ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**

♦

**СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**

♦

**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

1 (317)

**ҚАҢТАР – АҚПАН 2018 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2018 г.
JANUARY – FEBRUARY 2018**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

NAS RK is pleased to announce that News of NAS RK. Series of physico-mathematical scientific journal has been accepted for indexing in the Emerging Sources Citation Index, a new edition of Web of Science. Content in this index is under consideration by Clarivate Analytics to be accepted in the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index, and the Arts & Humanities Citation Index. The quality and depth of content Web of Science offers to researchers, authors, publishers, and institutions sets it apart from other research databases. The inclusion of News of NAS RK. Series of physico-mathematical in the Emerging Sources Citation Index demonstrates our dedication to providing the most relevant and influential content of physics and mathematics to our community.

Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясы "ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы" ғылыми журналының Web of Science-тің жаңаланған нұсқасы Emerging Sources Citation Index-те индекстелуге қабылданғанын хабарлайды. Бұл индекстелу барысында Clarivate Analytics компаниясы журналды одан әрі the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index және the Arts & Humanities Citation Index-ке қабылдау мәселесін қарастыруда. Webof Science зерттеушілер, авторлар, баспашылар мен мекемелерге контент тереңдігі мен сапасын ұсынады. ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы Emerging Sources Citation Index-ке енуі біздің қоғамдастық үшін ең өзекті және беделді физика-математика бойынша контентке адалдығымызды білдіреді.

НАН РК сообщает, что научный журнал «Известия НАН РК. Серия физико-математическая» был принят для индексирования в Emerging Sources Citation Index, обновленной версии Web of Science. Содержание в этом индексировании находится в стадии рассмотрения компанией Clarivate Analytics для дальнейшего принятия журнала в the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index и the Arts & Humanities Citation Index. Web of Science предлагает качество и глубину контента для исследователей, авторов, издателей и учреждений. Включение Известия НАН РК. Серия физико-математическая в Emerging Sources Citation Index демонстрирует нашу приверженность к наиболее актуальному и влиятельному контенту по физике и математике для нашего сообщества.

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 317 (2018), 114 – 129

УДК 517.956.32

М.И. Акылбаев[1], А. Бейсебаева[2], А. Ш. Шалданбаев[3],

[1]Региональный социально-гуманитарный университет, г.Шымкент;
[2]ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент;
[3]ЮКГУим. М.Ауезова, г. Шымкент
musabek_kz@mail.ru akbope_a@mail.ru shaldanbaev51@mail.ru

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ГУРСА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация.В данной работе решена задача Гурса в характеристическом четырехугольнике для волнового уравнения специального вида с переменными коэффициентами.Получено спектральное представление решения, не традиционное для таких вольтерровых задач.Для этого в качестве вввспомогоальной задачи использована спектральная задача для уравнения с отклонящимся аргументом.Показано,что опратор вида Su(x)=u(1-x) играет роль оператора Шмидта встречающиеесся в разложениях вольтерровых операторов.

Ключевые слова: Вольтерровые операторы, индефинитная метрика, задача Гурса, операторы подобия, спектр, спектральное разложение, метод Фурье, ортогональный базис, теорема Гиьберта-Шмидта.

1. Введение. Исследования задачи Дирихле для уравнения колебания струны в ограниченной области восходят к Ж. Адамару который впервые отметил не единственность решения в прямоугольнике.Д.Бургин и Дюффин [2] рассмотрели задачу Дирихле для уравнения $u_{xx} = u_{tt}$в прямоугольнике { 0 < x < X ; 0<t<T}. Показано, что не единственность решения в определенном пространстве возникает тогда и только тогда, когда X/T рационально. Установлены теоремы существования решения в классических пространствах, причем гладкость решения тем больше, чем больше гладкость граничной функции и чем хуже число X/T приближается рациональными числами. Рассмотрена также задача Неймана. В дальнейшем эти результаты уточнялись и обобщались различными авторами (см., напр., [3], [4], [5.],[6]).С. Л. Соболев [7] построил пример корректной граничной задачи в прямоугольнике для гиперболической системы уравнений, Ю. М. Березанский [8] построил класс областей с углами, изменение области внутри которого приводит к непрерывному изменению решения задачи Дирихле. Для областей с гладкой границей в гладких пространствах изучался только вопрос о единственности решения задачи Дирихле (см., напр., работу Р. А. Александряна [9]). В работе [3] В. И. Арнольд, применяя свои результаты по отображениям окружности в себя, уточняет результаты работы [2], указывая, что доказательство теорем о существовании классических решений задачи Дирихле можно перенести на случай эллипса.Ряд исседований Т.Ш.Кальменова и М.А.Садыбекова также посвящены к краевым задачам гиперболических уравнений [10]-[12],результаты этих исследований подытожены в монографии [13].

В работе [14] с помощью нового общего метода исследованы свойства решений задачи Коши, а также первой, второй и третьей краевых задач в круге для гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Применение этого метода к уравнениям высокого порядка см. в [15]. В работе [16] предлагается новый и относительно простой метод построения системы полиномиальных решений задачи Дирихле для гиперболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в круге, а также предлагается построение полной совокупности собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны.

Построенные в этой работе собственные функций совпадают с собственными функциями, построенными ранее в работе Р.А.Александаряна [9].

Проведенный анализ содержании этих работ показал, что спектральные свойства этих краевых задач зависят от геометрии области, в частности, от группы движении области. Не равносторонний треугольник не обладает группой симметрий, поэтому мы отказались от характеристического треугольника и стали рассматривать краевых задач внутри характеристического четырехугольника. При этом естественным образом появляются уравнения с отклоняющимся аргументами, которые заслуживают отдельного исследования [17]-[24].

