

ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

1 (317)

**ҚАҢТАР – АҚПАН 2018 ж.
ЯНВАРЬ – ФЕВРАЛЬ 2018 г.
JANUARY – FEBRUARY 2018**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

NAS RK is pleased to announce that News of NAS RK. Series of physico-mathematical scientific journal has been accepted for indexing in the Emerging Sources Citation Index, a new edition of Web of Science. Content in this index is under consideration by Clarivate Analytics to be accepted in the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index, and the Arts & Humanities Citation Index. The quality and depth of content Web of Science offers to researchers, authors, publishers, and institutions sets it apart from other research databases. The inclusion of News of NAS RK. Series of physico-mathematical in the Emerging Sources Citation Index demonstrates our dedication to providing the most relevant and influential content of physics and mathematics to our community.

Қазақстан Республикасы Ұлттық ғылым академиясы "ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы" ғылыми журналының Web of Science-тің жаңаланған нұсқасы Emerging Sources Citation Index-те индекстелуге қабылданғанын хабарлайды. Бұл индекстелу барысында Clarivate Analytics компаниясы журналды одан әрі the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index және the Arts & Humanities Citation Index-ке қабылдау мәселесін қарастыруда. Web of Science зерттеушілер, авторлар, баспашылар мен мекемелерге контент тереңдігі мен сапасын ұсынады. ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математика сериясы Emerging Sources Citation Index-ке енуі біздің қоғамдастық үшін ең өзекті және беделді физика-математика бойынша контентке адалдығымызды білдіреді.

НАН РК сообщает, что научный журнал «Известия НАН РК. Серия физико-математическая» был принят для индексирования в Emerging Sources Citation Index, обновленной версии Web of Science. Содержание в этом индексировании находится в стадии рассмотрения компанией Clarivate Analytics для дальнейшего принятия журнала в the Science Citation Index Expanded, the Social Sciences Citation Index и the Arts & Humanities Citation Index. Web of Science предлагает качество и глубину контента для исследователей, авторов, издателей и учреждений. Включение Известия НАН РК. Серия физико-математическая в Emerging Sources Citation Index демонстрирует нашу приверженность к наиболее актуальному и влиятельному контенту по физике и математике для нашего сообщества.

Б а с р е д а к т о р ы
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі **Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

Жұмаділдаев А.С. проф., академик (Қазақстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Қазақстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., корр.-мүшесі (Қазақстан)
Өмірбаев У.У. проф. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Жүсіпов М.А. проф. (Қазақстан)
Жұмабаев Д.С. проф. (Қазақстан)
Асанова А.Т. проф. (Қазақстан)
Бошқаев К.А. PhD докторы (Қазақстан)
Сұраған Д. корр.-мүшесі (Қазақстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Қырғыстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Белорус)
Пашаев А. проф., академик (Әзірбайжан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде
01.06.2006 ж. берілген №5543-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2018

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

Главный редактор
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК **Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

Джумадильдаев А.С. проф., академик (Казахстан)
Кальменов Т.Ш. проф., академик (Казахстан)
Жантаев Ж.Ш. проф., чл.-корр. (Казахстан)
Умирбаев У.У. проф. чл.-корр. (Казахстан)
Жусупов М.А. проф. (Казахстан)
Джумабаев Д.С. проф. (Казахстан)
Асанова А.Т. проф. (Казахстан)
Бошкаев К.А. доктор PhD (Казахстан)
Сураган Д. чл.-корр. (Казахстан)
Quevedo Hernando проф. (Мексика),
Джунушалиев В.Д. проф. (Кыргызстан)
Вишневский И.Н. проф., академик (Украина)
Ковалев А.М. проф., академик (Украина)
Михалевич А.А. проф., академик (Беларусь)
Пашаев А. проф., академик (Азербайджан)
Такибаев Н.Ж. проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.
Тигиняну И. проф., академик (Молдова)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов
Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2018

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

E d i t o r i n c h i e f

doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK **G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d :

