ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**

♦

**СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**

♦

**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

1 (317)

**ҚАҢТАР – АҚПАН 2018 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2018 г.
JANUARY – FEBRUARY 2018**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

NAS RK is pleased to announce that News of NAS RK. Series of physico-mathematical scientific journal has been accepted for indexing in the Emerging Sources Citation Index, a new edition of Web of Science. Content in this index is under consideration by Clarivate Analytics to be accepted in the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index, and the Arts & Humanities Citation Index. The quality and depth of content Web of Science offers to researchers, authors, publishers, and institutions sets it apart from other research databases. The inclusion of News of NAS RK. Series of physico-mathematical in the Emerging Sources Citation Index demonstrates our dedication to providing the most relevant and influential content of physics and mathematics to our community.

Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясы "ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы" ғылыми журналының Web of Science-тің жаңаланған нұсқасы Emerging Sources Citation Index-те индекстелуге қабылданғанын хабарлайды. Бұл индекстелу барысында Clarivate Analytics компаниясы журналды одан әрі the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index және the Arts & Humanities Citation Index-ке қабылдау мәселесін қарастыруда. Webof Science зерттеушілер, авторлар, баспашылар мен мекемелерге контент тереңдігі мен сапасын ұсынады. ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы Emerging Sources Citation Index-ке енуі біздің қоғамдастық үшін ең өзекті және беделді физика-математика бойынша контентке адалдығымызды білдіреді.

НАН РК сообщает, что научный журнал «Известия НАН РК. Серия физико-математическая» был принят для индексирования в Emerging Sources Citation Index, обновленной версии Web of Science. Содержание в этом индексировании находится в стадии рассмотрения компанией Clarivate Analytics для дальнейшего принятия журнала в the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index и the Arts & Humanities Citation Index. Web of Science предлагает качество и глубину контента для исследователей, авторов, издателей и учреждений. Включение Известия НАН РК. Серия физико-математическая в Emerging Sources Citation Index демонстрирует нашу приверженность к наиболее актуальному и влиятельному контенту по физике и математике для нашего сообщества.

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18, www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 317 (2018), 130 – 141

УДК 539.2/.6

К.Б. Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан
Казахский Национальный Университет им.Аль-Фараби

НЕЛИНЕЙНЫЙ ЗАКОН ГУКА В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Аннотация. Непосредственно из физической связи с нелинейным законом Гука выводятся компоненты тензора напряжений твердого деформируемого тела и новые нелинейные уравнения теории упругости с несимметричным тензором напряжений, как частный случай получаются уравнения с линейным законом Гука. Гипотеза Ламе и уравнения Ламе не имеют физической связи с законом Гука, в этом заключается их фальшивость. Ламе взял за основу приближенную формулу неполного дифференциала и предположил в своей гипотезе пропорциональность компонент тензора напряжений симметричной половине данного неполного дифференциала смещения, причем антисимметричная половина дифференциала отбрасывается, следствием чего является фальшивая симметричность тензора напряжений Ламе. Новые нелинейные уравнения аппроксимируются явной схемой, с применением которой численно рассчитано упругое состояние плоского бруска при действующих на верхней грани нормальном и касательном напряжениях. Такая же схема применена для уравнений Ламе. Полученные картины распределения смещений наглядно демонстрируют различие решений сравниваемых систем уравнений упругости, а также несоответствие решения уравнений Ламе данному состоянию деформируемого тела. Теоретически и физически подтверждена фальшивость уравнений Ламе.

Ключевые слова: растяжение, касательное, нормальное, напряжения, тензор.

1. Касательные напряжения по обобщенному закону Гука

Зако́н Гу́ка - утверждение, согласно которому деформация, возникающая в упругом теле, пропорциональна приложенной силе. Открыт в 1660 году английским учёным Робертом Гуком.

Следует иметь в виду, что закон Гука выполняется только при малых деформациях. При превышении предела пропорциональности связь между напряжениями и деформациями становится **нелинейной.**

Для многих сред закон Гука неприменим даже при малых деформациях.

Вывод динамических уравнений с несимметричным тензором напряжений по *линейному* закону Гука дан в [1]: $\mathbf{F} = k\mathbf{u}, k>0, \mathbf{F}_x = u\mathbf{i}, \mathbf{F}_y = v\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_z = w\mathbf{k}, \mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ – вектор перемещения, где $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$ – *внешняя* сила, вызывающая перемещение.

В неоднородных средах, составленных из тел с различными упругими свойствами или в **анизотропных** телах, свойства которых зависят от направления, закон Гука может быть *нелинейным* типа

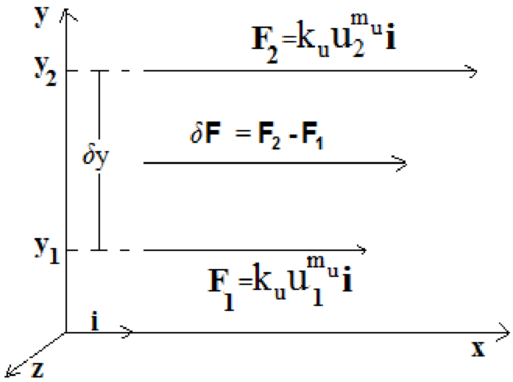
$$\mathbf{F} = k_u u^{m_u}\mathbf{i} + k_v v^{m_v}\mathbf{j} + k_w v^{m_w}\mathbf{k}, \; k_u > 0, k_v > 0, k_w > 0 \tag{1.1}$$

При показателях степеней, равных 1 и $k_u = k_v = k_w = k$, (1.1) переходит в линейный закон Гука для изотропной среды, следовательно, показатели степеней должны быть *нечетными* числами [2], что будет подтверждено ниже свойствамигиперболических уравнениях упругости.

Пусть на плоскости y_1 сила связана с перемещением по обобщенному закону $\mathbf{F}_1 = k_u u_1^{m_u}\mathbf{i}$, аналогично сила $\mathbf{F}_2 = k_u u_2^{m_u}\mathbf{i}$ на плоскости $y_2 = y_1 + \delta y,\ \delta y > 0$.