1.Пусть Ω есть характеристический четырехугольник волнового уравнения,

$$u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)\left(u_\xi+u_\eta\right)+p\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)\left(u_\xi-u_\eta\right)+p\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)q\left(\frac{\xi-\eta}{2}\right)u=f(\xi,\eta) \qquad (1)$$

со сторонами $AB\colon \xi+\eta=0,\ BC\colon \xi-\eta=2,\ CD\colon \xi+\eta=2, DA\colon \xi-\eta=0$

[См.Рис1.].

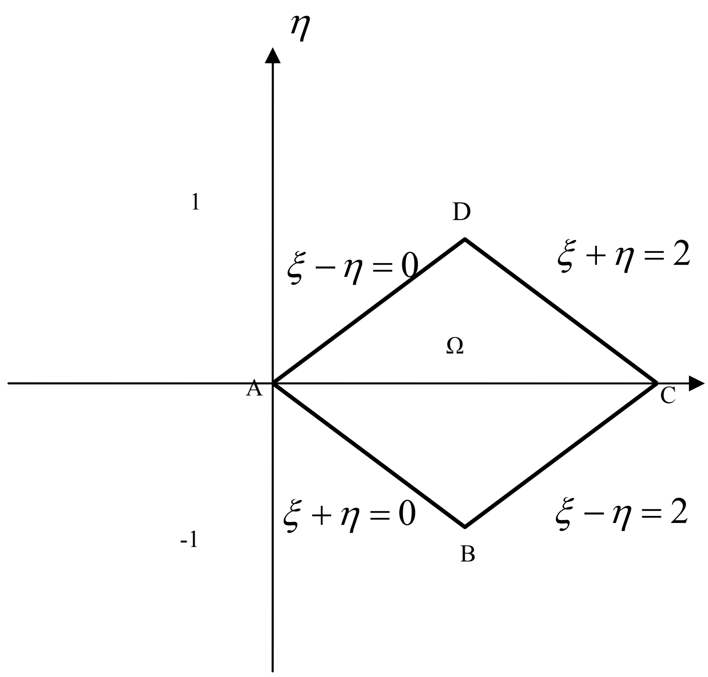

Рисунок 1

Предположим, что правая часть уравнения (1) периодическая функция с какими-то периодами. Спрашивается может ли иметь уравнение (1) периодического решения при соответствующих поведениях коэффициентов.

Известно, что периодическая задача плохо поставлена для волнового уравнения из за наличия бесконечнократного собственного значения в точке $\lambda=0$. Поэтому мы рассмотрим задачу Гурса для уравнения (1) и изучим возможности периодической продолжаемости решения этой задачи на всю (ξ,η)плоскость.

Постановка задачи.Найти периодического решения задачи Гурса для волнового уравнения

$$\begin{cases} u_{\xi\xi}-u_{\eta\eta}+q\left(\dfrac{\xi-\eta}{2}\right)\left(u_\xi+u_\eta\right)+\rho\left(\dfrac{\xi+\eta}{2}\right)\left(u_\xi-u_\eta\right)+\rho\left(\dfrac{\xi+\eta}{2}\right)q\left(\dfrac{\xi-\eta}{2}\right)u=f(\xi,\eta)\ (1) & (1)\\ u|_{AB}=0,\qquad u|_{BC}=0(2) & (2)\end{cases}$$

Для решения этой задачи сделаем замену переменных. Полагая, $x=\frac{\xi+\eta}{2}, y=\frac{\xi-\eta}{2}$, имеем

$$\xi=x+y,\qquad \eta=x-y;\ u(\xi,\eta)=u(x+y,x-y)=\hat{u}(x,y);$$

$$u_\xi = \hat{u}_x \cdot x_\xi + \hat{u}_y \cdot y_\xi = \hat{u}_x \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_y \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\hat{u}_x, \hat{u}_y\right);$$

$$u_{\xi\xi} = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_{xx} \cdot x_\xi + \hat{u}_{xy} \cdot y_\xi + \hat{u}_{yx} \cdot x_\xi + \hat{u}_{yy} \cdot y_\xi\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_{xx} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{xy} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{yx} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{yy} \cdot \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\hat{u}_{xx} + 2\hat{u}_{xy} + \hat{u}_{yy}\right];$$

$$u_\eta = \hat{u}_x \cdot x_\eta + \hat{u}_y \cdot y_\eta = \hat{u}_x \cdot \frac{1}{2} - \hat{u}_y \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\hat{u}_x, \hat{u}_y\right);$$

$$u_{\eta\eta} = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_{xx} \cdot x_\eta + \hat{u}_{xy} \cdot y_\eta - \hat{u}_{yx} \cdot x_\eta - \hat{u}_{yy} \cdot y_\eta\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{u}_{xx} \cdot \frac{1}{2} - \hat{u}_{xy} \cdot \frac{1}{2} - \hat{u}_{yx} \cdot \frac{1}{2} + \hat{u}_{yy} \cdot \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\hat{u}_{xx} - 2\hat{u}_{xy} + \hat{u}_{yy}\right];$$

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \hat{u}_{xy}.$$

После сделанной замены уравнение (1) примет вид

$$\hat{u}_{xy} + \hat{q}(y)\hat{u}_x + \hat{p}(x)\hat{u}_y + \hat{p}(x)\hat{q}(y)\hat{u}(x,y) = \hat{f}(x,y).$$

Отпустив шапочек после преобразования, получим

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(x)\right] \cdot u(x,y) = f(x,y).$$

Это есть волновое уравнение специального вида.Теперь займемся граничными условиями, и областью изменения новых переменных x, y. Отображение $x = \frac{\xi+\eta}{2}, y = \frac{\xi-\eta}{2}$ переводит область Ω в область D(см. Рис.2).

