ISSN 2518-1726 (Online),
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

ӘЛЬ-ФАРАБИ АТЫНДАҒЫ
ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

N E W S

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

AL-FARABI KAZAKH
NATIONAL UNIVERSITY

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА СЕРИЯСЫ
♦
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
♦
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

3 (319)

МАМЫР – МАУСЫМ 2018 ж.
МАЙ – ИЮНЬ 2018 г.
MAY – JUNE 2018

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА　　АЛМАТЫ, НАН РК　　ALMATY, NAS RK

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.)
Қазақстан республикасының Мәдениет пен ақпарат министрлігінің Ақпарат және мұрағат комитетінде 01.06.2006 ж. берілген **№5543-Ж** мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік

Мерзімділігі: жылына 6 рет.
Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28, 219 бөл., 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Типографияның мекенжайы: «Аруна» ЖК, Алматы қ., Муратбаева көш., 75.

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)
Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан **№5543-Ж**, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.
Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)
The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year
Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,
www:nauka-nanrk.kz / physics-mathematics.kz

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 319 (2018), 134 – 143

UDC 521.1

M. Zh. Minglibayev[1,2], S.A. Shomshekova[1,2]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
[2]Fesenkov Astrophysical Institute, Almaty, Kazakhstan
minglibayev@gmail.com, shomshekova.saule@gmail.com

ANALYTICAL EXPRESSIONS OF THE PERTURBING FUNCTIONS IN TWO PLANETARY THREE- BODY PROBLEM WITH MASSES VARYNG NON-ISOTROPICALLY WHEN AVAILABLE FOR REACTIVE FORCES

Abstract. The paper considers a two-planetary exoplanetary system with variable masses in the absolute coordinate system. The equations of motion are described with the Meshchersky equations. The masses of the parent star and the planets are considered variable, varying at different rates. The general case is investigated when the masses of bodies change with time anisotropically, at different rates. As a consequence of an anisotropic change in mass, reactive forces appear that significantly affect the dynamics of the exoplanetary system at the non-stationary stage of its evolution. The equations of motion have no integral, so the problem is investigated by perturbation theory methods developed for such nonstationary systems. The initial equations for the use of perturbation theory are the equations of motion in a relative coordinate system with the origin at the center of the parent star with mass. The methods of perturbation theory are used based on aperiodic motion along a quasiconic section. The motion of two planets, within the framework of the problem of three point bodies with variable masses varying anisotropically in the presence of reactive forces, are described by the equations of perturbed motion in the form of the Lagrange equation. Perturbating functions are expressed through the osculating elements of two planets. Analytical expressions for the expansion of perturbing functions into a series are obtained. The work highlights the main and indirect part of the perturbing functions is singled out. Exactly to the square of the eccentricities of the planets, actual decompositions are performed. The derived formulas allow us to study the evolution of orbital elements due to the variability of the masses of the parent star and planets. They allow us to describe dynamic effects in the two-planetary three-body problem with variable masses as a single planetary system at the non-stationary stage of its evolution. To perform complex analytical calculations, the Mathematica software package was used.

Key words: three-body problem with variable masses, non-stationary exoplanet systems, stars with variable masses, aperiodic motion, protoplanetary disk.

М.Дж. Минглибаев[1,2], С.А. Шомшекова[1,2]

[1]КазНУ им. аль-Фараби., Алматы, Казахстан;
[2]ДТОО «Астрофизический Институт им. Фесенкова», Алматы, Казахстан

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ВОЗМУЩАЮЩИХ ФУНКЦИИ В ДВУХПЛАНЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С АНИЗАТРОПНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ МАССАМИ ПРИ НАЛИЧИИ РЕАКТИВНЫХ СИЛ

Аннотация. В работе рассматривается двухпланетная экзопланетная система с переменными массами в абсолютной системе координат. Уравнения движения описываются с уравнениями Мещерского. Массы родительской звезды и планет считается переменными, изменяющимися в различных темпах. Исследуется общий случай, когда массы тел меняются со временем анизотропно, в различных темпах. Как следствия анизотропного изменения масс появляются реактивные силы, которые существенно влияет на динамику экзопланетной системы на нестационарном этапе ее эволюции. Уравнения движения не имеют ни одного интеграла, поэтому проблема исследуются методами теории возмущении разработанных для таких нестационарных систем. Исходными для использования теории возмущений являются уравнения движения в относительной системе координат с началом в центре родительской звезды. Используется методы теории возмущении на базе апериодического движения по квазиконическому сечению. Движение двух планет, в рамках задачи трех точечных тел с переменными массами изменяющимися анизотропно при наличии реактивных сил, описываются уравнениями возмущенного движения в форме уравнения Лагранжа. Возмущающие функции выражаются через оскулирующие элементы двух планет. Получены аналитические выражения разложения в ряд возмущающих функции. В работе выделено главная и косвенная часть возмущающих функции. С точностью до квадрата эксцентриситетов планет выполнены фактические разложения. Найденные формулы позволяют исследовать эволюции орбитальных элементов из за переменности масс родительской звезды и планет. Они позволяют описывать динамических эффектов в рассматриваемой двухпланетной задаче трех тел с переменными массами как единая планетная система на нестационарном этапе ее эволюции. Для выполнения сложных аналитических вычислении использовали пакет программу Mathematica.

Ключевые слова: задача трех тел с переменными массами, нестационарные экзопланетные системы, звезды с переменными массами, апериодическое движения, протопланетный диск.

1.Введение. Наша Солнечная система считается достаточно проэволюционировавшей системой (4,5 млрд.лет). У всех планет Солнечной системы орбиты близки к круговым $e \approx 0$, кроме орбиты Меркурия. У Меркурия $e = 0.2$, наклонение плоскости орбиты 7 градусов. У больших планет Солнечной системы, что особенно хорошо видно на примере у Сатурна, «вымораживание» орбит уже произошло. У хорошо проэволюционировавших систем произошло так называемое «вымораживание» орбит (устойчивые орбиты концентрируется в одной плоскости вблизи плоскости экватора звезды) [1].