Приращения сил и перемещений между слоями равны:

$$\delta\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = k_u u_2^{m_u}\mathbf{i} - k_u u_1^{m_u}\mathbf{i} = k_u \delta u^{m_u}\mathbf{i},\ \delta u^{m_u} = u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0.$$



Пусть $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$, в этом случае приращение силы направлено по оси x: $\delta\mathbf{F} \uparrow\uparrow \mathbf{i}$. Вводится линейная плотность $\mathbf{f} = \delta\mathbf{F}/\delta y,\ \delta\mathbf{F} = \delta y\mathbf{f}$. По определению средний вектор касательного напряжения $\mathbf{p}_{yxcp} = \dfrac{\delta\mathbf{F}}{\delta x\delta z}$ параллелен и одинаково направлен с силой, вызывающей данное напряжение $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \delta\mathbf{F},\ \mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \mathbf{f}$.

Введением коэффициента пропорциональности образуются связи:

$$\mathbf{f} = k'\mathbf{p}_{yxcp}, k'>0,\ \delta y\mathbf{f} = k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y,\ \mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \mathbf{i},$$

$$k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y = k_u \delta u^{m_u}\mathbf{i}$$

Данное выражение умножается скалярно на орт $\mathbf{i}$:

$$(k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y, \mathbf{i}) = (k_u \delta u^{m_u}\mathbf{i}, \mathbf{i})$$

В результате получаются

$$(k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y, \mathbf{i}) = k'|\mathbf{p}_{yxcp}||\delta y||\mathbf{i}|\cos 0^o = k' p_{yxcp}\delta y,\ (k_u \delta u^{m_u}\mathbf{i}, \mathbf{i}) = k_u \delta u^{m_u}$$

Равенства

$$k' p_{yxcp}\delta y = k_u \delta u^{m_u},\ p_{yxcp} = \frac{k_u}{k'}\frac{\delta u^{m_u}}{\delta y}$$

в пределе дают касательное напряжение

$$p_{yx} = \lim_{\delta y \to 0}\frac{k_u}{k'}\frac{\delta u^{m_u}}{\delta y} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial y},\ \mu_u = \frac{k_u}{k'} > 0$$

Касательные напряжения по другим направлениям аналогичны:

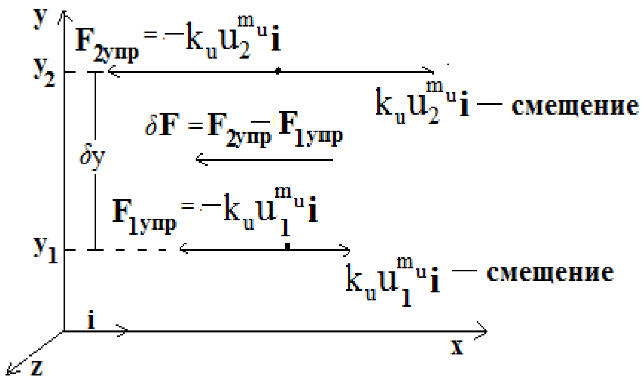
$$p_{xy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial x}, p_{zx} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial z}, p_{xz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial x}, p_{yz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial y}, p_{zy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial z}$$

Формулы *несимметричных* касательных напряжений выведены для вызывающей растяжение тела *внешней* силы $\mathbf{F}=\mathbf{F}_x+\mathbf{F}_y+\mathbf{F}_z$.

Упругая сила в деформируемом теле по третьему закону Ньютона равна внешней силе со знаком минус $\mathbf{F}_{\text{упр}}=-\mathbf{F}$. Следовательно, линейный закон Гука для сил упругости будет иметь вид $\mathbf{F}_{\text{упр}}=-k\mathbf{u}, \mathbf{F}_{\text{упр}}=-ku\mathbf{i}-kv\mathbf{j}-kw\mathbf{k}$.

Аналогичное представление для нелинейного закона Гука

$$\mathbf{F}_{\text{упр}}=-k_u u^{m_u}\mathbf{i}-k_v v^{m_v}\mathbf{j}-k_w w^{m_w}\mathbf{k}$$



Пусть на плоскости y_1 сила связана с перемещением по нелинейному закону $\mathbf{F}_{1\text{упр}} = k_u u_1^{m_u}\mathbf{i}$, аналогично сила $\mathbf{F}_{2\text{упр}} = k_u u_2^{m_u}\mathbf{i}$ на плоскости $y_2=y_1+\delta y$, $\delta y>0$.

Приращения сил и перемещений между слоями равны:

$$\delta\mathbf{F}=\mathbf{F}_{2\text{упр}}-\mathbf{F}_{1\text{упр}}=$$

$$=-k_u u_2^{m_u}\mathbf{i}+k_u u_1^{m_u}\mathbf{i}=-k_u\delta u^{m_u}\mathbf{i},$$

$$\delta u^{m_u}=u_2^{m_u}-u_1^{m_u}>0.$$

Пусть $|\mathbf{F}_2|>|\mathbf{F}_1|$, в этом случае приращение силы направлено против оси x: $\delta\mathbf{F}\uparrow\downarrow\mathbf{i}$. Вводится линейная плотность $\mathbf{f}=\delta\mathbf{F}/\delta y,\ \delta\mathbf{F}=\delta y\mathbf{f}$.

По определению средний вектор касательного напряжения $\mathbf{p}_{yxcp}=\dfrac{\delta\mathbf{F}}{\delta\sigma}, \delta\sigma=\delta x\delta z$ параллелен и одинаково направлен с силой, вызывающей данное напряжение $\mathbf{p}_{yxcp}\uparrow\uparrow\delta\mathbf{F},\ \mathbf{p}_{yxcp}\uparrow\uparrow\mathbf{f}$.