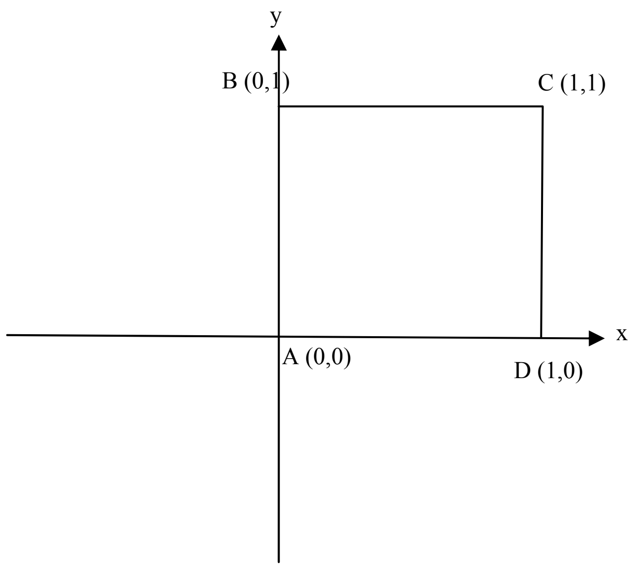

Рисунок 2

Следовательно, наша исходная задача примет следующий вид

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} + q(x)\right] \cdot u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in D & (3) \\ u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{y=1} = 0. & (4) \end{cases}$$

Целью настоящей работы является решение задачи Гурса (3)-(4) методами спектральной теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументами [17-24], и доказательство периодичности полученного решения.

2.Методы исследовании

Сначала изучим соответствующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} y'(x) + q(x)y(x) = \lambda \cdot y(1-x), \ \ x \in (0,1), & (5) \\ y(0) = 0. & (6) \end{cases}$$

где $q(x)$ –непрерывная функция.

Спрашивается при каких условиях на $q(x)$ оператор задачи (5)-(6) подобна к оператору задачи

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda \cdot y(1-x), \ \ x \in (0,1), & (5^{/}) \\ y(0) = 0. & (6^{/}) \end{cases}$$

Лемма 2.1.

Если $H=L_2(0,1)$

и

$$q(x)+q(1-x)=0,$$

то операторы

$$A = \frac{d}{dx}, \qquad D(A) = \{y(x) \in W_2^1, \qquad y(0) = 0\}$$

$$B = \frac{d}{dx} + q(x), \qquad D(B) = \{z(x) \in W_2^1, \qquad z(0) = 0\}$$

подобны между собой.

Доказательство. Оператора преобразования ищем в виде

$$z(x) = Ty(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x).$$

Тогда имеем $z(0) = e^0 \cdot y(0) = 0$ при $y(x) \in D(A)$.Следовательно, оператор T переводит область определения оператора A в область определения оператора, т.е. $T: D(A) \to D(B)$.

Далее, $z'(x) = y'(x) \cdot e^{\int_0^x q(t)dt} + q(x) \cdot y(x) \cdot e^{\int_0^x q(t)dt} = T\left[y'(x) + q(x) \cdot y(x)\right] = TBy(x)$.

Следовательно,

$$Az = z'(x) = TBy(x) \ \Rightarrow \ ATy(x) = TBy(x), \qquad \forall y(x) \in D(B), \qquad T^{-1}AT = B,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2.2.

Если $H=L_2(0,1)$, и

(1) $q(x) + q(1-x) = 0$;
(2) $Sy(x) = y(1-x), \ \forall y(x) \in L_2(0,1)$,

то операторы SAи SB подобны между собой, где

$$A = \frac{d}{dx}, \qquad D(A) = \{y(x) \in W_2^1, \qquad y(0) = 0\}$$

$$B = \frac{d}{dx} + q(x), \qquad D(B) = \{z(x) \in W_2^1, \qquad z(0) = 0\}$$

Доказательство. Пусть

$$Ty(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x),$$

тогда в силу леммы 1 имеем $AT = TB$, $\forall y(x) \in D(B)$. Действуя оператором S на это равенство получим

$$SAT = STB.$$

Для доказательства леммы достаточно, чтобы операторы *S* и *T* коммутировали. Проверим, что при выполнении условия, $q(x) + q(1-x) = 0$,операторы *S* и *T* коммутируют.

$$STy(x) = Se^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(1-x),$$
$$TSy(x) = Ty(1-x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(1-x),$$

Если $STy(x) = TSy(x)$,то $e^{\int_0^x q(t)dt} = e^{\int_0^{1-x} q(t)dt}$, $\int_0^x q(t)dt - \int_0^{1-x} q(t)dt = 0.$

Продифференцировав последнее равенство, получим

$$q(x) + q(1-x) = 0.$$

Обратно из последнего равенства следует предыдущее равенство. В самом деле, если $q(x) + q(1-x) = 0$,то

$$\int_0^x q(t)dt - \int_0^x q(1-t)dt = 0, \tag{7}$$

$$\int_0^x q(1-t)dt = \begin{vmatrix} t = 1-\xi \\ dt = -d\xi \end{vmatrix} = -\int_0^{1-x} q(\xi)d\xi = \int_{1-x}^1 q(\xi)d\xi = \int_0^1 q(t)dt - \int_0^{1-x} q(t)dt\,; \tag{8}$$

$$\int_0^1 q(t)dt = \begin{vmatrix} t = 1-\xi \\ dt = -d\xi \end{vmatrix} = -\int_1^0 q(1-\xi)d\xi = \int_0^1 q(1-\xi)d\xi = |q(1-\xi) = -q(\xi)| =$$
$$= \int_0^1 q(\xi)d\xi = -\int_0^1 q(t)dt\,, \Rightarrow \int_0^1 q(t)dt = 0. \tag{9}$$

Очевидно, что из (9), (8) и (7) следует равенство

$$\int_0^x q(t)dt - \int_0^{1-x} q(t)dt = 0.$$

Из последнего равенства в свою очередь следует равенство *ST*=*TS*. Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть $H = L_2(0,1)$,

$$q(x) + q(1-x) = 0,$$

и

$$A = \frac{d}{dx}, \qquad D(A) = \{y(x) \in W_2^1, \qquad y(0) = 0\}$$
$$B = \frac{d}{dx} + q(x), \qquad D(B) = \{z(x) \in W_2^1, \qquad z(0) = 0\}$$

Тогда спектры операторов *SA*и *SB* совпадают.