Во многих экзопланетных системах (в настоящее время их больше 4000) мы наблюдаем большие разбросы наклонов плоскостей орбит к экватору звезды, что может свидетельствовать о различных эволюционных треках таких систем. Также известна одна экзопланета, которая двигается в противоположную сторону от направлений орбитального движения (ретроградной орбите) — это экзопланета под названием WASP-17b, находящаяся в созвездии Скорпиона [2]. По статистическому анализу известно, что количество планет в конкретных экзопланетных системах варьируются от одного до семи планет. В экзопланетной системе TRAPPIST-1 обнаружено семь планет [3]. Звезды спектрального класса G, куда входит наше Солнца, имеют наибольшее количество экзопланетных систем. Венера – единственная планета, собственное вращение которой не совпадает с направлением вращения других планет Солнечной системы. Это говорит о том, что из-за разнообразия экзопланетных систем вытекает необходимость детальных исследований их динамической эволюции, особенно на этапах их нестационарности.

2.Методика исследования. Рассмотрим экзопланетную систему состоящий из трех взаимогравитирующих сферических небесных тел с переменными массами. Пусть, $m_0 = m_0(t)$ - центральная родительская звезда, $m_1 = m_1(t)$ - внутренняя планета и $m_2 = m_2(t)$ - внешняя планета с переменными массами. Движение двух планет, в рамках задачи трех сферических тел (которые взаимодействуют как материальные точки) с переменными массами изменяющимися анизотропно, при наличии реактивных сил, в абсолютной системе координат, описываются уравнениями Мещерского[4]. Проблему рассмотрим в относительной системе координат с началом в центре, родительской звезды, с массой $m_0 = m_0(t)$. Массы тел меняются в различных темпах

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2} \tag{2.1}$$

анизотропно. Проблема сложная, поэтому задачу будем исследовать методами теории возмущении на базе апериодического движения по квазиконическому сечению[5]. Целесообразно исходит из уравнении движения в относительной системе координат[4]. Будем использовать уравнения возмущенного движения в форме уравнении Лагранжа. Для написания в явной форме уравнении возмущенного движения в форме уравнении Лагранжа необходимо выражать через оскулирующие орбитальные элементы возмущающих функции для двух планет.

Уравнения возмущенного движения двух планет в относительной системе координат напишем в виде [4]

$$\ddot{\vec{r}}_1 + f\left(m_0 + m_1\right)\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1}\vec{r}_1 = grad_{\vec{r}_1}\tilde{W}_1, \tag{2.2}$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 + f\left(m_0 + m_2\right)\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} + \frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2}\vec{r}_2 = grad_{\vec{r}_2}\tilde{W}_2, \tag{2.3}$$

$$\tilde{W}_1 = \tilde{U}_1 + F_1 + P_1, \tag{2.4}$$

$$F_1 = F_{1x}x_1 + F_{1y}x_1 + F_{1z}z_1,\ P_1 = \frac{\ddot{\gamma}_1}{2\gamma_1}r_1^2, \tag{2.5}$$

$$\mu_2 = fm_2,\ r_{12} = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|,\ \gamma_1 = \frac{m_0\left(t_0\right) + m_1\left(t_0\right)}{m_0\left(t\right) + m_1\left(t\right)} = \gamma_1\left(t\right), \tag{2.6}$$

$$\tilde{W}_2 = \tilde{U}_2 + F_2 + P_2, \tag{2.7}$$

$$F_2 = F_{2x}x_2 + F_{2y}x_2 + F_{2z}z_2,\ P_2 = \frac{\ddot{\gamma}_2}{2\gamma_2}r_2^2, \tag{2.8}$$

$$\mu_1 = fm_1,\ r_{21} = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|,\ \gamma_2 = \frac{m_0\left(t_0\right) + m_2\left(t_0\right)}{m_0\left(t\right) + m_2\left(t\right)} = \gamma_2\left(t\right), \tag{2.9}$$

$\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$ - силовые функции ньютоновского взаимодействия тел, причем будем считать, что $r_1 < r_2$.

Выразим все слагаемые возмущающие функции $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_2$ через орбитальные элементы невозмущенного движения. Из них, наиболее сложными является разложение в ряд силовых функции ньютоновских взаимодействия тел. Целесообразно выделить главную и косвенную часть возмущающих функции

$$\tilde{U}_1 = \frac{\mu_2}{\gamma_2 a_2}U_{1гл} - \frac{\mu_2}{\gamma_2 a_2}\alpha U_{1косв}, \tag{2.10}$$

$$\tilde{U}_2 = \frac{\mu_1}{\gamma_2 a_2}U_{2гл} - \frac{\mu_1}{\gamma_2 a_2}\frac{1}{\alpha^2}U_{2косв}, \tag{2.11}$$

$$\alpha = \alpha\left(t\right) = \frac{\gamma_1 a_1}{\gamma_2 a_2} < 1, \tag{2.12}$$

$$\tilde{U}_{1гл} = \frac{\gamma_2 a_2}{r_{12}} = \gamma_2 a_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right),\ \tilde{U}_{1косв} = \left(\frac{r_1}{\gamma_1 a_1}\right)\left(\frac{\gamma_2 a_2}{r_2}\right)^2 \cos\psi, \tag{2.13}$$

$$\tilde{U}_{2гл} = \frac{\gamma_2 a_2}{r_{21}} = \gamma_2 a_2\left(\frac{1}{r_{21}}\right),\ \tilde{U}_{2косв} = \left(\frac{r_2}{\gamma_2 a_2}\right)\left(\frac{\gamma_1 a_1}{r_1}\right)^2 \cos\psi. \tag{2.14}$$