Dzhumadildayev A.S. prof., academician (Kazakhstan)
Kalmenov T.Sh. prof., academician (Kazakhstan)
Zhantayev Zh.Sh. prof., corr. member. (Kazakhstan)
Umirbayev U.U. prof. corr. member. (Kazakhstan)
Zhusupov M.A. prof. (Kazakhstan)
Dzhumabayev D.S. prof. (Kazakhstan)
Asanova A.T. prof. (Kazakhstan)
Boshkayev K.A. PhD (Kazakhstan)
Suragan D. corr. member. (Kazakhstan)
Quevedo Hernando prof. (Mexico),
Dzhunushaliyev V.D. prof. (Kyrgyzstan)
Vishnevskiy I.N. prof., academician (Ukraine)
Kovalev A.M. prof., academician (Ukraine)
Mikhalevich A.A. prof., academician (Belarus)
Pashayev A. prof., academician (Azerbaijan)
Takibayev N.Zh. prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.
Tiginyanu I. prof., academician (Moldova)

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www.nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2018

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 1, Number 317 (2018), 14 – 17

B.S. Kalmurzayev¹, N.A. Bazhenov²

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;

²Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia.

birzhan.kalmurzayev@gmail.com, bazhenov@math.nsc.ru

EMBEDDABILITY OF m -DEGREES INTO EQUIVALENCE RELATIONS IN THE ERSHOV HIERARCHY

Abstract. The paper is devoted to the study of equivalence relations in the hierarchy of Ershov. An equivalence relation R on ω is computably reducible to an equivalence relation S if there exists a computable function $f(x)$ such that for any x and y , the conditions xRy and $f(x)Sf(y)$ are equivalent. In this paper we construct isomorphic embeddings of semilattices of m -degrees into partial orders of equivalence relations in the hierarchy of Ershov with respect to computable reducibility.

Key words. Equivalence relations, computable reducibility, hierarchy of Ershov, computably enumerable sets, semilattice of computably enumerable m -degrees.

A set A is m -reducible to a set B (denoted by $A \leq_m B$) if there is a computable function f such that for any $x \in \omega$ the conditions $x \in A$ and $f(x) \in B$ are equivalent. Such a function f is called a reduction function. A set A is 1-reducible to a set B (denoted by $A \leq_1 B$) if $A \leq_m B$ and the corresponding reduction function is injective. A formula $A \equiv_m B$ means that $A \leq_m B$ and $B \leq_m A$. The m -degree of a set A is denoted by $d(A)$, i.e. $d(A) = \{B: A \equiv_m B\}$. We use the same notation \leq_m to denote a natural ordering on the set of m -degrees:

$$d(A) \leq_m d(B) \Leftrightarrow A \leq_m B.$$

A partial order $L_m^0 = (\{d(X): X \text{ is a recursively enumerable set and } X \neq \emptyset, \omega\}, \leq_m)$ is an upper semilattice and an ideal in the upper semilattice of all m -degrees. The supremum operation in L_m^0 is induced by the join of sets:

$$A \oplus B \Leftrightarrow \{2x: x \in A\} \cup \{2x + 1: x \in B\}.$$

It is well-known that L_m^0 contains the greatest and the least elements. For further definitions and preliminaries on m -reducibility, we refer the reader to the monographs [1, 2].

Definition ([6]). A set A belongs to the class Σ_n^{-1} in the hierarchy of Ershov if there are computable functions $f(x, t)$ and $h(x, t)$ such that for any $x, t \in \omega$, the following conditions hold:

- (1) $A(x) = \lim_s f(x, s)$ and $f(x, 0) = 0$;
- (2) $h(x, 0) = n$ & $h(x, t + 1) \leq h(x, t)$;
- (3) $f(x, t + 1) \neq f(x, t) \Rightarrow h(x, t + 1) < h(x, t)$.

If a pair of functions $\langle f, h \rangle$ satisfies the conditions above, then we say that $\langle f, h \rangle$ is a Σ_n^{-1} -approximation of the set A . A set A lies in the class Π_n^{-1} in the hierarchy of Ershov if the complement of A belongs to the class Σ_n^{-1} . A set from the class Σ_n^{-1} (Π_n^{-1}) is also called a Σ_n^{-1} -set (Π_n^{-1} -set). Σ_1^{-1} -sets are known as computably enumerable sets. A detailed exposition of results on these sets can be found in [3, 4, 5, 6].

The classes Σ_n^{-1} and Π_n^{-1} are closed downwards under m -reducibility. It is known [3] that each of the classes contains a universal set. Moreover, the partial orders (Σ_n^{-1}, \leq_m) and (Π_n^{-1}, \leq_m) are upper semilattices.

Proposition 1. A set A belongs to Σ_n^{-1} if and only if there is a computable function $h(x, t)$ such that for any $x, t \in \omega$, the following holds:

- (1) $A(x) = \text{rest}(\lim_s h(x, s), 2)$;
- (2) $h(x, 0) = 0 \ \& \ h(x, t) \leq h(x, t + 1) \ \& \ h(x, t) \leq n$.