Доказательство. В силу леммы 2, имеет место равенство

$$SAT = STB, \Rightarrow SA = TSBT^{-1},$$

где

$$Ty(x) = e^{\int_0^x q(t)dt} \cdot y(x).$$

Тогда

$$SA - \lambda I = T(SB - \lambda I)^{-1}. \;\; \Rightarrow \;\; (SA - \lambda I)^{-1} = T(SB - \lambda I)^{-1}T^{-1}.$$

Следовательно, резольвентные множества операторов *SA*и *SB* совпадают, поэтому их спектры также совпадают.

Теперь исследуем спектр оператора SA, ввиду их важности для приложений, приводим подробные вычисления.

Лемма 2. 4.

Если H=$L_2(0,1)$, $Sy(x)=y(1-x)$,

$$A = \frac{d}{dx}, \; D(A) = \{y(x) \in W_2^1, \; y(0) = 0\},$$

то оператор *SA*имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_n = (-1)^n \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right), \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

и соответствующих им собственных функций

$$u_n = \sqrt{2} sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x, \qquad B_n = const,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $H=L_2(0,1)$.

Доказательство. Пусть *тогда*$Au = \mu Su$, следовательно, мы имеем дело с обобщенной спектральной задачей:

$$\begin{cases} u'(x) = \mu \cdot u(1-x), \\ \quad u(0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Продифференцировав уравнения (10), получим

$$u''(x) = -\mu \cdot u'(1-x) = \mu \cdot \mu \cdot u(x) = -\mu^2 \cdot u(x), \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u''(x) = \mu^2 \cdot u(x), & (11) \\ u(0) = 0, u'(1) = 0. & (12) \end{cases}$$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$u(x) = Acos\mu x + Bsin\mu x, \;\; A, B - const \tag{13}$$

Подставив (13) в граничные условия (12), получим

$$u(0) = A = 0, \qquad u'(1) = [-\mu A sin\mu x + \mu B cos\mu x]_{x=1} = \mu \cdot B cos\mu = 0.$$

Поскольку, B≠0, то собственные значения задачи (11) +(12) находятся из уравнения

$$\Delta(\mu) = \mu cos\mu x = 0, \tag{14}$$

Значению μ=0 соответствует тривиальное решение *u (x)*≡0, поэтому он не является собственным значением. Из уравнения, $cos\mu$=0, находим собственных значений задачи (11)+(12).

$$\mu_n = n\pi + \frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm1, \pm2, \dots \tag{15}$$

Квадрат каждого собственного значения задачи (10) является собственным значением задачи Штурма-Лиувилля (11)-(12), при этом соответствующие собственные функций совпадают. Но задача (11) -(12) может иметь и других собственных значений, и соответствующих им собственных функций, поэтому целесообразно прямая проверка полученных собственных функций. Подставив собственных функций, $u_n(x)=B_n sin\mu_n x$, B_n-*const* в уравнение (10), имеем

$$u_n'(x) = \mu_n \mathrm{B}_n cos\mu_n x,$$

$$u_n(1-x) = \mathrm{B}_n \cdot sin\mu_n(1-x) = \mathrm{B}_n \cdot sin(\mu_n - \mu_n x) =$$

$$= \mathrm{B}_n \cdot sin\mu_n \cdot cos\mu_n x - cos\mu_n \cdot sin\mu_n x = \mathrm{B}_n \cdot sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x \cdot cos\mu_n x = \mathrm{B}_n \cdot cosn\pi \cdot cos\mu_n x =$$

$$= (-1)^n \mathrm{B}_n \cdot cos\mu_n x.$$

Следовательно, $u_n'(x) = (-1)^n \mu_n u_n(1-x)$, где

$$\mu_n = n\pi + \frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm1, \pm2, \dots.$$

Покажем полноту полученной системы собственных функций. Пусть для некоторого, $f(x) \in L_2(0,1)$,имеет место равенства

$$\int_0^1 f(x) u_n(x) dx = 0, n = 1,2, \dots \quad .$$

Тогда

$$\int_0^1 f(x) \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x dx = 0, n = 0, \pm1, \pm2, \dots,$$

$$\int_0^1 f(x) \sin\left(-n\pi + \frac{\pi}{2}\right) x dx = 0, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \dots.$$

Сложив этих двух равенств, имеем

$$\int_0^1 f(x)\, cos\frac{\pi x}{2} \sin\pi\, x dx = 0, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \dots.$$

Отсюда в силу полноты системы функций $\{\sin n\pi\, x\}$в пространстве $L_2(0,1)$ получим $f(x) cos\frac{\pi x}{2} = 0$ почти всюду в *следовательно*, $f(x) = 0$ почти всюду в.

Ортогональность полученной системы проверяется непосредственным вычислением

$$\int_0^1 \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)x\cdot\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)xdx=\frac{1}{2}\int_0^1[\cos(n-m)\pi\, x-\cos(n+m+1)\pi\, x]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)\pi x}{(n-m)\,\pi}-\frac{\sin(n+m+1)\pi x}{(n+m+1)\,\pi}\right]\Big|_0^1=0,\text{при } n\neq m.$$

Вычислив норму собственной функций, имеем

$$\|u_n\|^2=2\cdot\int_0^1 sin^2\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)xdx=\int_0^1[1-cos(2n\pi+\pi)x]dx=1.$$

Лемма 2.4 доказана.

Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. Если $H=L_2(0,1), и\ q(x)$-непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая условию,

$$q(x)+q(1-x)=0,$$

то собственные функций краевой задачи

$$\begin{cases} y'(x)+q(x)y(x)=\lambda y(1-x),\\ y(0)=0\end{cases}\tag{14}$$

образуют базис Рисса в пространства$L_2(0,1)$.

Доказательство. Пусть $u_n(x)$ – собственные функций краевой задачи (10), тогда функций

$$y_n(x)=e^{-\int_0^x q(t)dt}\cdot u_n(x)$$

будут собственными функциями задачи (14).В самом деле,

$$y_n'(x)=u_n'(x)e^{-\int_0^x q(t)dt}-q(x)u_n(x)e^{-\int_0^x q(t)dt},\qquad\Rightarrow$$

$$y_n'(x)+y_n(x)q(x)=u_n'(x)e^{-\int_0^x q(t)dt}.$$

Действуя оператором $Sy(x)=y(1-x)$ на это равенство, и приняв во внимание условия теоремы, имеем

$$s\left[y_n'(x)+y_n(x)q(y)\right]=u_n'(x)e^{-\int_0^x q(t)dt}=\mu_n u_n(x)e^{-\int_0^x q(t)dt}=\mu_n y_n(x),\qquad\Rightarrow$$
$$y_n'(x)+y_n(x)q(y)=\mu_n y_n(1-x),\ y_n(0)=0.$$

Осталось лишь заметить, что оператор

$$Tu_n(x)=e^{-\int_0^x q(t)dt}\cdot u_n(x)$$

линейный ограниченный, и обратимый оператор в пространстве $L_2(0,1)$. Теорема доказана.

Теперь приступим к решению поставленной ранее задачи,для этого сначала решим спектральную задачу

$$\begin{cases}\left[\frac{\partial}{\partial x}+p(x)\right]\left[\frac{\partial}{\partial y}+q(y)\right]u(x,y)=\lambda u(1-x,1-y\ ) & (15)\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{y=1}=0. & (16)\end{cases}$$

Решения этой задачи ищем в виде

$$u(x,y) = v(x)\cdot\omega(y). \tag{17}$$

Тогда из граничного условия имеем

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= v(0)\cdot\omega(y) = 0, \qquad \Rightarrow\ v(0) = 0; \\ u|_{y=1} &= v(x)\cdot\omega(1) = 0, \qquad \Rightarrow\ \omega(1) = 0. \end{aligned}$$

Подставив (17) в уравнение (15), имеем

$$\frac{\left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right]v(x)}{v(1-x)}\cdot\frac{\left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y)\right]}{\omega(1-y)} = \lambda.$$

Разделив переменных получим две спектральные задачи:

I. $\begin{cases} v'(x) + p(x)v(x) = \mu v(1-x), \\ v(0) = 0. \end{cases}$

II$\begin{cases} \omega'(x) + q(y)\omega(y) = \nu\omega(1-y), \\ \omega(1) = 0. \end{cases}$

Если $u(y)$является решением спектральной задачи

$$\begin{cases} u'(y) = \nu u(1-y), \\ u(1) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

и $q(y) + q(1-y) = 0$, то функция

$$\omega(y) = e^{\int_y^1 q(\xi)d\xi}u(y)$$

является решением спектральной задачи II. В самом деле

$$\begin{gathered} \omega'(y) = u'(y)e^{\int_y^1 q(\xi)d\xi} - q(y)e^{\int_y^1 q(\xi)d\xi}u(y), \qquad \Rightarrow \\ \omega'(y) + q(y)\omega(y) = u'(y)e^{\int_y^1 q(\xi)d\xi}. \end{gathered}$$

Пусть $Sy = y(1-x)$,тогда

$$S\left[\omega'(y) + q(y)\omega(y)\right] = e^{\int_y^1 q(\xi)d\xi}u'(1-y) = e^{\int_y^1 q(\xi)d\xi}\cdot\lambda u(1-y) = \lambda\omega(y),$$

$$\omega'(y) + q(y)\omega(y) = \lambda\omega(1-y).$$

Далее, из $u(1) = 0$ *следует* $\omega(1) = 0,$ *таким* образом, нам осталось решить задачу (18)

$$\begin{cases} u'(x) = \nu u(1-x), \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

Чтобы воспользоваться уже известными ранее результатами сделаем замену переменного, полагая

$$v(x) = u(1-x), \qquad v'(x) = -u'(1-x), \qquad -v'(1-x) = u',$$
$$\begin{cases} -v'(1-x) = \nu v(x) \\ v(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'(1-x) = -\nu v(x), \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Из леммы 4 нам известно, что

$\upsilon_n(x) = \text{B}_n \cdot sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x$, следовательно,

$$\upsilon_n(x) = \upsilon_n(1-x) = \text{B}_n \cdot sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(1-x) = \text{B}_n \cdot sin\left[n\pi + \frac{\pi}{2} - \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x\right] =$$
$$= \text{B}_n \cdot cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x \cdot cosn\pi = (-1)^n \text{B}_n \cdot cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x.$$