Выражения в правых частях этих формул разлагаются в ряд по оскулирующим элементам апериодического движения по квазиконическому сечению. Разложения возмущающих функции (2.5), (2.8) не представляют особой сложности, так как аналитические выражения координат и квадрата модули радиуса-вектора простые [5]

$$x = \gamma\rho\left[\cos u \cdot \cos\Omega - \sin u \cdot \sin\Omega \cdot \cos i\right], \tag{2.15}$$

$$y = \gamma\rho\left[\cos u\cdot\sin\Omega+\sin u\cdot\cos\Omega\cdot\cos i\right], \tag{2.16}$$

$$z = \gamma\rho\left[\sin u\cdot\sin i\right], \tag{2.17}$$

$$r^2 = x^2+y^2+z^2=\gamma^2\rho^2. \tag{2.18}$$

Их разложения в ряд известные[5,6]. Также известны разложения величин $\left(r/\gamma a\right)=\left(\rho/a\right)$, $\left(\gamma a/r\right)^2=\left(a/\rho\right)^2$ в косвенной части возмущающей функции (2.13), (2.14).

2.1 Разложении главной части возмущающий функции. Как было отмечено выше, основная трудность заключается в разложении главной части возмущающий функции $\tilde{U}_{1гл}$, $\tilde{U}_{2гл}$. Из вектора $\vec{r}_{12}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ следует

$$r_{12}^2=r_2^2-2\vec{r}_1\vec{r}_2+r_1^2=r_2^2-2r_1r_2\cos\psi+r_1^2 \tag{2.19}$$

где ψ - угол между двумя радиус-векторами.

Обозначим

$$\Delta^2=r_{12}^2=r_{21}^2=r_2^2-2r_1r_2\cos\psi+r_1^2 \tag{2.20}$$

$$\Delta_0^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\left(u_1-u_2\right), \tag{2.21}$$

$$\tilde{\Psi}=\cos\psi-\cos\left(u_1-u_2\right), \tag{2.22}$$

где $u_1=\omega_1+\theta_1$ и $u_2=\omega_2+\theta_2$ - истинные долготы внутренних и внешной планет, соответственно.

Тогда из (2.19) учитывая обозначения (2.20)-(2.22) получим

$$\Delta^2=\Delta_0^2+\left(-2r_1r_2\tilde{\Psi}\right)=\Delta_0^2\left[1-\frac{2r_1r_2}{\Delta_0^2}\tilde{\Psi}\right]. \tag{2.23}$$

Из равенства (2.23) следует

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2r_1r_2}{\Delta_0^2}\tilde{\Psi}}}. \tag{2.24}$$

Используя известную формулу

$$\left(1-x\right)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+.....$$

разложим в ряд второй множитель в правой части формулы (2.24). В результате получим

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta_0}+r_1r_2\tilde{\Psi}\frac{1}{\Delta_0^3}+\frac{3}{2}\left(r_1r_2\tilde{\Psi}\right)^2\frac{1}{\Delta_0^5}+\frac{5}{2}\left(r_1r_2\tilde{\Psi}\right)^3\frac{1}{\Delta_0^7}+... \tag{2.25}$$

Обобщая формулу (2.25) можно написать

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta_0}+r_1r_2\tilde{\Psi}\frac{1}{\Delta_0^3}+\frac{3}{2}\left(r_1r_2\tilde{\Psi}\right)^2\frac{1}{\Delta_0^5}+\frac{5}{2}\left(r_1r_2\tilde{\Psi}\right)^3\frac{1}{\Delta_0^7}+...=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(2i\right)!}{\left(i!\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}r_1r_2\tilde{\Psi}\right)^i\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}. \tag{2.26}$$

Выразим правую часть формулы (2.26) через орбитальные элементы двух планет. Для этого необходимо выразит величины $\Delta_0^{-(2i+1)}$ и $\tilde{\Psi}$ через орбитальные элементы. Выражения через орбитальные элементы величин $r_1=\gamma_1\rho_1$, $r_2=\gamma_2\rho_2$ достаточно простые и известные [8-10]. Сначала получим необходимые формулы для разложения величины $\tilde{\Psi}$, определяемой формулой (2.22).

Для первой слагаемой формулы (2.22) имеем

$$\cos\psi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2} = \frac{x_1}{r_1}\cdot\frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1}\cdot\frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1}\cdot\frac{z_2}{r_2} =$$
$$= \left(\frac{x_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{\gamma_2\rho_2}\right) + \left(\frac{y_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{y_2}{\gamma_2\rho_2}\right) + \left(\frac{z_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{z_2}{\gamma_2\rho_2}\right) \quad (2.27)$$

Соответственно, из формулы (2.15)-(2.17) следует, что координаты точек могут быть записаны в виде

$$\left(\frac{x_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{\gamma_2\rho_2}\right) = \left[\{\cos u_1\}\cos\Omega_1 - \{\sin u_1\}\sin\Omega_1\cos i_1\right]\cdot\left[\{\cos u_2\}\cos\Omega_2 - \{\sin u_2\}\sin\Omega_2\cos i_2\right]$$
$$\left(\frac{y_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{y_2}{\gamma_2\rho_2}\right) = \left[\{\cos u_1\}\sin\Omega_1 + \{\sin u_1\}\cos\Omega_1\cos i_1\right]\cdot\left[\{\cos u_2\}\sin\Omega_2 + \{\sin u_2\}\cos\Omega_2\cos i_2\right] \quad (2.28)$$
$$\left(\frac{z_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{z_2}{\gamma_2\rho_2}\right) = \left[\{\sin u_1\}\sin i_1\right]\cdot\left[\{\sin u_2\}\sin i_2\right]$$

