному и влиятельному контенту по физике и математике для нашего сообщества.

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошқаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2018

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

Джумадильдаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. чл.-корр. (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2018

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f

doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d :

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. corr. member. (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskiy I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2018

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 94 – 97

УДК 510.54

Б.С. Калмурзаев¹, Н.А. Баженов²

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.

birzhan.kalmurzayev@gmail.com, bazhenov@math.nsc.ru

О ВЛОЖИМОСТИ -СТЕПЕНЕЙ В ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию отношений эквивалентности в иерархии Ершова. Отношение эквивалентности R на ω вычислимо сводится к отношению эквивалентности S , если существует вычислимая функция $f(x)$, такая что, для любых x и y условия xRy и $f(x)Sf(y)$ эквивалентны. В данной работе строятся изоморфные вложения полурешёток -степеней в частичные порядки отношений эквивалентности в иерархии Ершова относительно вычислимой сводимости.

Ключевые слова. Отношения эквивалентности, вычислимая сводимость, иерархия Ершова, вычислимо перечислимые множества, полурешетка вычислимо перечислимых m -степеней.

Множество A m -сводится к множеству B (символически, $A \leq_m B$), если существует вычислимая функция f такая, что для любого $x \in \omega$ условия $x \in A$ и $f(x) \in B$ эквивалентны. Здесь функцию f называют сводящей функцией. Говорят, что множество A 1 -сводится к множеству B (символически, $A \leq_1 B$), если $A \leq_m B$ и сводящая функция является взаимно-однозначной. $A \equiv_m B$ обозначает, что $A \leq_m B$ и $B \leq_m A$. m -степень множества A обозначается через $d(A)$, то есть $d(A) = \{B: A \equiv_m B\}$. На множестве -степеней естественный порядок будем обозначать так же \leq_m :

$$d(A) \leq_m d(B) \Leftrightarrow A \leq_m B.$$

Частично упорядоченное множество $L_m^0 = (\{d(X): X - \text{рекурсивно перечислимое множество и } X \neq \emptyset, \omega\}, \leq_m)$ является верхней полурешеткой и идеалом верхней полурешетки всех -степеней. Операция взятия верхней грани в L_m^0 индексируется прямой суммой множеств:

$$A \oplus B \Leftrightarrow \{2x: x \in A\} \cup \{2x + 1: x \in B\}.$$

Хорошо известно, что L_m^0 имеет наибольший и наименьший элементы. Все определения и необходимые сведения по m -сводимости можно найти в книгах [1, 2].

Определение ([6]). Говорят, что множество A принадлежит классу Σ_n^{-1} иерархии Ершова, если существуют вычислимые функции $f(x, t)$ и $h(x, t)$ такие, что для всех $x, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

- (1) $A(x) = \lim_s f(x, s)$, причем $f(x, 0) = 0$;
- (2) $h(x, 0) = n$ & $h(x, t + 1) \leq h(x, t)$;
- (3) $f(x, t + 1) \neq f(x, t) \Rightarrow h(x, t + 1) < h(x, t)$.

Пару функций $\langle f, h \rangle$, удовлетворяющих условиям определения, назовем Σ_n^{-1} -аппроксимацией множества A . Говорят, что множество A принадлежит классу Π_n^{-1} иерархии Ершова, если дополнение множества A принадлежит классу Σ_n^{-1} . Множества из класса Σ_n^{-1} (Π_n^{-1}) также называют Σ_n^{-1} -множествами (Π_n^{-1} -множествами). Σ_1^{-1} -множества известны как вычислимо перечислимые множества. Более подробно с результатами про эти множества можно ознакомиться в работах [3, 4, 5, 6].

Классы Σ_n^{-1} и Π_n^{-1} являются замкнутыми вниз по m -сводимости, известно [3], что эти классы имеют универсальные множества. Кроме того, частично упорядоченные множества (Σ_n^{-1}, \leq_m) и (Π_n^{-1}, \leq_m) являются верхними полурешетками.