Введением коэффициента пропорциональности образуются связи:

$$\mathbf{f}=k'\mathbf{p}_{yxcp}, k'>0,\ \delta y\mathbf{f}=k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y,\ \mathbf{p}_{yxcp}\uparrow\downarrow\mathbf{i},\ k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y=-k_u\delta u^{m_u}\mathbf{i}$$

Данное выражение умножается скалярно на орт $\mathbf{i}$:

$$(k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y,\mathbf{i})=-(k_u\delta u^{m_u}\mathbf{i},\mathbf{i})$$

В результате получаются

$(k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y,\mathbf{i})=k'|\mathbf{p}_{yxcp}||\delta y||\mathbf{i}|\cos 180^o=-k'p_{yxcp}\delta y,\ -(k_u\delta u^{m_u}\mathbf{i},\mathbf{i})=-k_u\delta u^{m_u}$ Равенства

$$k'p_{yxcp}\delta y = k_u \delta u^{m_u}, \; p_{yxcp} = \frac{k_u}{k'}\frac{\delta u^{m_u}}{\delta y}$$

в пределе дают касательное напряжение

$$p_{yx} = \lim_{\delta y \to 0}\frac{k_u}{k'}\frac{\delta u^{m_u}}{\delta y} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial y}, \; \mu_u = \frac{k_u}{k'} > 0$$

Касательные напряжения по другим направлениям аналогичны:

$$p_{xy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial x}, p_{zx} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial z}, p_{xz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial x}, p_{yz} = \mu_w \frac{\partial w^{m_w}}{\partial y}, p_{zy} = \mu_v \frac{\partial v^{m_v}}{\partial z}$$

Таким образом, формулы напряжений для внешних сил совпадают с формулами воздействия упругих сил, поэтому дальнейшие выводы делаются только для внешних сил.

2. Связь нормальных напряжений с законом Гука

Аналогичными рассуждениями устанавливается формула составляющей $\mathbf{p}^o_{xx}$ нормального напряжения $\mathbf{p}_{xx} = \lambda \mathrm{div}\mathbf{u}\;\mathbf{i} + \mathbf{p}^o_{xx}$.

Пусть внешние силы равны: $\mathbf{F}_1 = k_u u_1^{m_u}\mathbf{i}$ на плоскости x_1 и $\mathbf{F}_2 = k_u u_2^{m_u}\mathbf{i}$ на плоскости $x_2 = x_1 + \delta x, \delta x > 0.$ Приращения сил и перемещений:

$$\delta\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = k_u u_2^{m_u}\mathbf{i} - k_u u_1^{m_u}\mathbf{i} = k_u \delta u^{m_u}\mathbf{i}, \; \delta u^{m_u} = u_2^{m_u} - u_1^{m_u} > 0.$$

По определению напряжений имеют место $\mathbf{p}^o_{xx\,cp} = \dfrac{\delta\mathbf{F}}{\delta\sigma}, \delta\sigma = \delta y \delta z$ и одинаковая направленность векторов $\delta\mathbf{F} \uparrow\uparrow \mathbf{i}$ в силу $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$.

Через линейную плотность

$$\mathbf{f} = \frac{\delta\mathbf{F}}{\delta x}, \delta\mathbf{F} = \delta x \mathbf{f}, \; \mathbf{f} = k''\mathbf{p}^0_{xx\,cp}$$

образуются равенства $\delta\mathbf{F} = k''\delta x \mathbf{p}^0_{xx\,cp}, \; k''\delta x \mathbf{p}^0_{xx\,cp} = k_u \delta u^{m_u}\mathbf{i}.$

Данное выражение умножается скалярно на орт $\mathbf{i}$:

$$(k''\delta x \mathbf{p}^0_{xx\,cp}, \mathbf{i}) = (k_u \delta u^{m_u}\mathbf{i}, \mathbf{i})$$

Векторы параллельны по структуре $\mathbf{p}^0_{xx\,cp} \uparrow\uparrow \mathbf{i}$.

Поэтому имеют место в скалярных произведениях

$$(k''\delta x \mathbf{p}^0_{xxcp}, \mathbf{i}) = k''\delta x |\mathbf{p}^0_{xxcp}| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \cos 0^o = k''\delta x p^0_{xxcp}, \; (k_u \delta u^{m_u}\mathbf{i}, \mathbf{i}) = k_u \delta u^{m_u}.$$

В результате получается $k''\delta x p^0_{xxcp} = k_u \delta u^{m_u}$, откуда $p^0_{xxcp} = \dfrac{k_u}{k''}\dfrac{\delta u^{m_u}}{\delta x}$.

В пределе вытекает формула составляющей нормального напряжения

$$p^0_{xx} = \lim_{\delta x \to 0}\frac{k_u}{k''}\frac{\delta u^{m_u}}{\delta x} = \mu_u \frac{\partial u^{m_u}}{\partial x}, \; \mu_u = \frac{k_u}{k''}.$$

Такими же рассуждениями выводятся составляющие нормальных напряжений и по другим направлениям: $p_{ii}^{o}=\mu_i \frac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_i}$, $\mu_i = \frac{k_i}{k''}$, i=1,2,3; $u_1 \equiv u, u_2 \equiv v, u_3 \equiv w, x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z$.

Такие же формулы нормальных напряжений получаются для сил упругости в твердом деформируемом теле $\mathbf{F}_{упр} = -\mathbf{F}$.

Таким образом, нелинейному закону Гука соответствует *несимметричный* тензор напряжений в твердом деформируемом теле:

$$p_{ji}=\delta_{ji}\lambda \mathrm{div}\mathbf{u} + \mu_i \varepsilon_{ji}, \ \varepsilon_{ji} = \frac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_j}, i,j=1,2,3, \tag{2.1}$$

$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ - вектор перемещения. В нормальных напряжениях $\lambda\delta_{ji}\mathrm{div}\mathbf{u}$ по Ламе сохраняется, δ_{ji} - символ Кронеккера.

3. О фальсификациях и непригодности уравнений Ламе в нелинейной теории упругости анизотропных тел

Линейные уравнения теории упругости твердого деформируемого тела

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F} + (\lambda + \mu)\mathrm{graddiv}\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} \tag{3.1}$$

построены по гипотезе Ламе о *симметричности* тензора напряжений

$$p_{ji} = \lambda\delta_{ji}\mathrm{div}\mathbf{u} + 2\mu\varepsilon_{ji}, \varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}), p_{ji} = p_{ij,} i,j=1,2,3, \tag{3.2}$$

$\lambda, \mu -$ коэффициенты Ламе.