Формулы (2.27), (2.28) определяют выражение $\cos\psi$ через орбитальные элементы. В формуле (2.22) нужно еще разлагать второе слагаемое в ряд

$$\cos(u_1 - u_2) = \cos u_1\cos u_2 + \sin u_1\sin u_2 =$$
$$= \cos(\omega_1+\theta_1)\cos(\omega_2+\theta_2) + \sin(\omega_1+\theta_1)\sin(\omega_2+\theta_2) =$$
$$= \left[\cos\omega_1\{\cos\theta_1\} - \sin\omega_1\{\sin\theta_1\}\right]\left[\cos\omega_2\{\cos\theta_2\} - \sin\omega_2\{\sin\theta_2\}\right] + \quad (2.29)$$
$$+\left[\sin\omega_1\{\cos\theta_1\} + \cos\omega_1\{\sin\theta_1\}\right]\left[\sin\omega_2\{\cos\theta_2\} + \cos\omega_2\{\sin\theta_2\}\right]$$

Выражение в фигурных скобках разлагается в бесконечный ряд по степеням эксцентриситета [6]. В результате получим аналитическое выражения $\tilde{\Psi}$ через орбитальные элементы двух планет.

Сложнее обстоит дела в разложение в ряд величины $\Delta_0^{-(2i+1)}$. Уравнения (2.21) перепишем виде

$$\Delta_0^2 = a_1^2\gamma_1^2\left(\frac{\rho_1}{a_1}\right)^2 + a_2^2\gamma_2^2\left(\frac{\rho_2}{a_2}\right)^2 - 2a_1\gamma_1a_2\gamma_2\left(\frac{\rho_1}{a_1}\right)\left(\frac{\rho_2}{a_2}\right)\cos(u_1-u_2) = a_1^2\gamma_1^2(1+R_1)^2 +$$
$$+a_2^2\gamma_2^2(1+R_2)^2 - 2a_1\gamma_1a_2\gamma_2(1+R_1)(1+R_2)\cos(u_1-u_2) = a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 - 2a_1\gamma_1a_2\gamma_2\cos(u_1-u_2) + . \quad (2.30)$$
$$+a_1^2\gamma_1^2\left(2R_1+R_1^2\right) + a_2^2\gamma_2^2\left(2R_2+R_2^2\right) - 2a_1\gamma_1a_2\gamma_2\left(R_2+R_1+R_1R_2\right)\cos(u_1-u_2)$$

Обозначим

$$\rho_0^2 = \left[\gamma_1^2a_1^2 + \gamma_2^2a_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2a_1a_2\cos(u_1-u_2)\right], \quad (2.31)$$
$$R_{12} = a_1^2\gamma_1^2\left(2R_1+R_1^2\right) + a_2^2\gamma_2^2\left(2R_2+R_2^2\right) - 2a_1\gamma_1a_2\gamma_2\left(R_2+R_1+R_1R_2\right)\cos(u_1-u_2),$$

где R_1, R_2 остальные части разложения модулей радиус-векторов зависящие от первой и выше степени эксцентриситетов. Тогда из формулы (2.30) следует

$$\Delta_0^2 = \rho_0^2 + R_{12}. \quad (2.32)$$

Поэтому можно написать

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{\rho_0}\left(1+\frac{R_{12}}{\rho_0^2}\right)^{-1/2}, \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{\rho_0}=\left[\gamma_1^2a_1^2+\gamma_2^2a_2^2-2\gamma_1\gamma_2a_1a_2\cos\left(u_1-u_2\right)\right]^{-1/2}=$$
$$=\frac{1}{\gamma_2a_2}\left[1+\alpha^2-2\alpha\cos\left(u_1-u_2\right)\right]^{-1/2} \qquad (2.34)$$

Перепишем формулу (2.33) в виде

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}=\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}\left(1+\frac{R_{12}}{\rho_0^2}\right)^{-(i+1/2)}. \qquad (2.35)$$

Разлагая правую часть формулы (2.35) в ряд Тейлора по ρ_0, получим

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}=\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}+\left(r_1-\gamma_1a_1\right)\frac{\partial}{\partial\left(\gamma_1a_1\right)}\left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}\right)+\left(r_2-\gamma_2a_2\right)\frac{\partial}{\partial\left(\gamma_2a_2\right)}\left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}\right)+... \qquad (2.36)$$

Обозначим

$$\varepsilon_1=\frac{r_1}{\gamma_1a_1}-1,\ \varepsilon_2=\frac{r_2}{\gamma_2a_2}-1. \qquad (2.37)$$

Из известного разложения в ряд следует

$$\frac{r}{\gamma a}=\frac{\rho}{a}=1-e\cos M+\frac{e^2}{2}\left(1-\cos 2M\right)+\frac{3e^3}{8}\left(\cos M-\cos 3M\right)+$$
$$+\frac{e^4}{3}\left(\cos 2M-\cos 4M\right)+O\left(e^5\right) \qquad (2.38)$$

Поэтому, ε_1 имеет порядок $O\left(e_1\right)$, а ε_2 имеет порядок $O\left(e_2\right)$.