Предложение 1. Множество $A \in \Sigma_n^{-1}$ тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция $h(x, t)$ такая, что для всех $x, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

- (1) $A(x) = \text{rest}(\lim_s h(x, s), 2)$;
- (2) $h(x, 0) = 0 \ \& \ h(x, t) \leq h(x, t + 1) \ \& \ h(x, t) \leq n$;

Предложение 2. Множество $A \in \Pi_n^{-1}$ тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция $h(x, t)$ такая, что для всех $x, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

- (1) $A(x) = \overline{\text{sg}}(\text{rest}(\lim_s h(x, s), 2))$;
- (2) $h(x, 0) = 0 \ \& \ h(x, t) \leq h(x, t + 1) \ \& \ h(x, t) \leq n$;

Считаем, что все рассматриваемые множества и отношения эквивалентности заданы на ω . Для ненулевого $n \in \omega$ через Id_n обозначается вычислимое отношение эквивалентности, заданное по правилу: $x \text{Id}_n y$ в том и только том случае, когда x и y эквивалентны по модулю n . Через Id обозначим тождественное отношение эквивалентности. Для отношения эквивалентности E и $a \in \omega$ через $[a]_E$ обозначается класс эквивалентности элемента a .

Определение. Отношение эквивалентности E на ω называется Σ_n^{-1} -отношением эквивалентности (Π_n^{-1} -отношением эквивалентности) если множество E является Σ_n^{-1} -множеством (Π_n^{-1} -множеством).

Говорят, что отношение эквивалентности R *вычислимо сводится* к отношению эквивалентности Q (символически, $R \leq_c Q$), если существует вычислимая функция f , для которой $(x, y) \in R$ тогда и только тогда, когда $(f(x), f(y)) \in Q$ при любых $x, y \in \omega$, т.е. существует алгоритм, который транслирует разные классы R -эквивалентности в разные классы Q -эквивалентности. Отношения эквивалентности R и Q называются эквивалентными, если они сводятся друг к другу. Совокупность всех отношений эквивалентности, эквивалентных R , называется степенью отношения эквивалентности R .

Очевидно, что отношение эквивалентности $E \leq_c \text{Id}$ тогда и только тогда, когда $E \equiv_c \text{Id}_n$ для некоторого $n \in \omega$.

Определение (А. Сорби и У.Эндрюс). Отношение эквивалентности E называется *тёмным* (*dark*), если E несравнимо с тождественным отношением эквивалентности относительно сводимости \leq_c .

Для произвольного в.п. множества A пусть $R_A = \{(x, y) : x = y \vee \{x, y\} \subseteq A\}$.

Предложение ([11]). Пусть A, B – непустые в.п. множества.

- 1) R_A – вычислимо тогда и только тогда, когда A – вычислимо.
- 2) Из $A \leq_1 B$ следует $R_A \leq_c R_B$.
- 3) Если $R_A \leq_c R_B$, тогда $A \leq_m B$.

Из этого предложения следует, что в.п. 1-степени можно изоморфно вложить в структуру в.п. отношений эквивалентности. Хорошо известно, что в.п. 1-степени не являются полурешеткой. Следовательно, структуры отношений эквивалентности с вычислимой сводимостью также не являются полурешетками.

В данной работе мы исследуем вложение полурешеток n -степеней в структуры эквивалентностей в иерархии Ершова. О вложениях полурешетки в.п. n -степеней в полурешетки Роджерса можно найти в работах [7, 8, 9, 10]. О вложении в.п. 1-степеней в структуры отношений эквивалентности можно посмотреть в [11, 12].

Вложение полурешеток n -степеней в структуры отношений эквивалентности иерархии Ершова.

Теорема 1. Для любого $n > 0$ полурешетка (Σ_n^{-1}, \leq_m) изоморфно вложима в структуру $(\Pi_{2n}^{-1}$ -отношения эквивалентности, \leq_c).

Доказательство. Рассмотрим следующий оператор: для произвольного множества X положим

$$T(X) = \{(x, y) : \{x, y\} \subseteq X \vee \{x, y\} \subseteq \overline{X}\}$$

Очевидно, что для любого множества X множество $T(X)$ является отношением эквивалентности. Докажем, что отображение $X \rightarrow T(X)$ индуцирует изоморфное вложение верхней полурешетки (Σ_n^{-1}, \leq_m) в структуру $(\Pi_{2n}^{-1}$ -отношения эквивалентности, \leq_c). А также докажем, что наша оценка для уровня иерархии Ершова неупрощаема. Для этого докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если $X \in \Sigma_n^{-1}$, тогда $T(X) \in \Pi_{2n}^{-1}$.