Гипотеза Ламе заключается в том, что элементы ε_{ji} тензора деформаций ε должны быть равны *удвоенному* симметричному тензору скоростей деформаций, то есть *удвоенной* первой половине искусственной формулы

$$du_i = \sum_{j=1}^{3} [\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) + [\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i})]dx_j, i=1,2,3, \tag{3.3}$$

(вторая антисимметричная половина (3.3) игнорируется [3-11]).

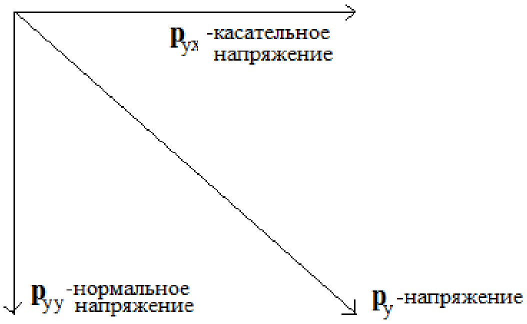
Формула (3.3) образована из неполного дифференциала смещений

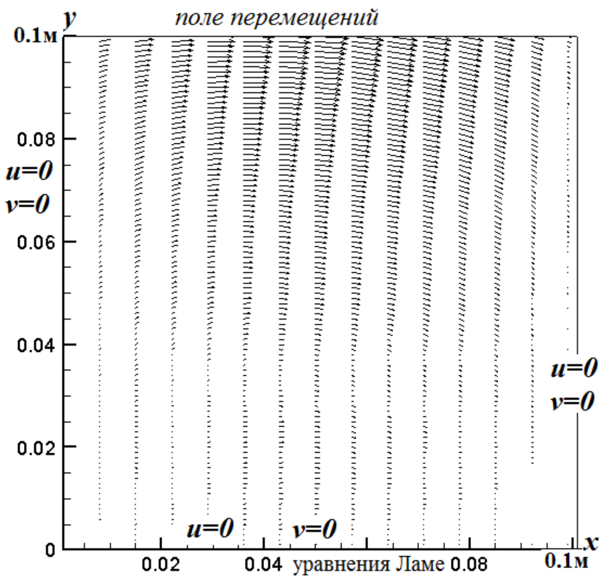
$$\tilde{d}u_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j, i=1,2,3, \tag{3.4}$$

(Вот полный дифференциал : $d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}dx_j = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}dt + \tilde{d}\mathbf{u}$).

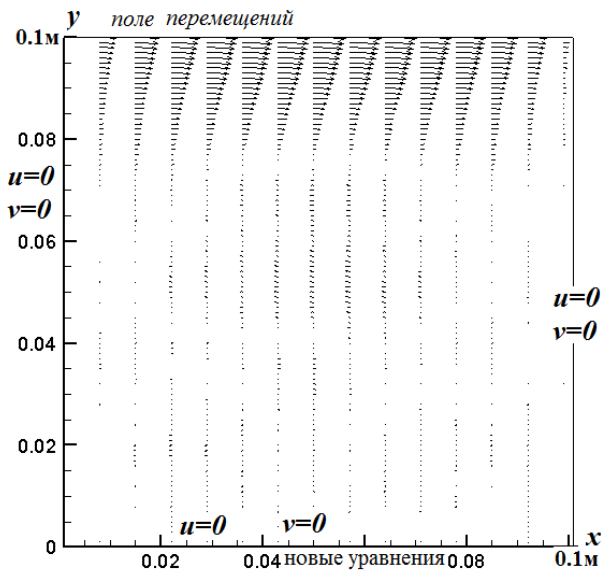
Таким образом, в [3-12] тензор напряжений Ламе (3.2) не соответствует и не вытекает из закона Гука. Очевидно, уже по построению не годится в анизотропных средах, тем более в нелинейном законе Гука.

Изложенный выше физический метод автора построения тензора напряжений упругого тела по закону Гука противоположен гипотезе Ламе и в точности следует определению, данному С.П. Тимощенко в [3]: «*Основная задача теории упругости заключается в том*, **чтобы по заданным действуюшим на твердое тело внешним силам** *находить те* **изменения формы,** *которые тело* *претерпевает, и те* **внутренние силы упругости,** *которые при этих изменениях формы возникают между частями тела».*

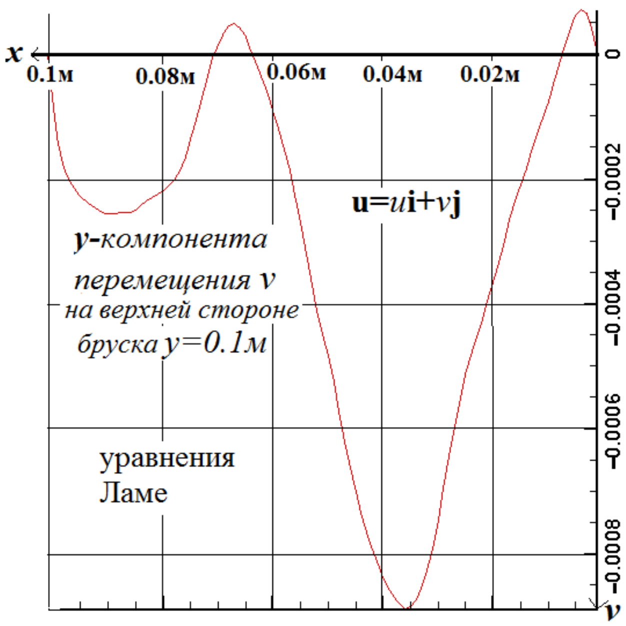




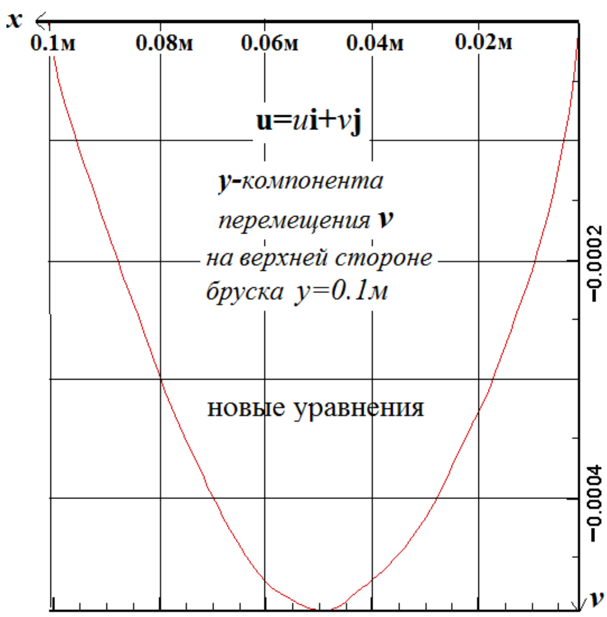
Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3