Proposition 2. A set A belongs to Π_n^{-1} if and only if there is a computable function $h(x, t)$ such that for any $x, t \in \omega$, the following holds:

- (1) $A(x) = \overline{\text{sg}}(\text{rest}(\lim_s h(x, s), 2))$;
- (2) $h(x, 0) = 0 \ \& \ h(x, t) \leq h(x, t + 1) \ \& \ h(x, t) \leq n$.

We assume that all considered sets and equivalence relations are defined on the domain ω . For a non-zero $n \in \omega$, Id_n is a computable equivalence relation which satisfies the following: $x \text{Id}_n y$ if and only if x and y are equivalent modulo n . By Id we denote the identity equivalence relation. For an equivalence relation E and $a \in \omega$, $[a]_E$ denotes the E -equivalence class of the element a .

Definition. An equivalence relation E on ω is called a Σ_n^{-1} equivalence relation (a Π_n^{-1} equivalence relation) if the set E is a Σ_n^{-1} -set (Π_n^{-1} -set).

An equivalence relation R is *computably reducible* to an equivalence relation Q (denoted by $R \leq_c Q$) if there is a computable function f such that for any $x, y \in \omega$, the condition $(x, y) \in R$ holds if and only if $(f(x), f(y)) \in Q$; i.e. there is an algorithm which transforms different R -equivalence classes into different Q -equivalence classes. Equivalence relations R and Q are equivalent if each of them is reducible to the other one. The family of all equivalence relations which are equivalent to R is called the degree of an equivalence relation R .

It is clear that an equivalence relation E satisfies $E <_c \text{Id}$ if and only if $E \equiv_c \text{Id}_n$ for some $n \in \omega$.

Definition (A. Sorbi and U. Andrews). An equivalence relation E is *dark* if E is incomparable with the identity equivalence relation under the reducibility \leq_c .

For an arbitrary c.e. set A , let $R_A = \{(x, y) : x = y \vee \{x, y\} \subseteq A\}$.

Proposition ([11]). Let A, B be non-empty c.e. sets.

- 1) R_A is computable if and only if A is computable.
- 2) $A \leq_1 B$ implies that $R_A \leq_c R_B$.
- 3) If $R_A \leq_c R_B$, then $A \leq_m B$.

The proposition implies that c.e. 1-degrees are isomorphically embeddable into the structure of c.e. equivalence relations. It is well-known that c.e. 1-degrees do not form a semilattice. Hence, the structure of equivalence relations under computable reducibility is also not a semilattice.

In this work we study embeddings of semilattices of m -degrees into structures of equivalences in the hierarchy of Ershov. Results on embeddings of c.e. m -degrees into Rogers semilattices can be found in [7, 8, 9, 10]. For an embedding of c.e. 1-degrees into structures of equivalence relations, the reader is referred to [11, 12].

Embedding of semilattices of m -degrees into structures of equivalence relations in the hierarchy of Ershov.

Theorem 1. For any $n > 0$, the semilattice (Σ_n^{-1}, \leq_m) is isomorphically embeddable into the structure $(\Pi_{2n}^{-1} \text{ equivalence relations}, \leq_c)$.

Proof. We consider the following operator: for an arbitrary set X , we set

$$T(X) = \{(x, y) : \{x, y\} \subseteq X \vee \{x, y\} \subseteq \overline{X}\}.$$

It is clear that for any set X , the set $T(X)$ is an equivalence relation. We prove that the map $X \rightarrow T(X)$ induces an isomorphic embedding from the upper semilattice (Σ_n^{-1}, \leq_m) into the structure $(\Pi_{2n}^{-1} \text{ equivalence relations}, \leq_c)$. We also show that our estimate of the level in the hierarchy of Ershov is sharp. In order to obtain this, we prove the following lemmas.

Lemma 1. If $X \in \Sigma_n^{-1}$, then $T(X) \in \Pi_{2n}^{-1}$.

Proof of Lemma 1. Suppose that a pair of functions $\langle f_X, h_X \rangle$ is a Σ_n^{-1} -approximation of the set X . We build an approximation of the set $T(X)$: for any $x, y \in \omega$, set

$$\begin{aligned} f((x, y), t) &= |f_X(x, t) + f_X(y, t) - 1|; \\ h((x, y), t) &= h_X(x, t) + h_X(y, t). \end{aligned}$$

We prove that the pair $\langle f, h \rangle$ is a Π_{2n}^{-1} -approximation of the set $T(X)$.