Доказательство леммы 1. Пусть пара функций $\langle f_X, h_X \rangle$ – Σ_n^{-1} -аппроксимация множества X . Построим аппроксимацию множества $T(X)$: для любых $x, y \in \omega$ определим

$$\begin{aligned} f((x, y), t) &= |f_X(x, t) + f_X(y, t) - 1|; \\ h((x, y), t) &= h_X(x, t) + h_X(y, t). \end{aligned}$$

Докажем, что пара функций $\langle f, h \rangle$ является Π_{2n}^{-1} -аппроксимацией множества $T(X)$.

1) $f((x, y), 0) = |f_X(x, 0) + f_X(y, 0) - 1| = 1$. И

$$\lim_s f((x, y), s) = |\lim_s f_X(x, s) + \lim_s f_X(y, s) - 1| = |X(x) + X(y) - 1|.$$

Из последнего равенства ясно, что $T(X)(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $X(x) = X(y)$. Значит, $T(X)(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $\lim_s f((x, y), s) = 1$.

2) $h((x, y), 0) = h_X(x, 0) + h_X(y, 0) = n + n = 2n$. И $h((x, y), t + 1) = h_X(x, t + 1) + h_X(y, t + 1) \leq h_X(x, t) + h_X(y, t) = h(x, y)$.

3) Пусть $f((x, y), t + 1) \neq f((x, y), t)$. Значит $f_X(x, t + 1) \neq f_X(x, t)$ или $f_X(y, t + 1) \neq f_X(y, t)$. Следовательно, $h_X(x, t + 1) < h_X(x, t)$ или $h_X(y, t + 1) < h_X(y, t)$. А это, в свою очередь означает, что $h((x, y), t + 1) = h_X(x, t + 1) + h_X(y, t + 1) < h_X(x, t) + h_X(y, t) = h((x, y), t)$.

Следовательно, пара функций $\langle f, h \rangle$ является Π_{2n}^{-1} -аппроксимацией множества $T(X)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $F \leq_c T(X)$ для некоторого Σ_n^{-1} -множества X , то $F \equiv_c T(Y)$ для некоторого Σ_n^{-1} -множества Y .

Доказательство леммы 2. Пусть произвольное отношение эквивалентности $F \leq_c T(X)$ посредством функции f . Отношение эквивалентности $T(X)$ состоит из не более двух классов эквивалентности. Значит, отношение эквивалентности F также состоит из не более двух классов. Следовательно, если $Y = f^{-1}(X)$, то $F = T(Y)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. $X \leq_m Y$ тогда и только тогда, когда $T(X) \leq_c T(Y)$.

Доказательство леммы 3. Обе сводимости можем осуществить одной и той же функцией. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для любого Π_{2n}^{-1} -множества A существует Σ_n^{-1} множество B такое, что $A \leq_m T(B)$.

Доказательство леммы 4. Пусть пара функций $\langle f_A, h_A \rangle$ – Π_{2n}^{-1} -аппроксимация множества A . Кроме того, пусть h_A – это функция из предложения 2. Построим Σ_n^{-1} -аппроксимацию множества B следующим образом:

$$\begin{aligned} f_B(2x, t) &= \begin{cases} 1, \text{rest}(h_A(x, t), 4) = 2; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} \\ f_B(2x + 1, t) &= \begin{cases} 0, \text{rest}(h_A(x, t), 4) = 0; \\ 1, \text{ в противном случае.} \end{cases} \\ \begin{cases} h_B(x, 0) = n; \\ h_B(x, t + 1) = h_B(x, t) - |f_B(x, t + 1) - f_B(x, t)|. \end{cases} \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что пара функций $\langle f_B, h_B \rangle$ является Σ_n^{-1} -аппроксимацией множества B . Далее, нетрудно проверить, что $A \leq_m T(B)$ посредством функции $f(x) = (2x, 2x + 1)$. Лемма 4 доказана.

Следствие 1. Если X – m -полное Σ_n^{-1} -множество, то $T(X)$ – m -полное Π_{2n}^{-1} -множество.