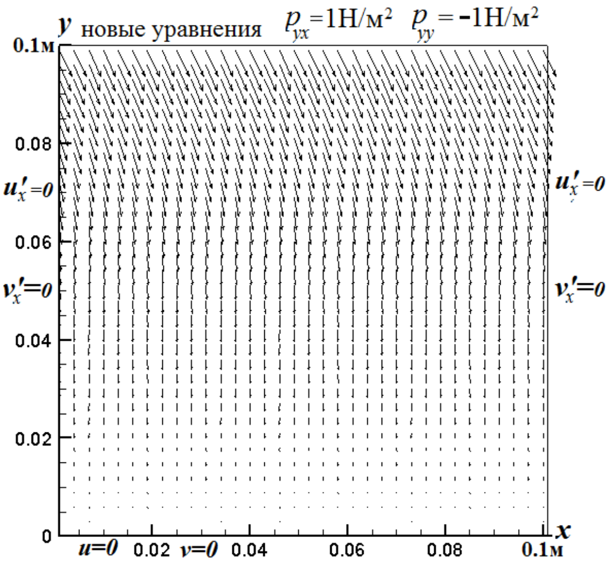
Фигура 4

Для сравнения уравнений Ламе (3.1) с новыми уравнениями с несимметричным тензором напряжений в изотропном теле $\mu_u = \mu_v = \mu_w = \mu$:

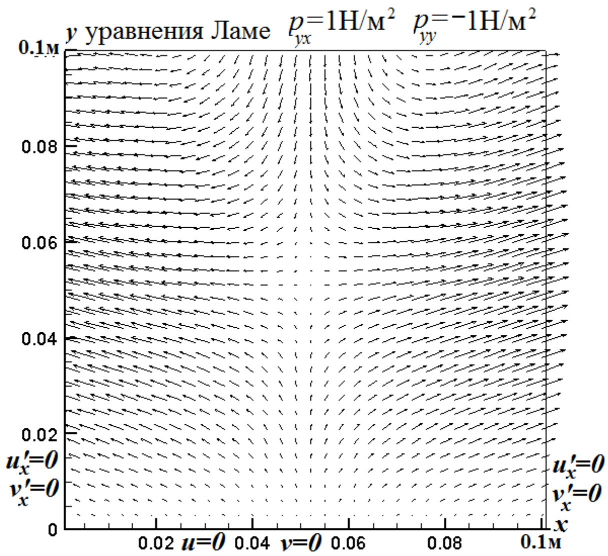
$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F} + \lambda \mathrm{graddiv}\mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \qquad (3.5)$$

выполнен расчет перемещений в квадратном деформируемом бруске размером 0.1м на 0.1м.

Вектор внешней силы $\mathbf{p}_y = \mathbf{p}_{yx} + \mathbf{p}_{yy} = p_{yx}\mathbf{i} + p_{yy}\mathbf{j}$ направлен под углом к верхней плоскости бруска. На фиг. 1 и 2 представлены поля векторов перемещений $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, на фиг. 3 и 4 эпюры поперечной скорости на верхней стороне бруска, всё на момент времени t=121.38 с. Плотность тела $\rho_0 = 7800 \text{кг/м}^3$. Конкретно положено p_{yy}=-1Н/м^2, p_{yx}=10 Н/м^2. Остальные грани бруска жестко закреплены, смещения на них равны нулю. Коэффициенты Ламе выбраны равными $\lambda = 1$ кг/(с^{2}м), $\mu = 100$ кг/(с^{2}м). Двумерные уравнения Ламе (3.1) и новые уравнения (3.5) реализованы по явным схемам [2] на сетке 100x100 с шагом по времени равным 0.0005с. Подтверждено явное различие между численными решениями, в особенности вертикальных перемещений на верхней стороне бруска на фиг. 3 и 4.



Фигура 5



Фигура 6

На фиг. 4 перемещение частиц верхней стороны бруска *y=0.1 м* происходит вниз, что подтверждается отрицательными значениями поперечного перемещения *v* по новым уравнениям. На фиг. 3 по уравнениям Ламе имеются положительные значения поперечной составляющей перемещения, что противоречит направлению действия внешней силы.

На фиг. 5 поле перемещений по новым уравнениям, на фиг. 6 поле переме- щений по уравнениям Ламе. Напряжения действуют на всей верхней стороне бруска. Результаты фиг. 1 - 6 практически подтверждают фальшивость урав- нений Ламе с симметричным тензором напряжений.

4.Уравнения нелинейной анизотропной теории упругости по обобщенному закону Гука с несимметричным тензором напряжений

Вытекающие из линейного закона Гука [1], элементы тензора деформаций $\varepsilon_{ji} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}, i,j=1,2,3$ равны непосредственно коэффициентам неполного дифференциала (3.4).