Пусть $D_{m,n}$ обозначает дифференциальный оператор

$$D_{m,n}=\left(\gamma_1a_1\right)^m\left(\gamma_2a_2\right)^n\frac{\partial^{m+n}}{\partial\left(\gamma_1a_1\right)^m\partial\left(\gamma_2a_2\right)^n}, \qquad (2.39)$$

тогда из (2.36) получим

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}=\left[1+\varepsilon_1D_{1,0}+\varepsilon_2D_{0,1}+\frac{1}{2!}\left(\varepsilon_1^2D_{2,0}+2\varepsilon_1\varepsilon_2D_{1,1}+\varepsilon_2^2D_{0,2}\right)+...\right]\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}. \qquad (2.40)$$

Однако, из соотношении (2.34) следует

$$\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}=\left\{\frac{1}{\gamma_2a_2}\left[1-\alpha^2-2\alpha\cos\left(u_1-u_2\right)\right]^{-1/2}\right\}^{(2i+1)}=$$
$$=\left(\gamma_2a_2\right)^{-(2i+1)}\left[1-\alpha^2-2\alpha\cos\left(u_1-u_2\right)\right]^{-(i+1/2)}= \qquad (2.41)$$
$$=\left(\gamma_2a_2\right)^{-(2i+1)}\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}b_{i+1/2}^{(j)}\left(\alpha\right)\cos\left[j\left(u_1-u_2\right)\right],$$

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}\left(\alpha\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos j\psi d\psi}{\left(1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2\right)^s} \qquad (2.42)$$

Величины $b_s^{(j)}\left(\alpha\right)$ в формуле (2.42) называются коэффициентами Лапласа, каждый из которых может быть представлен в виде равномерно сходящего ряда по α для всех $\alpha<1$ [7,6].

Обозначим

$$A_{i,j,m,n}=D_{m,n}\left(\left(a_2\gamma_2\right)^{-(2i+1)}b_{i+1/2}^{(j)}\left(\alpha\right)\right)=$$

$$\left(\gamma_1 a_1\right)^m\left(\gamma_2 a_2\right)^n\frac{\partial^{m+n}}{\partial\left(\gamma_1 a_1\right)^m\partial\left(\gamma_2 a_2\right)^n}\left(\left(a_2\gamma_2\right)^{-(2i+1)}b_{i+1/2}^{(j)}\left(\alpha\right)\right)\cdot \qquad (2.43)$$

В результате формула (2.40) имеет вид

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}=\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[A_{i,j,0,0}+\varepsilon_1 A_{i,j,1,0}+\varepsilon_2 A_{i,j,0,1}+\ldots\right]\cos j\left(u_1-u_2\right), \qquad (2.44)$$

если обобщить это выражение, то получим

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}=\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l\,!}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\varepsilon_1^{\,k}\varepsilon_2^{\,l-k}A_{i,j,k,l-k}\right]\cos j\left(u_1-u_2\right), \qquad (2.45)$$

При вычислении частных производных $A_{i,j,k,l-k}$ по $\left(\gamma_1 a_1\right)$ и $\left(\gamma_2 a_2\right)$ следует быть внимательным, поскольку $\left(\gamma_1 a_1\right)$ и $\left(\gamma_2 a_2\right)$ также содержатся неявно в коэффициентах Лапласа $b_{i+1/2}^{(j)}\left(\alpha\right)$.

Подставив (2.45) в (2.13), окончательно имеем

$$\begin{aligned}U_{1гл}&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2i)!}{(i!)^2}\cdot\left(\frac{\gamma_1\gamma_2}{2}\left(\frac{\rho_1}{a_1}\right)\left(\frac{\rho_2}{a_2}\right)\tilde{\Psi}\right)^i\frac{\left(\gamma_1 a_1\right)^i\left(\gamma_2 a_2\right)^{i+1}}{2}\times\\&\times\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l\,!}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2l-k}A_{i,j,k,l-k}\right]\cos j\left(u_1-u_2\right)\end{aligned} \qquad (2.46)$$

Заметим, что в выражении (2.46) наклонения i_1 и i_2 содержатся только в величине $\tilde{\Psi}$.

2.2 Фактическое разложение возмущающих функции с точностью до вторых степеней малых величин. Рассмотрим фактические разложения возмущающих функции с точностью до вторых степеней малых величин. С точностью до вторых степеней эксцентриситетов имеем[10]

$$r_1=\gamma_1\rho_1=\gamma_1 a_1\left(\frac{\rho_1}{a_1}\right)\approx\gamma_1 a_1\left[1+\frac{e_1^2}{2}+\left(-e_1\right)\cos M_1-\frac{e_1^2}{2}\cos 2M\right] \qquad (2.47)$$

$$r_2=\gamma_2\rho_2=\gamma_2 a_2\left(\frac{\rho_2}{a_2}\right)\approx\gamma_2 a_2\left[1+\frac{e_2^2}{2}+\left(-e_2\right)\cos M_2-\frac{e_2^2}{2}\cos 2M_2\right]. \qquad (2.48)$$

$$\begin{aligned}&\sin\theta_1\approx\sin\lambda_1-\left(\Omega_1+\omega_1\right)+e_1\sin 2\lambda_1-\left(\Omega_1+\omega_1\right)+e_1^2\left(\frac{9}{8}\sin 3\lambda_1-\left(\Omega_1+\omega_1\right)-\frac{7}{8}\sin\lambda_1-\left(\Omega_1+\omega_1\right)\right)\\&\cos\theta_1\approx\cos\lambda_1-\left(\Omega_1+\omega_1\right)+e_1\left(\cos 2\lambda_1-\left(\Omega_1+\omega_1\right)-1\right)+e_1^2\left(\frac{9}{8}\cos 3\lambda_1-\left(\Omega_1+\omega_1\right)-\frac{7}{8}\cos\lambda_1-\left(\Omega_1+\omega_1\right)\right)\\&\sin\theta_2\approx\sin\lambda_2-\left(\Omega_2+\omega_2\right)+e_2\sin 2\lambda_2-\left(\Omega_2+\omega_2\right)+e_2^2\left(\frac{9}{8}\sin 3\lambda_2-\left(\Omega_2+\omega_2\right)-\frac{7}{8}\sin\lambda_2-\left(\Omega_2+\omega_2\right)\right)\\&\cos\theta_2\approx\cos\lambda_2-\left(\Omega_2+\omega_2\right)+e_2\left(\cos 2\lambda_2-\left(\Omega_2+\omega_2\right)-1\right)+e_2^2\left(\frac{9}{8}\cos 3\lambda_2-\left(\Omega_2+\omega_2\right)-\frac{7}{8}\cos\lambda_2-\left(\Omega_2+\omega_2\right)\right),\end{aligned} \qquad (2.49)$$

где учтена формула $M=\lambda-\left(\Omega+\omega\right)$.