1) $f((x, y), 0) = |f_X(x, 0) + f_X(y, 0) - 1| = 1$; and

$$\lim_s f((x, y), s) = |\lim_s f_X(x, s) + \lim_s f_X(y, s) - 1| = |X(x) + X(y) - 1|.$$

The latter equation implies the following: $T(X)(x, y) = 1$ if and only if $X(x) = X(y)$. Therefore, $T(X)(x, y) = 1$ if and only if $\lim_s f((x, y), s) = 1$.

2) $h((x, y), 0) = h_X(x, 0) + h_X(y, 0) = n + n = 2n$; and $h((x, y), t + 1) = h_X(x, t + 1) + h_X(y, t + 1) \leq h_X(x, t) + h_X(y, t) = h((x, y), t)$.

3) Suppose that $f((x, y), t + 1) \neq f((x, y), t)$. Thus, either $f_X(x, t + 1) \neq f_X(x, t)$, or $f_X(y, t + 1) \neq f_X(y, t)$. Hence, either $h_X(x, t + 1) < h_X(x, t)$, or $h_X(y, t + 1) < h_X(y, t)$. In turn, this means that $h((x, y), t + 1) = h_X(x, t + 1) + h_X(y, t + 1) < h_X(x, t) + h_X(y, t) = h((x, y), t)$.

Therefore, the pair of functions $\langle f, h \rangle$ is a Π_{2n}^{-1} -approximation of the set $T(X)$. Lemma 1 is proved.

Lemma 2. If $F \leq_c T(X)$ for a Σ_n^{-1} -set X , then $F \equiv_c T(Y)$ for some Σ_n^{-1} -set Y .

Proof of Lemma 2. Suppose that for an arbitrary equivalence relation F , we have $F \leq_c T(X)$ via a function f . Then the equivalence relation $T(X)$ contains at most two equivalence classes. Hence, the equivalence relation F also contains at most two classes. Therefore, if $Y = f^{-1}(X)$, then $F = T(Y)$. Lemma 2 is proved.

Lemma 3. $X \leq_m Y$ if and only if $T(X) \leq_c T(Y)$.

Proof of Lemma 3. Both reductions can be realized by the same function. Lemma 3 is proved.

Lemma 4. For any Π_{2n}^{-1} -set A , there is a Σ_n^{-1} -set B such that $A \leq_m T(B)$.

Proof of Lemma 4. Suppose that a pair of functions $\langle f_A, h_A \rangle$ is a Π_{2n}^{-1} -approximation of a set A . Moreover, let h_A be the function from Proposition 2. We build a Σ_n^{-1} approximation of a set B as follows:

$$\begin{aligned} f_B(2x, t) &= \begin{cases} 1, & \text{rest}(h_A(x, t), 4) = 2; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \\ f_B(2x + 1, t) &= \begin{cases} 0, & \text{rest}(h_A(x, t), 4) = 0; \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} h_B(x, 0) = n; \\ h_B(x, t + 1) = h_B(x, t) - |f_B(x, t + 1) - f_B(x, t)|. \end{cases}$$

It is not difficult to see that a pair of functions $\langle f_B, h_B \rangle$ is a Σ_n^{-1} -approximation of the set B . Furthermore, it is not hard to check that the reduction $A \leq_m T(B)$ can be realized by the function $f(x) = (2x, 2x + 1)$. Lemma 4 is proved.

Corollary 1. If X is an m -complete Σ_n^{-1} -set, then $T(X)$ is an m -complete Π_{2n}^{-1} -set.

Proof. Let X be an m -complete Σ_n^{-1} -set. We prove that any Π_{2n}^{-1} -set A satisfies $A \leq_m T(X)$. The proof of the theorem implies that there is a Σ_n^{-1} -set Y such that $A \leq_m T(Y)$. It is clear that $T(Y) \leq_c T(X)$. Suppose that the reduction $T(Y) \leq_c T(X)$ is realized by a function f ; then the reduction $T(Y) \leq_m T(X)$ is realized by the function

$$h((x, y)) = (f(x), f(y)).$$

Since m -reducibility is transitive, we have $A \leq_m T(X)$.