Доказательство. Пусть X – m -полное Σ_n^{-1} -множество. Докажем, что для любого Π_{2n}^{-1} -множества A справедливо $A \leq_m T(X)$. Из доказательства теоремы ясно, что найдется Σ_n^{-1} -множество Y такое, что $A \leq_m T(Y)$. И очевидно, что $T(Y) \leq_c T(X)$. Пусть $T(Y) \leq_c T(X)$ посредством функции f , тогда $T(Y) \leq_m T(X)$ посредством функции

$$h((x, y)) = (f(x), f(y)).$$

В силу транзитивности -сводимости справедливо $A \leq_m T(X)$.

Следствие 2. Для любого невычислимого множества X отношение эквивалентности $T(X)$ является тёмным.

Следствие 3. Полурешетка вычислимо перечислимых n -степеней изоморфно вложима в структуру $(\Pi_2^{-1}$ -отношения эквивалентности, \leq_c).

Следствия 2,3 очевидны.

Вопрос. Можно ли изоморфно вложить полурешетку в.п. -степеней в структуру в.п. отношений эквивалентности?

Исследования Н.А. Баженова выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60058 мол_a_дк.

Исследования Б.С. Калмурзаева выполнены при финансовой поддержке Комитета науки Республики Казахстан, грант ГФ4/3952. «Отношения эквивалентности, предупорядоченные структуры и алгоритмические сводимости на них, как математическая модель баз данных»

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Издательство «МИР» Москва, 1972 г., 624 с.
- [2] Мальцев А.И., Алгоритмы и рекурсивные функции. Издательство «Наука» Москва, 1965 г., 367 с.
- [3] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств I, Алгебра и логика, том 7, № 1, 1968 г., с.: 47-74.
- [4] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств II, Алгебра и логика, том 7, № 4, 1968 г., с.: 15-47.
- [5] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств III, Алгебра и логика, том 9, № 1, 1970 г., с.: 34-51.
- [6] Арсланов М.М., Иерархия Ершова. Казанский государственный университет, 2007 г., 89 с.
- [7] Badaev S.A., TalasbaevaZh.T., Computable numberings in the hierarchy of Ershov, in: S.S. Goncharov (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proc. 9th Asian logic conf. (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005), NJ, World Scientific, 2006, 17-30.
- [8] Badaev S.A., Manat M., Sorbi A., Rogers semilattices of families of two embedded sets in the Ershov hierarchy, Mathematical logic quarterly. Vol. 58, No 4-5, 2012, 366-376.
- [9] Калмурзаев Б.С. О вложимости полурешётки L_m^0 в полурешётки Роджерса, Алгебра и логика, том. 55, №3, 2016, с.: 328-340.
- [10] Ершов Ю.Л., Теория нумераций, М., Наука, 1977.
- [11] Su Gao, Peter Gerdes, Computably enumerable equivalence relations, StudiaLogica, 67, 2001, 27-59.
- [12] Andrews U., Lempp S., Miller J.S., Ng K.M., San Mauro L., Sorbi A., Universal computably enumerable equivalence relations, Journal of Symbolic Logic, vol. 79, no. 1, 2014, 60-88.

Б.С. Калмурзаев¹, Н.А. Баженов²

¹аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;

²РФА СБ С.Л. Соболев автындағы математика институты, Новосибирск, Ресей.

ЕРШОВ ИЕРАРХИЯСЫНДА m -ДЕНГЕЙЛЕРДІҢ ЭКВИВАЛЕНТТІК ҚАТЫНАСТАРҒА ЕНГІЗУЛЕРІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл мақала Ершов иерархиясындағы эквиваленттік қатынастарды зерттеуге бағышталған. ω жиынында анықталған R эквиваленттік қатынасы S эквиваленттік қатынасына есептелімді көшіріледі деп атаймыз, егер кез келген x және y элементтері үшін xRy және $f(x)Sf(y)$ шарттары эквивалент болатындай $f(x)$ есептелімді функциясы табылатын болса. Бұл мақалада Ершов иерархиясындағы m -денгейлерді есептелімді көшірулерге байланысты эквиваленттік қатынастардың жартлай ретіне изоморфты енгізулері құрылады.

Кілт сөздер. Эквиваленттік қатынастар, есептелімді көшірулер, Ершов иерархиясы, рекурсив саналымды жиындар, рекурсив саналымды m -денгейлердің жатрыторы.

B.S. Kalmurzayev¹, N.A. Bazhenov²

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;

²Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia.