Используя приведенные разложение окончательно выразим правую часть формулы (2.22) через орбитальные элементы.

Естественно, такие громоздкие и сложные аналитические вычисления целесообразно выполнить современными методами компьютерной алгебры. Мы использовали систему аналитических вычислении Mathematica[11].

В результате правая часть формулы (2.22) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Psi}=\cos\psi-\cos(u_1-u_2)=\\
&=\frac{1}{64}(-((-7\cos(\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)+9\cos(3\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)-7\sin(\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)+\\
&+9\sin(3\lambda_1-\omega_1-\Omega_1))e_1^2+8(\cos(-2\lambda_1+\omega_1+\Omega_1+1)+\sin(2\lambda_1-\omega_1-\Omega_1))e_1+8\cos(\lambda_1-\Omega_1))\times\\
&\times((-7\cos(\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)+9\cos(3\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)-7\sin(\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)+\\
&+9\sin(3\lambda_2-\omega_2-\Omega_2))e_2^2+8(\cos(-2\lambda_2+\omega_2+\Omega_2+1)+\sin(2\lambda_2-\omega_2-\Omega_2))e_2+8\cos(\lambda_2-\Omega_2))+\\
&+\sin(i_1)\sin(i_2)((-7\cos(\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)+9\cos(3\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)-7\sin(\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)+\\
&+9\sin(3\lambda_1-\omega_1-\Omega_1))e_1^2+8(\cos(-2\lambda_1+\omega_1+\Omega_1+1)+\sin(2\lambda_1-\omega_1-\Omega_1))e_1+8\sin(\lambda_1-\Omega_1))\times\\
&\times((-7\cos(\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)+9\cos(3\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)-7\sin(\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)+\\
&+9\sin(3\lambda_2-\omega_2-\Omega_2))e_2^2+8(\cos(-2\lambda_2+\omega_2+\Omega_2+1)+\sin(2\lambda_2-\omega_2-\Omega_2))e_2+8\sin(\lambda_2-\Omega_2))-\\
&-((-7\cos(\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)+9\cos(3\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)-7\sin(\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)+\\
&+9\sin(3\lambda_1-\omega_1-\Omega_1))e_1^2+8(\cos(-2\lambda_1+\omega_1+\Omega_1+1)+\sin(2\lambda_1-\omega_1-\Omega_1))e_1+8\sin(\lambda_1-\Omega_1))\times\\
&\times((-7\cos(\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)+9\cos(3\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)-7\sin(\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)+\\
&+9\sin(3\lambda_2-\omega_2-\Omega_2))e_2^2+8(\cos(-2\lambda_2+\omega_2+\Omega_2+1)+\sin(2\lambda_2-\omega_2-\Omega_2))e_2+8\sin(\lambda_2-\Omega_2))+\\
&+((-7\cos(\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)+9\cos(3\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)-7\sin(\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)+\\
&+9\sin(3\lambda_1-\omega_1-\Omega_1))(\cos(i_1)\cos(\Omega_1)+\sin(\Omega_1))e_1^2+8\left(\cos\left(\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)\times\\
&\times(\cos(i_1)\cos(\Omega_1)+\sin(\Omega_1))\left(\cos\left(-2\lambda_1+\omega_1+\Omega_1+\frac{1}{2}\right)-\sin\left(-2\lambda_1+\omega_1+\Omega_1+\frac{1}{2}\right)\right)e_1+\\
&+8(\cos(i_1)\cos(\Omega_1)\sin(\lambda_1-\Omega_1)+\cos(\lambda_1-\Omega_1)\sin(\Omega_1)))((-7\cos(\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)+\\
&+9\cos(3\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)-7\sin(\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)+9\sin(3\lambda_2-\omega_2-\Omega_2))(\cos(i_2)\cos(\Omega_2)+\sin(\Omega_2))e_2^2+\\
&+8\left(\cos\left(\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)(\cos(i_2)\cos(\Omega_2)+\sin(\Omega_2))\left(\cos\left(-2\lambda_2+\omega_2+\Omega_2+\frac{1}{2}\right)-\sin\left(-2\lambda_2+\omega_2+\Omega_2+\frac{1}{2}\right)\right)e_2+\\
&+8(\cos(i_2)\cos(\Omega_2)\sin(\lambda_2-\Omega_2)+\cos(\lambda_2-\Omega_2)\sin(\Omega_2)))+\\
&+(-(7\cos(\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)-9\cos(3\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)+7\sin(\lambda_1-\omega_1-\Omega_1)-9\sin(3\lambda_1-\omega_1-\Omega_1))(\cos(\Omega_1)-\cos(i_1)\sin(\Omega_1))e_1^2+\\
&+8\left(\cos\left(\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)(\cos(\Omega_1)-\cos(i_1)\sin(\Omega_1))\left(\cos\left(-2\lambda_1+\omega_1+\Omega_1+\frac{1}{2}\right)-\sin\left(-2\lambda_1+\omega_1+\Omega_1+\frac{1}{2}\right)\right)e_1+\\
&+8\cos(\lambda_1-\Omega_1)\cos(\Omega_1)-8\cos(i_1)\sin(\lambda_1-\Omega_1)\sin(\Omega_1))(-(7\cos(\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)-9\cos(3\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)+\\
&+7\sin(\lambda_2-\omega_2-\Omega_2)-9\sin(3\lambda_2-\omega_2-\Omega_2))(\cos(\Omega_2)-\cos(i_2)\sin(\Omega_2))e_2^2+\\
&+8\left(\cos\left(\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)(\cos(\Omega_2)-\cos(i_2)\sin(\Omega_2))(\cos\left(-2\lambda_2+\omega_2+\Omega_2+\frac{1}{2}\right)-\\
&-\sin\left(-2\lambda_2+\omega_2+\Omega_2+\frac{1}{2}\right))e_2+8\cos(\lambda_2-\Omega_2)\cos(\Omega_2)-8\cos(i_2)\sin(\lambda_2-\Omega_2)\sin(\Omega_2))).
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