Вычислим собственных значений

$$\upsilon_n' = \text{B}_n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x,$$
$$\upsilon_n(1-x) = \text{B}_n \cdot sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(1-x) = (-1)^n \text{B}_n cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x,$$
$$\upsilon_n' = \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(-1)^n \upsilon_n(1-x) = -\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)(-1)^{n+1}\upsilon_n(1-x), \qquad \Rightarrow$$
$$\nu_n = (-1)^{n+1}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, решением спектральной задачи (18) является функции

$$u_n(y) = c_n cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y,$$

а собственными значениями числа: $\nu_n = (-1)^{n+1}\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, где c_n- нормировочные коэффициенты. Вычислим этих коэффициентов

$$\|u_n\|^2 = |c_n|^2 \int_0^1 cos^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)ydy = \frac{|c_n|^2}{2}\int_0^1 [1 + cos(2n\pi + \pi)y]dy =$$

$$= \frac{|c_n|^2}{2}y + \frac{sin(2n\pi + \pi)y}{2n\pi + \pi}\Bigg|_0^1 \frac{|c_n|^2}{2} = 1, \qquad c_n = \sqrt{2}.$$

Для полной убедительности проверим ортогональность этих собственных функций

$$(u_n, u_m) = 2\int_0^1 cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y \cdot cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)ydy =$$
$$= \int_0^1 \left[cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + m\pi + \frac{\pi}{2}\right)y + cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - m\pi - \frac{\pi}{2}\right)y\right]dy =$$
$$= \int_0^1 \{cos[(n+m)\pi + \pi]y + cos(n-m)\pi y\}dy =$$
$$= \left[\frac{sin(n+m+1)y}{n+m+1} + \frac{sin(n-m)\pi y}{n-m}\right]\Bigg|_0^1 = 0, \text{ при } n \neq m.$$

Нами доказана следующая лемма 2.5.

Лемма 2.5. Собственными функциями спектральной задачи

$$\begin{cases} \omega'(y) + q(y)\omega(y) = \nu\omega(1-y), \qquad y \in (0,1) \\ \omega(1) = 0, \end{cases}$$

$$q(y) + q(1-y) = 0$$

является функции

$$\omega(y) = 2e^{\int_y^1 q(\xi)d\xi} \cdot cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)y, \;\; n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

а собственными значениями

$$\upsilon_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right), \;\; n = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

Теорема 2.2. Если $H = L_2(0,1), u$ $q(x)$-непрерывная вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$q(x) + q(1-x) = 0,$$

то собственные функций краевой задачи

$$\begin{cases} y'(x) + q(x)y = \nu y(1-x), \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

образуют базис Рисса пространства $L_2(0,1)$.

Доказательство теоремы, очевидным образом, следует из леммы 2.5.

Подытожим результаты полученных лемм [2.1-2.5], в виде следующей теоремы,

Теорема 2.3. Если $H = L_2(0,1)$ и

(1) $p(x) + p(1-x) = 0,$

(2) $q(y) + q(1-y) = 0$

то спектральная задача

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right]\left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y)\right]u(x,y) = \lambda u(1-x, 1-y) \\ u|_{x=0} = 0, u|_{y=1} = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{nm} = \pi^2(-1)^{n+m+1}\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right), \qquad n, m = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{nm}(x,y) = 2e^{\int_y^1 q(t)dt - \int_0^x p(t)dt} \cdot sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x \cdot cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)y,$$

которые образуют базис Рисса пространства $L_2(D)$.

3. Результаты исследовании

Теперь вернемся к первоначальной задаче (3)+(4). Действуя операторомS:

$Su(x,y) = u(1-x,1-y)$на уравнение (3) ,получим

$$S\left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right]\left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y)\right]u(x,y) = Sf(x,y) = f(1-x,1-y). \tag{19}$$

Разложив функцию $u(x,y)$, и $f(1-x,1-y)$ по собственным функциям спектральной задачи (15)+(16), имеем

$$f(1-x,1-y) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_{nm} u_{nm}(x,y),$$

$$u(x,y) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{nm}\, u_{nm}(x,y). \tag{20}$$

где f_{nm}, a_{nm}- соответствующие коэффициенты Фурье. Подставив (20) в (19) , получим

$$\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \lambda_{nm} a_{nm}\, u_{nm}(x,y) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} f_{nm}\, u_{nm}(x,y), \Rightarrow$$

$$a_{nm} = \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}}.$$

Следовательно,

$$u(x,y) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}} u_{nm}(x,y).$$

Теорема 3.1. Если $H = L_2(0,1)$ и

$(a)\ \ p(x) + p(1-x) = 0, (b)\ q(y) + q(1-x) = 0,$

то задача Гурса

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial x} + p(x)\right]\left[\frac{\partial}{\partial y} + q(y)\right]u(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in D \\ u|_{x=0} = 0, u|_{y=1} = 0 \end{cases}$$

сильно разрешима в пространстве $L_{2,\rho}(D)$с весом, и для решения $u(x,y)$ имеет место представление

$$u(x,y) = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \frac{f_{nm}}{\lambda_{nm}} u_{nm}(x,y),$$

$u_{nm}(x,y) = 2exp\left[\int_y^1 q(t)dt - \int_0^x p(t)dt\right] \cdot sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x \cdot cos\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right)y,$

$$\lambda_{nm} = \pi^2(-1)^{n+m+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right), \qquad n,m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

где f_{nm}-коэффициенты Фурье функции $f(1-x, 1-y)$по системе $\{u_{nm}\}$.

Скалярное произведение в пространстве $L_{2,\rho}(D)$имеет вид

$$(f,g) = \int_0^1 \int_0^1 exp\left[\int_y^1 q(t)dt - \int_0^x p(t)dt\right] f(x,y)g(x,y)dxdy.$$

Следующая лемма многим известно, все же, для полноты изложения приводим его доказательство.

Лемма 3.1. Пусть $q(x)$ периодическая с периодом 1 функция т.е., q(x+1) =q(x). Тогда для того чтобы функция

$$Q(x) = \int_0^x q(t)dt$$

было периодической функцией с периодом равном 1-це необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1 q(t)dt = 0.$$

Доказательство.