Несимметричный тензор напряжений обобщенного закона Гука

$$p_{ji}=\delta_{ji}\lambda \operatorname{div}\mathbf{u}+\mu_i\varepsilon_{ji},\ \ \varepsilon_{ji}=\frac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_j}, i,j=1,2,3, \tag{4.1}$$

в уравнениях динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\rho_0 F_i+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j}, i=1,2,3$$

образуют нелинейные уравнения с показателями степени по обобщенному закону Гука

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\rho_0 F_i+\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mu_i\Delta u_i^{m_i}, i=1,2,3 \tag{4.2}$$

5. Обоснование нечетности целых показателей степени

Уравнения (4.2) декартовых координатах

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\rho_0 F_i+\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mu_i\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 u_i^{m_i}}{\partial x_j^2}, i=1,2,3$$

представляются в дифференцированном виде

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\rho_0 F_i+\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mu_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_j}\right), i=1,2,3,$$

где $\dfrac{\partial u_i^{m_i}}{\partial x_j}=m_i u_i^{m_i-1}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Очевидно эквивалентные уравнения

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\rho_0 F_i+\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mu_i\frac{\partial}{\partial x_j}\left(m_i u_i^{m_i-1}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), i=1,2,3 \tag{5.1}$$

являются уравнениями гиперболического типа только для нечетных показателей степени $m_i=1;3;5;7;9$ и *т.д.*, $m_1\equiv m_u, m_2\equiv m_v, m_3\equiv m_w$ ибо всегда $m_i u_i^{m_i-1}\geq 0.$

6. Явная схема уравнений анизотропной нелинейной теории упругости

Рассматривается задача Коши-Дирихле для новых уравнений

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\rho_0 F_x+\lambda\frac{\partial p}{\partial x}+\mu_u\Delta u^{m_u},$$

$$\rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\rho_0 F_y+\lambda\frac{\partial p}{\partial y}+\mu_v\Delta v^{m_v},$$

$$\rho_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\rho_0 F_z+\lambda\frac{\partial p}{\partial z}+\mu_w\Delta w^{m_w},$$

$$p=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

с начальными условиями:

$$u\big|_{t=0}=d_u(\mathbf{r}), v\big|_{t=0}=d_v(\mathbf{r}), w\big|_{t=0}=d_w(\mathbf{r}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=d_{uu}(\mathbf{r}),\ \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=d_{vv}(\mathbf{r}),\ \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=d_{ww}(\mathbf{r})$$

и краевыми условиями на границе S :

$$u\big|_S = q_u(\mathbf{r}), v\big|_S = q_v(\mathbf{r}), w\big|_S = q_w(\mathbf{r}),$$

В области интегрирования задается равномерная сетка $\overline{\Omega}_h = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_k, 0 \le i \le N_x, 0 \le j \le N_y, 0 \le k \le N_z\}$, и сетка по времени $\overline{\Omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,..., N_\tau\}$.

Обозначения сеточных функций: $f_{ijk}^n \equiv f(x_i, y_j, z_k, t_n)$.

Начальные условия задаются во внутренних узлах:

$$u_{ijk}^0 = d_{uijk}, v_{ijk}^0 = d_{vijk}, w_{ijk}^0 = d_{wijk},$$

$$u_{ijk}^1 = d_{uijk} + \tau d_{uuijk}, v_{ijk}^1 = d_{vijk} + \tau d_{vvijk}, w_{ijk}^1 = d_{wijk} + \tau d_{wwijk},$$

$$1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1, 1 \le k \le N_z - 1$$

Явная разностная схема:

$$Q_{uijk}^n = \mu_u\Big[\frac{(u_{i-1jk}^n)^{m_u} - 2(u_{ijk}^n)^{m_u} + (u_{i+1jk}^n)^{m_u}}{h_x^2} + \frac{(u_{ij-1k}^n)^{m_u} - 2(u_{ijk}^n)^{m_u} + (u_{ij+1k}^n)^{m_u}}{h_y^2} +$$

$$+ \frac{(u_{ijk-1}^n)^{m_u} - 2(u_{ijk}^n)^{m_u} + (u_{ijk+1}^n)^{m_u}}{h_z^2} + \rho_0 F_{xijk}\Big],$$

$$Q_{vijk}^n = \mu_v\Big[\frac{(v_{i-1jk}^n)^{m_v} - 2(v_{ijk}^n)^{m_v} + (v_{i+1jk}^n)^{m_v}}{h_x^2} + \frac{(v_{ij-1k}^n)^{m_v} - 2(v_{ijk}^n)^{m_v} + (v_{ij+1k}^n)^{m_v}}{h_y^2} +$$

$$+ \frac{(v_{ijk-1}^n)^{m_v} - 2(v_{ijk}^n)^{m_v} + (v_{ijk+1}^n)^{m_v}}{h_z^2} + \rho_0 F_{yijk}\Big],$$

$$Q_{wijk}^n = \mu_w\Big[\frac{(w_{i-1jk}^n)^{m_w} - 2(w_{ijk}^n)^{m_w} + (w_{i+1jk}^n)^{m_w}}{h_x^2} + \frac{(w_{ij-1k}^n)^{m_w} - 2(w_{ijk}^n)^{m_w} + (w_{ij+1k}^n)^{m_w}}{h_y^2} +$$

$$+ \frac{(w_{ijk-1}^n)^{m_w} - 2(w_{ijk}^n)^{m_w} + (w_{ijk+1}^n)^{m_w}}{h_z^2} + \rho_0 F_{zijk}\Big],$$

$$\rho_0 \frac{u_{ijk}^{n+1} - 2u_{ijk}^n + u_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{uijk}^n + \lambda\Big(\frac{u_{i-1jk}^n - 2u_{ijk}^n + u_{i+1jk}^n}{h_x^2} +$$

$$+ \frac{v_{i+1j+1k}^n - v_{i+1j-1k}^n - v_{i-1j+1k}^n + v_{i-1j-1k}^n}{4h_x h_y} + \frac{w_{i+1jk+1}^n - w_{i+1jk-1}^n - w_{i-1jk+1}^n + w_{i-1jk-1}^n}{4h_x h_z}\Big),$$

$$\rho_0 \frac{v_{ijk}^{n+1} - 2v_{ijk}^n + v_{ijk}^{n-1}}{\tau^2} = Q_{vijk}^n + \lambda\Big(\frac{v_{ij-1k}^n - 2v_{ijk}^n + v_{ij+1k}^n}{h_y^2} +$$

$$+ \frac{u_{i+1j+1k}^n - u_{i+1j-1k}^n - u_{i-1j+1k}^n + u_{i-1j-1k}^n}{4h_x h_y} + \frac{w_{ij+1k+1}^n - w_{ij+1k-1}^n - w_{ij-1k+1}^n + w_{ij-1k-1}^n}{4h_z h_y}\Big),$$