Для фактического разложения величин $\Delta_0^{-(2i+1)}$ из формулы (2.44) имеем

$$
\frac{1}{\Delta_0}=\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[A_{0,j,0,0}+\varepsilon_1 A_{0,j,1,0}+\varepsilon_2 A_{0,j,0,1}+\dots\right]\cos j(u_1-u_2),
\tag{2.51}
$$

$$\frac{1}{\Delta_0^3}=\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[A_{1,j,0,0}+\varepsilon_1 A_{1,j,1,0}+\varepsilon_2 A_{1,j,0,1}+...\right]\cos j\left(u_1-u_2\right), \quad (2.52)$$

$$\frac{1}{\Delta_0^5}=\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[A_{2,j,0,0}+\varepsilon_1 A_{2,j,1,0}+\varepsilon_2 A_{2,j,0,1}+...\right]\cos j\left(u_1-u_2\right), \quad (2.53)$$

где, согласно (2.43), (2.42) обозначены

$$A_{i,j,m,n}=D_{m,n}\left(\left(a_2\gamma_2\right)^{-(2i+1)}b_{i+1/2}^{(j)}\left(\alpha\right)\right)=$$

$$\left(\gamma_1 a_1\right)^m\left(\gamma_2 a_2\right)^n\frac{\partial^{m+n}}{\partial\left(\gamma_1 a_1\right)^m\partial\left(\gamma_2 a_2\right)^n}\left(\left(a_2\gamma_2\right)^{-(2i+1)}b_{i+1/2}^{(j)}\left(\alpha\right)\right), \quad (2.54)$$

$$\frac{1}{2}b_{i+1/2}^{(j)}\left(\alpha\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos j\psi d\psi}{\left(1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2\right)^{i+1/2}}. \quad (2.55)$$

Для получения разложения в явном виде, с точностью до второго порядка малых величин, достаточно в формулах (2.51) - (2.53) сохранить слагаемые $j=-3,-2,-1,0,1,2,3$.

Например, рассмотрим $A_{1,-3,0,1}$. Согласно формуле (2.54) можно написать

$$A_{1,-3,0,1}=D_{0.1}\left(\left(a_2\gamma_2\right)^{-3}b_{3/2}^{(-3)}\left(\alpha\right)\right)=\left(\gamma_2 a_2\right)\frac{\partial}{\partial\left(\gamma_2 a_2\right)}\left(\left(a_2\gamma_2\right)^{-3}b_{3/2}^{(-3)}\left(\alpha\right)\right)=-3\left(\gamma_2 a_2\right)^{-3}b_{3/2}^{(-3)}\left(\alpha\right)-$$

$$-\left(\gamma_1 a_1\right)\left(\gamma_2 a_2\right)^{-4}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[b_{3/2}^{-3}\left(\alpha\right)\right]=-3\left(\gamma_2 a_2\right)^{-3}b_{3/2}^{(-3)}\left(\alpha\right)-\left(\gamma_1 a_1\right)\left(\gamma_2 a_2\right)^{-4}\frac{d}{d\alpha}\left[b_{3/2}^{-3}\left(\alpha\right)\right]. \quad (2.56)$$

Аналогично вычисляется другие коэффициенты $A_{i,j,m,n}$ в формулах (2.51) - (2.53).

3.Результаты. Выполненные аналитические вычисление приводит нас к окончательным результатам. Мы получили, в принципе, разложения возмущающих функции с точностью до любого порядка относительно малых величин.

Действительно, подставляя полученные аналитические выражения (2.51)-(2.53), (2.47)-(2.48), (2.50), в формулу (2.25) и (2.13) получим разложения главной части возмущающей функции $\tilde{U}_{1гл}$. Полученные явные формулы также дадут возможность написания в аналитическом виде косвенные части возмущающих функции $\tilde{U}_{1косв}$. Также, используя полученные аналитические выражения, можно написать $\tilde{U}_{2гл}$, $\tilde{U}_{2косв}$. Как было отмечено выше, выражения возмущающих функции (2.5), (2.8) через орбитальные элементы достаточно простые и следует из формул (2.15) - (2.18).

Таким образом, полные выражения возмущающей функции (2.4), (2.7) выражается через орбитальные элементы двух планет.

Используя полученных формул найдены фактические разложения возмущающих функции с точностью до второго порядка относительно малых величин.

4. Обсуждения. В работе мы рассмотрели двух экзопланет в относительной системе координат с началом в центре родительской звезды. Впервые получены общие формулы разложения в ряд возмущающих функции в двухпланетной задаче трех тел с массами изменяющимися анизотропно в различных темпах, на базе апериодического движения по квазиконическому сечению. Полученные соотношения дают возможность разложения возмущающих функции с любой точностью относительно эксцентриситетов и наклонений.

Результаты настоящей работы открывает новые перспективные возможности в исследовании динамики нестационарных гравитирующих систем. Полученные уравнения будут эффективно использованы для исследования динамической эволюции экзопланетных систем из за анизотропного изменении масс родительской звезды и планет. При этом, будут учтены эффекты убывания массы родительской звезды и роста массы планет из за аккреции вещества из остатков протопланетного диска.