(а) Необходимость. Пусть $Q(x)$ периодическая функция с периодом равном единице, т.е. $Q(x) = Q(1+x)$. Тогда

$$\int_0^x q(t)dt = \int_0^{1+x} q(t)dt = \int_0^1 q(t)dt + \int_1^{1+x} q(t)dt;$$

$$\int_1^{1+x} q(t)dt = \begin{vmatrix} t = 1+\xi \\ dt = d\xi \end{vmatrix} = \int_0^x q(1+\xi)d\xi = \int_0^x q(\xi)d\xi.$$

Следовательно

$$\int_0^x q(t)dt = \int_0^1 q(t)dt + \int_0^x q(\xi)d\xi.$$

Отсюда очевидно, что $\int_0^1 q(t)dt = 0$.

(б) Достаточность. Допустим, что имеет место равенства:$q(x) = q(x+1)$, $\int_0^1 q(t)dt = 0$.
Тогда

$$Q(1+x) = \int_0^{1+x} q(t)dt = \int_0^1 q(t)dt + \int_1^{1+x} q(t)dt =$$

$$= \int_1^{1+x} q(t)dt = \begin{vmatrix} t = 1+\xi \\ dt = d\xi \end{vmatrix} = \int_0^x q(1+\xi)d\xi = \int_0^x q(\xi)d\xi = Q(x).$$

что и требовалось доказать.

Следствие 3.1. Если $p(x)$, $q(y)$вещественные непрерывные функций удовлетворяющие условиям:

$$p(x)+p(1-x)=0, q(y)+q(1-y)=0,$$

то функций

$$P(x)=\int_0^x p(t)dt\,,\;\; Q(y)=\int_y^1 q(t)dt$$

периодичны с периодами равными единице.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия (1) имеет место равенство

$$\int_0^1 p(t)dt=0.$$

Из условия (1), имеем

$$\int_0^1 p(t)dt+\int_0^1 p(1-t)dt=0;\;\; \int_0^1 p(1-t)dt=\begin{vmatrix}\xi=1-t\\ d\xi=-dt\\ t=1-\xi\end{vmatrix}=-\int_1^0 p(\xi)d\xi=\int_0^1 p(\xi)d\xi,$$

Следовательно,

$$2\int_0^1 p(t)dt=0\;\;\Rightarrow\int_0^1 p(t)dt=0\,.$$

Далее,

$$Q(y)=\int_0^1 q(t)dt+\int_0^y q(t)dt=-\int_0^y q(t)dt.$$

Следствие 3.2. Собственные функций спектральной задачи (15) +(16) периодичны с периодом T=2.

Доказательство.

$$u_{nm}(x,y)=2exp\left[\int_y^1 q(t)dt-\int_0^x p(t)dt\right]\cdot sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)x\cdot cos\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)y,$$

$$u_{nm}(x+2,y+2)==2exp\left[\int_y^1 q(t)dt-\int_0^x p(t)dt\right]\cdot sin\left[2n\pi+\pi+\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)x\right]\cdot$$
$$cos\left[2m\pi+\pi+\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)y\right]=$$
$$=2exp\left[\int_y^1 q(t)dt-\int_0^x p(t)dt\right]\cdot sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)x\cdot cos\left(m\pi+\frac{\pi}{2}\right)y=u_{nm}(x,y).$$

Сформулируем полученную окончательную теорему.

Теорема 3.2. Пусть, $H=L_2(D), и\;\; p(x), q(y), f(x,y)$ вещественные непрерывные функций. Если выполняются условия:

(a) $p(x)+p(1-x)=0,$

(b) $q(y)+q(1-x)=0,$

(c) $f(x,y)\in C_0(D);$

то задача Гурса

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}+p(x)\right]\left[\frac{\partial}{\partial y}+q(y)\right]u(x,y)=f(x,y),\qquad (x,y)\in D$$
$$u|_{x=0}=0,\qquad u|_{y=1}=0$$

имеет единственное периодическое решение,с периодом T=2.

4.Обсуждение.

Некорректность задачи Дирихле волнового уравнения $u_{xx}-u_{yy}=0$ в области D [см.Рис.2] общеизвестна,с операторной точки зрения волновой оператор имеет непрерывный спектр,т.е.,ноль является бесконечнократным собственны значением,аналогичным свойством обладает и периодическая задача,поэтому мы обратили свое внимание на задачу Гурса.

5.Выводы.

Волновые уравнения описывают волновые процессы: распространение звука, электромагнитных волн, волн на воде, радиоволн и т.п. Известны случаи, когда волны малой амплитуды образуют гигантские волны. Такое явление происходит из-за длительности процесса распространения волн, поэтому задача стабилизации решений волнового уравнения при $t\to+\infty$ имеет важное практическое значение.Один из признаков стабилизации волн их периодичность. Нами установлено, что если внешнее возмущение локализовано т.е. финитно, а коэффициенты волнового уравнения периодичны и нечетны, то решение задачи Гурса допускает периодическое продолжение на всю плоскость независимых переменных.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hadamard J. On some topics connected with linear partial differential equations, Proc.Benares Math. Soc, 1921, 3, p. 39—48.

[2] Burgin D,, Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation,Bull.Amer. Math. Soc, 1939, iv. 45, p. 851—858.

[3] Арнольд В. И. Малые знаменатели, I.—Изв. АН СССР. Сер. матем., 1961, т. 25, № 1,с. 21-86.

[4] Бобик О.И.,Бондарчук П.И., Пташник Б. И. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Киев, 1972. 175 с.

[5] Sleeman B. D. Boundary value problems for the vibrating string equation.— Proc. Roy.Soc. Edinburgh, 1981, v. A-88, Us. 1—2, p. 185—194.