EMBEDDABILITY OF m -DEGREES INTO EQUIVALENCE RELATIONS IN THE ERSHOV HIERARCHY

Abstract. The paper is devoted to the study of equivalence relations in the hierarchy of Ershov. An equivalence relation R on ω is computably reducible to an equivalence relation S if there exists a computable function $f(x)$ such that for any x and y , the conditions xRy and $f(x)Sf(y)$ are equivalent. In this paper we construct isomorphic embeddings of semilattices of m -degrees into partial orders of equivalence relations in the hierarchy of Ershov with respect to computable reducibility.

Key words. Equivalence relations, computable reducibility, hierarchy of Ershov, computably enumerable sets, semilattice of computably enumerable m -degrees.

МАЗМУНЫ

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусов А.А., Симонова О.В.</i> Математикалық ұғымдардың және әдістемелік жұмыстардың пайда болу кезеңдерінің мән-мағынасының көрнекі моделду (ағылшын тілінде).....	6
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> Ершов иерархиясында t -деңгейлердің эквиваленттік қатынастарға енгізулері туралы (ағылшын тілінде).....	14
<i>Байжанов С.С., Құлтешов Б.Ш.</i> Бинарлы предикаттармен есептік-категориялық босаң O -минималдық теориялар байыту туралы (ағылшын тілінде).....	18
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Асқарова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Қудайкулов А.К., Ташев А.А.</i> Ұзындығы шектеулі тұрақты термомеханикалық күйдің бір мезгілде шектік температураның және бүйірлік жылу алмасу әсері есебін талдамалық шешу (ағылшын тілінде).....	25
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> Коэффициенттері айнымалы түрі арнайы толқын теңдеуінің Гурсалық есебінің периодты шешімі туралы (ағылшын тілінде).....	34
<i>Байдуллаев С., Байдуллаев С. С.</i> Магнитотеллурлық зондылау әдісінің жағдайын талдау (ағылшын тілінде).....	51
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> Сызықсыз Гуктың заңы біртектес емес және анизотроптық денелердің серпілімдік теориясында (ағылшын тілінде).....	63
<i>Юнусов А.А., Дасибеков А., Корганбаев Б.Н., Юнусова А.А., Абдиева З.А., Коспанбеова Н.</i> Терендік бойынша айнымалы деформация модульді грунттер консолидациясының көпөлшемді есептері (ағылшын тілінде).....	75

* * *

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусов А.А., Симонова О.В.</i> Математикалық ұғымдардың және әдістемелік жұмыстардың пайда болу кезеңдерінің мән-мағынасының көрнекі моделду (ағылшын тілінде).....	87
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> Ершов иерархиясында t -деңгейлердің эквиваленттік қатынастарға енгізулері туралы (орыс тілінде).....	94
<i>Байжанов С.С., Құлтешов Б.Ш.</i> Бинарлы предикаттармен есептік-категориялық босаң O -минималдық теориялар байыту туралы (орыс тілінде).....	98
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Асқарова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Қудайкулов А.К., Ташев А.А.</i> Ұзындығы шектеулі тұрақты термомеханикалық күйдің бір мезгілде шектік температураның және бүйірлік жылу алмасу әсері есебін талдамалық шешу (орыс тілінде).....	106
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> Коэффициенттері айнымалы түрі арнайы толқын теңдеуінің Гурсалық есебінің периодты шешімі туралы (орыс тілінде).....	114
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> Сызықсыз Гуктың заңы біртектес емес және анизотроптық денелердің серпілімдік теориясында (орыс тілінде).....	130

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А., Симонова О.В.</i> Наглядное моделирование этапов проявления сущности математических понятий и методических процедур (на английском языке).....	6
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> О Вложимости - степеней в отношении эквивалентности в иерархии Ершова (на английском языке).....	14
<i>Байжанов С.С., Кулешов Б.Ш.</i> Об обогащении счетно-категоричных слабо О-минимальных теорий бинарными предикатами (на английском языке).....	18
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Аскарлова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Кудайкулов А.К., Ташев А.А.</i> Аналитическое решение задачи о установившемся термомеханическом состоянии стержня ограниченной длины при одновременном наличии концевых температур и боковых теплообмена (на английском языке).....	25
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> О периодическом решении задачи Гурса для волнового уравнения специального вида с переменными коэффициентами (на английском языке).....	34
<i>Байдуллаев С., Байдуллаев С. С.</i> Анализ состояния метода магнитотеллурического зондирования (на английском языке).....	51
<i>Джакупов К.Б.</i> Нелинейный закон Гука в теории упругости неоднородных и анизотропных тел (на английском языке).....	63
<i>Юнусов А.А., Дасибеков А., Корганбаев Б.Н., Юнусова А.А., Абдиева З.А., Коспанбеова Н.</i> Многомерные задачи консолидации грунтов с переменным по глубине модулем деформации (на английском языке).....	75