Работа выполнено по программе подготовки докторов PhD МОН РК и ПЦФ МОН РК № BR05236322.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Morbidelli A., Dynamical Evolution of Planetery Systems, Planets, Stars and Stellar Systems, 2013, SSPS,V3,63. DOI:10.1007/978-94-007-5606-9_2. (in English)

[2] Bayliss., Daniel D.R, Winn J.N. Confirmation of a Retrograde Orbit for Exoplanet WASP-17b.- ApJ 2010.722L.224B. DOI:10.1088/2041-8205/722/2/L224. (in English)

[3] Bolmont E., Selsis F., et al., Water loss from terrestrial planets orbiting ultra cool dwarfs: Implications for the planets of TRAPPIST-1 – MNRAS 2017. V.464. P.3228. DOI:10.1093/mnras/stw2578. (in English).

[4] Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М., Шомшекова С.А. Дифференциальные уравнения относительного движения нестационарных экзопланетных систем. КазНПУ Вестник 2017 г., Т.57, №1, с. 147-152. (in Russian)

[5] Минглибаев М.Дж. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение. LAP LAMBERT Academic Publishing, Германия, 2012, 229 с. ISBN:978-3-659-29945-2.

[6] Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы // Пер.с англ.под.ред. И.И.Шевченко. –М.:Физматлит, 2010г.588с. ISBN:978-5-9221-1121-8.

[7] Шарлье К. Небесная механика. - М.: Наука, 1966. - 628 с.

[8] Дубошин Г.Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. - М.: Наука, 1975. - 799 с.

[9] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. - М.: Наука, 1968. - 800 с.

[10] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под.ред.Г.Н.Дубошина М.Наука.1976.

[11] Прокопеня А.Н. Решение физических задач с использованием системы Mathematica. - Брест: Издательство БГТУ, 2005. - 260 с.

УДК 521.1

М. Дж. Минглибаев [1,2], С.А. Шомшекова [1,2]

[1]әл-Фараби атындағы ҚҰУ, Алматы, Қазақстан
[2]«В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты» ЕЖШС, Алматы, Казақстан

РЕАКТИВТІ КҮШТІ ЕСЕПКЕ АЛЫП АНИЗАТРОПТЫ АЙНЫМАЛЫ МАССАДАҒЫ ЕКІ ПЛАНЕТАЛЫ ҮШ ДЕНЕ ЕСЕБІНІҢ ҰЙЫТҚУШЫ ФУНКЦИЯНЫҢ АНАЛИТИКАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

Аннотация. Бұл жұмыста абсолютті координаталар жүйесіндегі айнымалы массалы екі планеталы экзопланеталық жүйе қарастырылған. Қозғалыс теңдеулері Мещерский теңдеулерімен сипатталады. Центрлік жұлдыздың және планеталардың массалары айнымалы әртүрлі қарқынмен өзгереді. Денелердің массалары уақыт бойынша анизотропты, әртүрлі қарқынмен өзгеретін жалпы жағдай зерттеледі. Экзопланеталы жүйе эволюциясының бейстационар сатысында массаның анизотропты өзгеруі айтарлықтай оның динамикасына әсерін тигізеді. Қозғалыс теңдеуінің интегралы болмағандықтан, бұл мәселе бейстационар жүйелерге өңделген ұйытқу теориясының әдістерімен зерттеледі. Ұйытқу теорисын қолдануға массалы центрлік жұлдыз салыстырмалы координаталар жүйесінің қозғалыс теңдеуінің басы ретінде қолданылады. Квазиконусты қима бойынша периодты емес қозғалыс негізінде ұйытқу теориясының әдістері қолданылады. Екі планетаның қозғалысы реактивті күшті ескергенде массалары айнымалы анизотропты өзгеретін үш нүкте дене есебінің шеңберінде ұйытқу теңдеуінің қозғалысы Лагранж теңдеулерінің формасында сипатталады. Ұйытқу функциялары екі планетаның оскуляцияланған элементтері арқылы өрнектеледі. Ұйытқу функцияларының қатарға жіктелінуінің аналитикалық теңдеулері алынды. Жұмыста ұйытқу функциясының басты және жанама бөлігі көрсетілді. Планеталардың эксцентриситеттерінің квадраттарына дейінгі дәлдіктегі нақты жіктеуі орындалды. Алынған формулалар центрлік жұлдыз және планеталардың массаларының айнымалылығына байланысты орбиталық элементтердің эволюциясын зерттеуге қолданылады. Қарастырылған екі планеталы үш дене есебінің бейстационар айнымалы эволюция сатысындағы динамикалық эффектілерді сипаттайды. Күрделі аналитикалық есептеулерді орындауда Mathematica пакет бағдарламасын қолдандық.

Түйін сөздер: айнымалы массалы үш дене есебі, бейстационар экзопланеталық жүйелер, айнымалы массалы жұлдыздар, апериодикалық қозғалыс, протопланеталық диск.

Сведения об авторах:

Минглибаев Мухтар Джумабекович, д.ф.-м.н., профессор. Казахский национальный университет имени аль-Фараби. ДТОО Астрофизический Институт им. В.Г. Фесенкова, ГНС. Дом.адрес: Алматы, ул. Жарокова, д. 288, кв. 35. Телефон: 2476086, e-mail: minglibayev@gmail.com

Шомшекова Сауле Ахметбековна - PhD-докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби. ДТООАстрофизический Институт им. В.Г. Фесенкова, НС. Дом. адрес: Алматы, ул. Шелихова 163. Телефон: 2607591, e-mail: shomshekova.saule@gmail.com.

МАЗМҰНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Publication Ethics and Publication Malpractice in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see http://www.elsevier.com/publishingethics and http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see http://www.elsevier.com/postingpolicy), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct (http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service http://www.elsevier.com/editors/plagdetect.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

www:nauka-nanrk.kz

http://www.physics-mathematics.kz

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Редакторы *М. С. Ахметова, Т.А. Апендиев, Д.С. Аленов*
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 05.06.2018.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
10 п.л. Тираж 300. Заказ 3.

Национальная академия наук РК
050010, Алматы, ул. Шевченко, 28, т. 272-13-18, 272-13-19