Corollary 2. For any non-computable set X , the equivalence relation $T(X)$ is dark.

Corollary 3. *The semilattice of computably enumerable m -degrees is isomorphically embeddable into the structure $(\Pi_2^{-1}$ equivalence relations, \leq_c).*

Corollaries 2 and 3 are evident.

Question. Is it possible to isomorphically embed the semilattice of c.e. m -degrees into the structure of c.e. equivalence relations?

The work of N.A. Bazhenov was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 16-31-60058 mol_a_dk.

The work of B.S. Kalmurzaev was supported by Grant 3952/GF4 "Equivalence relations, preordered structures, and algorithmic reducibilities on them, as a mathematical model of databases" of the Science Committee of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

- [1] Rogers H., Theory of recursive functions and effective computability. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [2] Mal'cev A.I., Algorithms and recursive functions, Groningen, Wolters-Noordhoff Publishing, 1970.
- [3] Ershov Yu.L., A hierarchy of sets. I, Algebra and Logic, vol.7, no.1, 1968, pp.25-43.
- [4] Ershov Yu.L., On a hierarchy of sets. II, Algebra and Logic, vol.7, no.4, 1968, pp.212-232.
- [5] Ershov Yu.L., On a hierarchy of sets. III, Algebra and Logic, vol.9, no.1, 1970, pp.20-31.
- [6] Arslanov M.M. The hierarchy of Ershov. Kazan State University, Kazan, 2007. In Russian.
- [7] Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T., Computable numberings in the hierarchy of Ershov, in: S.S. Goncharov (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proc. 9th Asian logic conf. (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005), NJ, World Scientific, 2006, 17-30.
- [8] Badaev S.A., Manat M., Sorbi A., Rogers semilattices of families of two embedded sets in the Ershov hierarchy, Mathematical logic quarterly. Vol. 58, No 4-5, 2012, 366-376.
- [9] Kalmurzaev B.S., Embeddability of the semilattice L_m^0 in Rogers semilattices, Algebra and Logic, vol.55, no.3, 2016, pp.217-225.
- [10] Ershov Yu.L., Theory of numberings, Moscow, Nauka, 1977. In Russian.
- [11] Su Gao, Peter Gerdes, Computably enumerable equivalence relations, Studia Logica, 67, 2001, 27-59.
- [12] Andrews U., Lempp S., Miller J.S., Ng K.M., San Mauro L., Sorbi A., Universal computably enumerable equivalence relations, Journal of Symbolic Logic, vol. 79, no. 1, 2014, 60-88.

УДК 510.54

Б.С. Калмурзаев¹, Н.А. Баженов²

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;

²Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.

О ВЛОЖИМОСТИ - СТЕПЕНЕЙ В ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию отношений эквивалентности в иерархии Ершова. Отношение эквивалентности R на ω -вычислимо сводится к отношению эквивалентности S , если существует вычислимая функция $f(x)$, такая что, для любых x и y условия xRy и $f(x)Sf(y)$ эквивалентны. В данной работе строятся изоморфные вложения полурешёток -степеней в частичные порядки отношений эквивалентности в иерархии Ершова относительно вычислимой сводимости.

Ключевые слова. Отношения эквивалентности, вычислимая сводимость, иерархия Ершова, вычислимо перечислимые множества, полурешётка вычислимо перечислимых m -степеней.

Б.С. Калмурзаев¹, Н.А. Баженов²

¹аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан;

²РҒА СБ С.Л. Соболев атындағы математика институты, Новосибирск, Ресей.

ЕРШОВ ИЕРАРХИЯСЫНДА m -ДЕНГЕЙЛЕРДІҢ ЭКВИВАЛЕНТТІК ҚАТЫНАСТАРҒА ЕНГІЗУЛЕРІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл мақала Ершов иерархиясындағы эквиваленттік қатынастарды зерттеуге бағышталған. ω жиынында анықталған R эквиваленттік қатынасы S эквиваленттік қатынасына есептелімді көшіріледі деп атаймыз, егер кез келген x және y элементтері үшін xRy және $f(x)Sf(y)$ шарттары эквивалент болатындай $f(x)$ есептелімді функциясы табылатын болса. Бұл мақалада Ершов иерархиясындағы m -денгейлерді есептелімді көшірулерге байланысты эквиваленттік қатынастардың жартлай ретіне изоморфты енгізулері құрылады.