* * *

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А., Симонова О.В.</i> Наглядное моделирование этапов проявления сущности математических понятий и методических процедур (на русском языке).....	87
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> О Вложимости - степеней в отношении эквивалентности в иерархии Ершова (на русском языке).....	94
<i>Байжанов С.С., Кулешов Б.Ш.</i> Об обогащении счетно-категоричных слабо О-минимальных теорий бинарными предикатами (на русском языке).....	98
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Аскарлова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Кудайкулов А.К., Ташев А.А.</i> Аналитическое решение задачи о установившемся термомеханическом состоянии стержня ограниченной длины при одновременном наличии концевых температур и боковых теплообмена (на русском языке).....	106
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> О периодическом решении задачи Гурса для волнового уравнения специального вида с переменными коэффициентами (на русском языке).....	114
<i>Джакупов К.Б.</i> Нелинейный закон Гука в теории упругости неоднородных и анизотропных тел (на русском языке).....	130

CONTENTS

<i>Smirnov E.I., Zhokhov A.L., Yunusov A.A., Yunusov A.A., Simonova O.B.</i> Visual modeling of the manifestation of the essence of mathematical concepts and methodological procedures (in English).....	6
<i>Kalmurzayev B.S., Bazhenov N.A.</i> Embeddability of m -degrees into equivalence relations in the Ershov hierarchy (in English).....	14
<i>Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh.</i> On expanding countably categorical weakly ω -minimal theories by binary predicates (in English).....	18
<i>Zhumakhanova A.S., Nogaybaeva M.O., Askarova A., Arshidinova M.T., Begaliyeva K.B., Kudaykulov A.K., Tashev A.A.</i> An analytical solution to the problem of the thermomechanical state of a rod of limited length with simultaneous presence of end temperatures and lateral heat exchange (in English).....	25
<i>Akylbayev M.I., Beysebayeva A., Shaldanbayev A. Sh.</i> On the periodic solution of the Goursat problem for a wave equation of a special form with variable coefficients (in English).....	34
<i>Baydullaev S., Baydullaev S. S.</i> Analysis of magnetotelluric sounding (in English).....	51
<i>Jakupov K.B.</i> Nonlinear Hooke law in the theory of elasticity of inhomogeneous and anisotropic bodies (in English).....	63
<i>Yunusov A.A., Dasibekov A., Korganbaev B.N., Yunusova A.A., Abdieva Z.A., Kospanbetova N.A.</i> Multidimensional problems of soils' consolidation with modulus of deformation, variable in its depth (in English)	75

* * *

<i>Smirnov E.I., Zhokhov A.L., Yunusov A.A., Yunusov A.A., Simonova O.B.</i> Visual modeling of the manifestation of the essence of mathematical concepts and methodological procedures (in Russian).....	87
<i>Kalmurzayev B.S., Bazhenov N.A.</i> Embeddability of m -degrees into equivalence relations in the Ershov hierarchy (in Russian).....	94
<i>Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh.</i> On expanding countably categorical weakly ω -minimal theories by binary predicates (in Russian).....	98
<i>Zhumakhanova A.S., Nogaybaeva M.O., Askarova A., Arshidinova M.T., Begaliyeva K.B., Kudaykulov A.K., Tashev A.A.</i> An analytical solution to the problem of the thermomechanical state of a rod of limited length with simultaneous presence of end temperatures and lateral heat exchange (in Russian)	106
<i>Akylbayev M.I., Beysebayeva A., Shaldanbayev A. Sh.</i> On the periodic solution of the Goursat problem for a wave equation of a special form with variable coefficients (in Russian).....	114
<i>Jakupov K.B.</i> Nonlinear Hooke law in the theory of elasticity of inhomogeneous and anisotropic bodies (in Russian).....	130

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Т. А. Апендиев, Д. С. Аленов*
Верстка на компьютере *А. М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 15.02.2018.
Формат 60x88¹/₈. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
9 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19