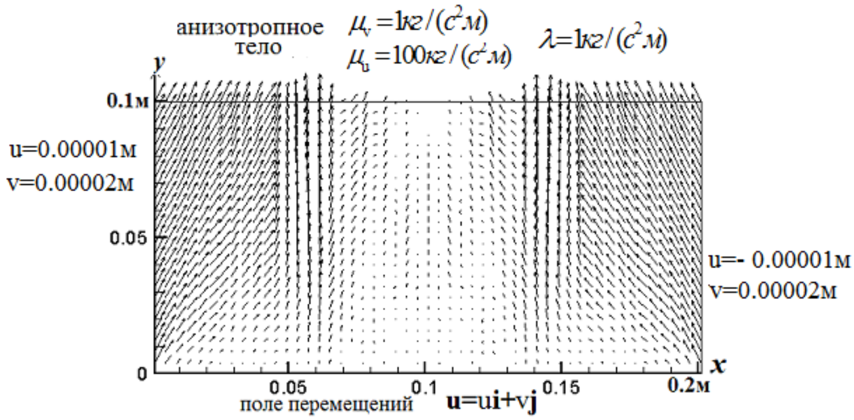
$$\rho_0 \frac{w^{n+1}_{ijk} - 2w^{n}_{ijk} + w^{n-1}_{ijk}}{\tau^2} = Q^{n}_{wijk} + \lambda\left(\frac{w^{n}_{ijk-1} - 2w^{n}_{ijk} + w^{n}_{ijk+1}}{h_z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{u^{n}_{i+1jk+1} - u^{n}_{i+1jk-1} - u^{n}_{i-1jk+1} + u^{n}_{i-1jk-1}}{4h_x h_z} + \frac{v^{n}_{ij+1k+1} - v^{n}_{ij+1k-1} - v^{n}_{ij-1k+1} + v^{n}_{ij-1k-1}}{4h_z h_y}\right),$$

$$i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1, k=1,...,N_z-1$$

Данная схема имеет погрешность 2-го порядка по всем переменным $O(\tau^2)+O(h_x^2)+O(h_y^2)+O(h_z^2)$. Устойчивость схемы обеспечивается вы- полнением условия Куранта:

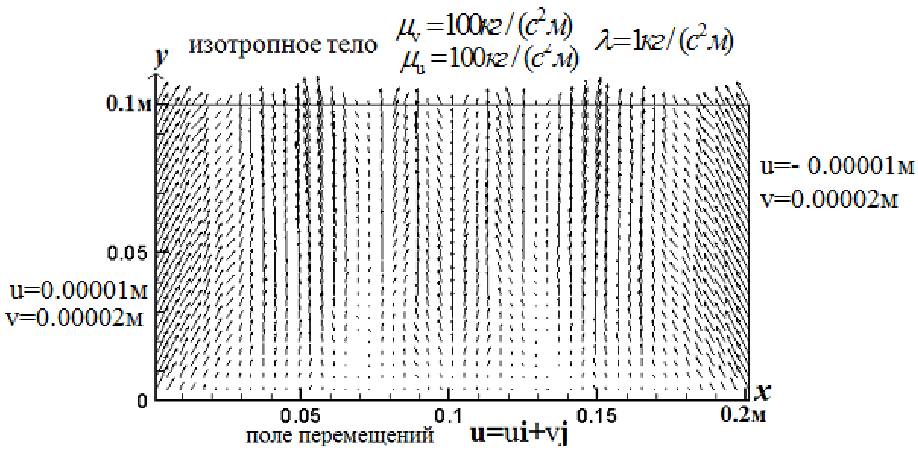
$$\frac{\tau^2 \mu}{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \le 1$$



Фигура 7

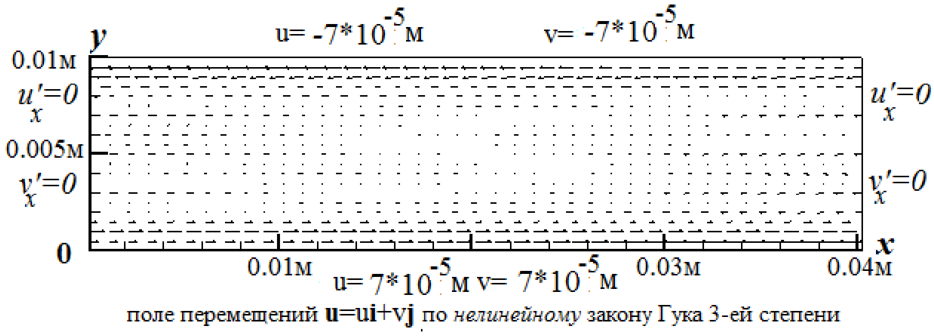
На фиг.7 представлено поле перемещений по линейному закону Гука в $m_u = 1, m_v = 1$ анизотропном теле, на фиг.8 в изотропном теле . На верхней плоскости бруска ставится краевое условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$

Очевидно, различие в коэффициентах μ_v приводит к разным полям перемещений, следовательно, к различным полям внутренних напряжений.