Тірек сөздер. Эквиваленттік қатынастар, есептелімді көшірулер, Ершов иерархиясы, рекурсив саналымды жиындар, рекурсив саналымды m -денгейлердің жатрыторы.

МАЗМУНЫ

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусов А.А., Симонова О.В.</i> Математикалық ұғымдардың және әдістемелік жұмыстардың пайда болу кезеңдерінің мән-мағынасының көрнекі моделду (ағылшын тілінде).....	6
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> Ершов иерархиясында t -деңгейлердің эквиваленттік қатынастарға енгізулері туралы (ағылшын тілінде).....	14
<i>Байжанов С.С., Құлтешов Б.Ш.</i> Бинарлы предикаттармен есептік-категориялық босаң O -минималдық теориялар байыту туралы (ағылшын тілінде).....	18
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Асқарова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Қудайкулов А.К., Ташев А.А.</i> Ұзындығы шектеулі тұрақты термомеханикалық күйдің бір мезгілде шектік температураның және бүйірлік жылу алмасу әсері есебін талдамалық шешу (ағылшын тілінде).....	25
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> Коэффициенттері айнымалы түрі арнайы толқын теңдеуінің Гурсалық есебінің периодты шешімі туралы (ағылшын тілінде).....	34
<i>Байдуллаев С., Байдуллаев С. С.</i> Магнитотеллурлық зондылау әдісінің жағдайын талдау (ағылшын тілінде).....	51
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> Сызықсыз Гуктың заңы біртектес емес және анизотроптық денелердің серпілімдік теориясында (ағылшын тілінде).....	63
<i>Юнусов А.А., Дасибеков А., Корганбаев Б.Н., Юнусова А.А., Абдиева З.А., Коспанбеова Н.</i> Терендік бойынша айнымалы деформация модульді грунттер консолидациясының көпөлшемді есептері (ағылшын тілінде).....	75

* * *

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусов А.А., Симонова О.В.</i> Математикалық ұғымдардың және әдістемелік жұмыстардың пайда болу кезеңдерінің мән-мағынасының көрнекі моделду (ағылшын тілінде).....	87
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> Ершов иерархиясында t -деңгейлердің эквиваленттік қатынастарға енгізулері туралы (орыс тілінде).....	94
<i>Байжанов С.С., Құлтешов Б.Ш.</i> Бинарлы предикаттармен есептік-категориялық босаң O -минималдық теориялар байыту туралы (орыс тілінде).....	98
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Асқарова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Қудайкулов А.К., Ташев А.А.</i> Ұзындығы шектеулі тұрақты термомеханикалық күйдің бір мезгілде шектік температураның және бүйірлік жылу алмасу әсері есебін талдамалық шешу (орыс тілінде).....	106
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> Коэффициенттері айнымалы түрі арнайы толқын теңдеуінің Гурсалық есебінің периодты шешімі туралы (орыс тілінде).....	114
<i>Жақып-тегі К. Б.</i> Сызықсыз Гуктың заңы біртектес емес және анизотроптық денелердің серпілімдік теориясында (орыс тілінде).....	130

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А., Симонова О.В.</i> Наглядное моделирование этапов проявления сущности математических понятий и методических процедур (на английском языке).....	6
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> О Вложимости - степеней в отношении эквивалентности в иерархии Ершова (на английском языке).....	14
<i>Байжанов С.С., Кулешов Б.Ш.</i> Об обогащении счетно-категоричных слабо О-минимальных теорий бинарными предикатами (на английском языке).....	18
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Аскарлова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Кудайкулов А.К., Таиев А.А.</i> Аналитическое решение задачи о установившемся термомеханическом состоянии стержня ограниченной длины при одновременном наличии концевых температур и боковых теплообмена (на английском языке).....	25
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> О периодическом решении задачи Гурса для волнового уравнения специального вида с переменными коэффициентами (на английском языке).....	34
<i>Байдуллаев С., Байдуллаев С. С.</i> Анализ состояния метода магнитотеллурического зондирования (на английском языке).....	51
<i>Джакупов К.Б.</i> Нелинейный закон Гука в теории упругости неоднородных и анизотропных тел (на английском языке).....	63
<i>Юнусов А.А., Дасибеков А., Корганбаев Б.Н., Юнусова А.А., Абдиева З.А., Коспанбеова Н.</i> Многомерные задачи консолидации грунтов с переменным по глубине модулем деформации (на английском языке).....	75