[6] Мосолов П. П. О задаче Дирихле для уравнений в частных производных. Известия высших учебных заведений,1960 Математика № 3 (16),с.213-218.

[7] Соболев С.Л.Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе,ДАН-СССР, 1956, т. 109, JM» 4,с.707-709.

[8] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.Киев, 1965. 800 с.

[9] Александрян Р. А. Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С Л . Соболева.—-Тр. Моск. матем. о-ва, 1960, т. 9,с. 455—505.

[10] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения , Диффенц. уравнения.1981 ,т 17, №6,с.1105-1121.

[11] Кальменов Т.Ш. О спектре одной самосопреженной задачи для волнового уравнения , Весник А.Н Каз ССР,1982, №2,с.63-66.

[12] Садыбеков М.И, Кальменов Т.Ш. О задаче Дирихле и нелокольных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения, 1990 , т.26, №1, с.60-65.

[13] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа , Шымкент:Гылым ,1993,327с.

[14] Бурский В. П. Краевые задачи для гиперболического уравнения второго порядка в круге, Известия. вузов. Матем.,1987,номер 2,22–29.

[15] Бурский В.П.О ядре дифференциального оператора с постоянными коэффициентами младшего порядка в круге,ВИНИТИ, № 3792—82 Деп., 1982.

[16] Саргсян Г.А.О полиномиальных решениях задачи Дирихле для гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами в круге, Доклады национальной академии наук Армении, Том 112, 2012, № 4.

[17] Кальменов Т.Ш., Ахметова С.Т, Шалданбаев А.Ш. К спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом // Математический журнал, Алматы.- 2004.- Т. 4, № 3. - С. 41-48.

[18] Ибраймкулов А.М. О спектральных свойствах краевой задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом // Известия АН.Каз.ССР, сер.физ.-мат.- 1988.- № 3.- С. 22-25.

[19] Kal'menov T. Sh., and Shaldanbaev A. Sh., On a criterion of solvability of the inverse problem of heat conduction, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352-369 (2010).

[20] Orazov I, A. Shaldanbayev, and M. Shomanbayeva, About the Nature of the Spectrum of the Periodic Problem for the Heat Equation with a Deviating Argument, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (2013), Article ID 128363, 6 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.

[21] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- Монография. 193с,LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. http://dnb.d-nb.de. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011,Germanu.

[22] Allaberen Ashyralyev, Abdizhahan M. Sarsenbi, Well-posedness of an Elliptic Equation with Involution, Electronic Journal of Di_erential Equations, Vol. 2015 (2015), No. 284, pp. 1{8.ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.eduftp ejde.math.txstate.edu.

[23] Садыбеков М.А.,Сарсенби А.М.,Решение основных спектральных вопросов всех краевых задач для одного дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом,Uzbek Mathematical Journal, 2007,№3, pp.1-6.

[24] Sadybekov, M. A.; Sarsenbi, A. M.; Mixed problem for a di_erential equation with involution under boundary conditions of general form. AIP Conference Proceedings. Ed. Ashyralyev,and A; Lukashov, A. Vol. 1470, 225-227, 2012.

УДК517.956.32

М.И. Ақылбаев, А. Бейсебаева, А. Ш. Шалданбаев

[1]Аймақтық әлеуметтік-инновациялық университеті;
[2]ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ АЙНЫМАЛЫ ТҮРІ АРНАЙЫ ТОЛҚЫН ТЕҢДЕУІНІҢ ГУРСАЛЫҚ ЕСЕБІНІҢ ПЕРИОДТЫ ШЕШІМІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл еңбекте коэффициенттері айнымалы ал түрі арнайы толқын теңдеуіне қойылған Гурсаның есебі шешілді.Шешімнің спектрәлді кейпі табылды,мұндай жағдай вөлтерлі есептерге тән емес. Бұл үшін көмекші есеп ретінде аргументі ауытқыған дифференциалдық теңдеу қолданылды. Мынадай, Su(x)=u(1-x), операторлардың Шмидтің операторының қызметін атқаратыны көрсетіген

Тірек сөздер: Вөлтерлік операторлар, индефинитті метрика, Гурсаның есебі, ұқсастық опероторы, спектр, спектрәлдік таралым, Фүренің әдісі, ортогонәлді базис, Гілберт-Шмидтің теоремасы.

UDC 517.956.32

M.I. Akylbayev,[1] A. Beysebayeva,[2] A. Sh. Shaldanbayev[2]

[1] Regional Social-Innovational University,Shymkent;
[2]M.Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent.

ON THE PERIODIC SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM FOR A WAVE EQUATION OF A SPECIAL FORM WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Abstract. In this work the task of Goursat in a characteristic quadrangle for a wave equation of an express view with variable coefficients is solved. The spectral impression of the decision not traditional for such Voltaire tasks is gained. For this purpose as a vvvspomogoalny task the spectral task for the equation is used with we otklonyashchitsya by an argument. It is shown that the oprator of a type of Su(x)=u(1-x) plays a role of the operator Schmidt встречающиееся in decomposition of Voltaire operators.

Keywords: Volterra operators, indefinite metric, Goursat problem, similarity operators, spectrum, spectral decomposition, Fourier method, orthogonal basis, the Hulbert-Schmidt theorem.

Сведения об авторах:

Ақылбаев М.И.- к.т.н., проректор филиала «Отырар»ШАПУ доцент г. Шымкент;

Бейсебаева А.,преподаватель кафедры «Математики» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент;

Шалданбаев А. Ш. – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математики» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

МАЗМҰНЫ

* * *

СОДЕРЖАНИЕ

* * *

CONTENTS

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Т.А. Апендиев, Д.С. Аленов*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 15.02.2018.
Формат 60х881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
9 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19