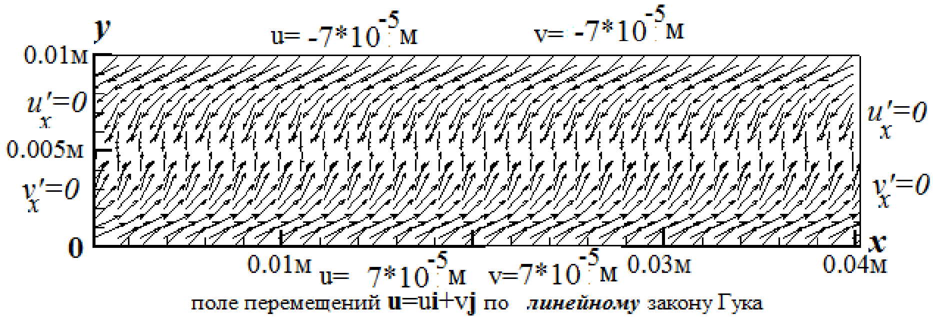
Фигура 8

На фиг.9 представлено поле перемещений в анизотропном теле по *нелинейному* степенному закону Гука $m_u = 3, m_v = 3$. На горизонтальных сторонах бруска заданы перемещения, на боковых сторонах ставятся краевые условия Неймана $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Коэффициенты Ламе в анизотропном бруске: $\lambda = 104.4 кг/(c^2 м), \mu_u = 80 кг/(c^2 м), \mu_v = 40 кг/(c^2 м)$



Фигура 9

На фиг. 10 представлено поле перемещений в анизотропном теле по ***линейному*** закону Гука $m_u = 1, m_v = 1$.



Фигура 10

Выводы

Физичные выводы нормальных и касательных напряжений доказывают *несимметричность* тензора напряжений в твердом деформируемом теле как для изотропного закона Гука так и анизотропного, в том числе нелинейного. Конкретные примеры численных расчетов состояния упругого тела показывают неадекватность и несостоятельность гипотезы о *симметричности* тензора напряжений сплошной среды и соответственно уравнений теории упругости Ламе.

Несимметричность тензора напряжений открывает широкие возможности для моделирований перемещений в твердом деформируемом теле, что пока-зано на применении закона Гука в анизотропном теле фиг. 7 и нелинейного закона Гука фиг. 9.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Джакупов К.Б. Моделирование по закону Гука в теории упругости**.** Несимметричность тензора напряжений //Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь - декабрь 2016 г. с.96-103. **ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Prtnt)**

[2] Джакупов К.Б. Ликвидация фальсификаций и модернизация основ механики сплошной среды- Алматы: Изд-во «Ғылым ордасы», 2017г. С.435.
ISBN 978-601-280-859-9

[3] Тимошенко С.П. Теория упругости. М.: «Наука»,1979г. 851 с.

[4] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974г. 318 с.

[5] Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. М.: «Наука»,1973г. 315 с.

[6] Лурье А.И. Теория упругости. М.: «Наука»,1970г. 984 с.
[7] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.М.: Изд-во МГУ, 1978 г. 287 с.
[8] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: «Наука», 1970 г. 547 с.
[9] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967.
[10] Eringen A.C. Mechanics of Continua.N.Y., Wiley, 1967.
[11] Новацкий В. Теория упругости. М.: «Мир», 1975.
[12]Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976.
[13] Джакупов К.Б. Закон Гука в теории упругости анизотропных тел // Известия НАН РК, серия физ.-мат., 4(424), июль - август 2017 г. с.241-252. **ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Prtnt)**

К. Б. Жақып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан
Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

СЫЗЫҚСЫЗ ГУКТЫҢ ЗАҢЫ БІРТЕКТЕС ЕМЕС ЖӘНЕ АНИЗОТРОПТЫҚ ДЕНЕЛЕРДІҢ СЕРПІЛІМДІК ТЕОРИЯСЫНДА

Аннотация. Тікелей сызықсыз Гук заңымен қатты майысқақ денелердің кернеулер тензорының компоненттері шығарылған. Ламенің екінші еселеушінің бағыттан тәуелділігі есептелген. Майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының кернеулер тензорының беттеспегендігі дәлелденген. Осыған сәйкес майысқақ қатты дененің сызықсыз серпілімдік теориясының теңдеулері жасалынған. Ламе гипотезасында толық емес жылжу дифференциалының беттескен жартысы қана пайдаланғаны көрсетілген, екінші антибеттескен жартысы лақтырылынған, соның салдарынан Ламе кернеулер тензорының беттескендігі шыққан. Жаңа теңдеулер үшін 2 ретті нақтылығы бар айқын схема жасалынған, соны пайдаланып жазық жолақтың серпілімдік күйі саналған, үстіңгі жақтауының ортасыны жанама кернеулер және тік кернеулер әсер еткенде. Дәл сондай схема Ламе теңдеулеріне де қолдалынған. Саналған жылжулардың үлестірулік суреттері салыстырынып жатқан теңдеулердің айырмашылықтарын бейнелейді және Ламе теңдеу- лерінің майысқақ қатты дененің күйіне сәйкес еместігін көрсетеді. Ламе теңдеулерінің жалғандығы теориялық және физикалық тұрпатта бекітілген.
Тірек сөздер. анизотроптылық, созылу, кернеулер, тензор, теңдеулер.

K.B. Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan,
Kazak National University named after Al-Farabi

NONLINEAR HOOKE LAW IN THE THEORY OF ELASTICITY OF INHOMOGENEOUS AND ANISOTROPIC BODIES

Abstract. Directly from the physical connection with the nonlinear Hooke law, the components of the stress tensor of a rigid deformable body and new nonlinear equations of the theory of elasticity with an asymmetric stress tensor are derived, as a special case, we obtain equations with the linear Hooke's law. The Lame hypothesis and Lame's equations do not have a physical connection with Hooke's law, this is their falsehood. Lame took as a basis the approximate formula of the incomplete differential and suggested in his hypothesis the proportionality of the stress tensor components to the symmetrical half of the given incomplete differential of displacement, and the antisymmetric half of the differential is discarded, which is the result of the false symmetry of the Lame stress tensor. The new nonlinear equations are approximated by an explicit scheme, with the use of which the elastic state of a flat bar is numerically calculated with the normal and tangential stresses acting on the upper face. The same scheme is applied to the Lame equations. The obtained patterns of displacements distribution clearly demonstrate the difference in the solutions of the comparable systems of elasticity equations, as well as the discrepancy between the solution of the Lame equations for a given state of the deformed body. The falsity of Lame's equations is confirmed theoretically and physically.
Keywords: tensile, tangent, normal, stress, tensor.

МАЗМҰНЫ

* * *

СОДЕРЖАНИЕ

* * *

CONTENTS

Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Т.А. Апендиев, Д.С. Аленов*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 15.02.2018.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
9 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19