* * *

<i>Смирнов Е.И., Жохов А.Л., Юнусов А.А., Юнусова А.А., Симонова О.В.</i> Наглядное моделирование этапов проявления сущности математических понятий и методических процедур (на русском языке).....	87
<i>Калмурзаев Б.С., Баженов Н.А.</i> О Вложимости - степеней в отношении эквивалентности в иерархии Ершова (на русском языке).....	94
<i>Байжанов С.С., Кулешов Б.Ш.</i> Об обогащении счетно-категоричных слабо О-минимальных теорий бинарными предикатами (на русском языке).....	98
<i>Жумаханова А.С., Ногайбаева М.О., Аскарлова А., Аришдинова М.Т., Бегалиева К.Б., Кудайкулов А.К., Таиев А.А.</i> Аналитическое решение задачи о установившемся термомеханическом состоянии стержня ограниченной длины при одновременном наличии концевых температур и боковых теплообмена (на русском языке).....	106
<i>Ақылбаев М.И., Бейсебаева А., Шалданбаев А. Ш.</i> О периодическом решении задачи Гурса для волнового уравнения специального вида с переменными коэффициентами (на русском языке).....	114
<i>Джакупов К.Б.</i> Нелинейный закон Гука в теории упругости неоднородных и анизотропных тел (на русском языке).....	130

CONTENTS

<i>Smirnov E.I., Zhokhov A.L., Yunusov A.A., Yunusov A.A., Simonova O.B.</i> Visual modeling of the manifestation of the essence of mathematical concepts and methodological procedures (in English).....	6
<i>Kalmurzayev B.S., Bazhenov N.A.</i> Embeddability of m -degrees into equivalence relations in the Ershov hierarchy (in English).....	14
<i>Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh.</i> On expanding countably categorical weakly ω -minimal theories by binary predicates (in English).....	18
<i>Zhumakhanova A.S., Nogaybaeva M.O., Askarova A., Arshidinova M.T., Begaliyeva K.B., Kudaykulov A.K., Tashev A.A.</i> An analytical solution to the problem of the thermomechanical state of a rod of limited length with simultaneous presence of end temperatures and lateral heat exchange (in English).....	25
<i>Akylbayev M.I., Beysebayeva A., Shaldanbayev A. Sh.</i> On the periodic solution of the Goursat problem for a wave equation of a special form with variable coefficients (in English).....	34
<i>Baydullaev S., Baydullaev S. S.</i> Analysis of magnetotelluric sounding (in English).....	51
<i>Jakupov K.B.</i> Nonlinear Hooke law in the theory of elasticity of inhomogeneous and anisotropic bodies (in English).....	63
<i>Yunusov A.A., Dasibekov A., Korganbaev B.N., Yunusova A.A., Abdieva Z.A., Kospanbetova N.A.</i> Multidimensional problems of soils' consolidation with modulus of deformation, variable in its depth (in English)	75

* * *

<i>Smirnov E.I., Zhokhov A.L., Yunusov A.A., Yunusov A.A., Simonova O.B.</i> Visual modeling of the manifestation of the essence of mathematical concepts and methodological procedures (in Russian).....	87
<i>Kalmurzayev B.S., Bazhenov N.A.</i> Embeddability of m -degrees into equivalence relations in the Ershov hierarchy (in Russian).....	94
<i>Baizhanov S.S., Kulpeshov B.Sh.</i> On expanding countably categorical weakly ω -minimal theories by binary predicates (in Russian).....	98
<i>Zhumakhanova A.S., Nogaybaeva M.O., Askarova A., Arshidinova M.T., Begaliyeva K.B., Kudaykulov A.K., Tashev A.A.</i> An analytical solution to the problem of the thermomechanical state of a rod of limited length with simultaneous presence of end temperatures and lateral heat exchange (in Russian)	106
<i>Akylbayev M.I., Beysebayeva A., Shaldanbayev A. Sh.</i> On the periodic solution of the Goursat problem for a wave equation of a special form with variable coefficients (in Russian).....	114
<i>Jakupov K.B.</i> Nonlinear Hooke law in the theory of elasticity of inhomogeneous and anisotropic bodies (in Russian).....	130

**Publication Ethics and Publication Malpractice
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www.nauka-nanrk.kz

<http://www.physics-mathematics.kz>

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Т. А. Апендиев, Д. С. Аленов*
Верстка на компьютере *А. М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 15.02.2018.
Формат 60x88¹/₈. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
9 п.л. Тираж 300. Заказ 1.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19