

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ  
әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
Қазақстан Республикасының  
Ғылым Академиясының  
им. аль-Фараби

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
Al-Farabi  
Kazakh National University

### SERIES PHYSICO-MATHEMATICAL

## 6 (334)

NOVEMBER – DECEMBER 2020

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі  
**Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошкаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Байгунчеков Ж.Ж.** проф., академик (Қазақстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., академик (Қазақстан)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорусь)  
**Молдабеков М. М.** проф., академик (Қазақстан)  
**Мырзакулов Р.** проф., академик (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф., академик (Қазақстан)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Рамазанов Т.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)  
**Тулешов А.К.** проф., чл.-корр. (Қазақстан)  
**Уалиев З.Г.** проф., чл.-корр. (Қазақстан)

**«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.).

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінің Ақпарат комитетінде 14.02.2018 ж. берілген № 16906-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

Тақырыптық бағыты: *физика-математика ғылымдары және ақпараттық технологиялар саласындағы басым ғылыми зерттеулерді жариялау.*

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28; 219, 220 бөл.; тел.: 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2020

Типографияның мекенжайы: «NurNaz GRACE», Алматы қ., Рысқұлов көш., 103.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК  
**Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Байгунчеков Ж.Ж.** проф., академик (Казахстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., академик (Казахстан)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Молдабеков М. М.** проф., академик (Казахстан)  
**Мырзакулов Р.** проф., академик (Казахстан)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Рамазанов Т.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)  
**Тулешов А.К.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Уалиев З.Г.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф., академик (Казахстан)

**«Известия НАН РК. Серия физика-математическая».**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и коммуникаций Республики Казахстан № 16906-Ж, выданное 14.02.2018 г.

Тематическая направленность: *публикация приоритетных научных исследований в области физико-математических наук и информационных технологий.*

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28; ком. 219, 220; тел.: 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2020

Адрес типографии: «NurNaz GRACE», г. Алматы, ул. Рыскулова, 103.

E d i t o r i n c h i e f

doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK

**G.M. Mutanov**

E d i t o r i a l b o a r d:

**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Baigunchekov Zh.Zh.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Kalimoldaev M.N.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Moldabekov M. M.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Myrzakulov R.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Ramazanov T.S.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)  
**Tuleshov A.K.** prof., chl.-korr. (Kazakhstan)  
**Ualiev Z.G.** prof., chl.-korr. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof., academician (Kazakhstan)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty).

The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Communications of the Republic of Kazakhstan **No. 16906-Ж**, issued on 14.02.2018.

Thematic scope: *publication of priority research in the field of physical and mathematical sciences and information technology.*

Periodicity: 6 times a year.

Circulation: 300 copies.

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19; 272-13-18,

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2020

Address of printing house: «NurNaz GRACE», 103, Ryskulov str, Almaty.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
 PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.92>

Volume 6, Number 334 (2020), 13 – 18

УДК 517.956  
 МРНТИ 27.31.15

С. А. Алдашев, З. Н. Канапьянова

<sup>1</sup>Институт математики, физики и информатики, КазНПУ им. Абая, Алматы, Казахстан.  
 E-mail: kanapyanova81@bk.ru

## СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

**Аннотация.** Известно, что в пространстве при математическом моделировании электромагнитных полей в пространстве характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда непроводящая, то получаем вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. Следовательно, анализ электромагнитных полей в сложных средах (например, если проводимость среды меняется) сводятся к вырождающимся многомерным гиперболическим уравнениям. Известно также, что колебания упругих мембран в пространстве по принципу Гамильтона можно моделировать вырождающимися многомерными гиперболическими уравнениями. Следовательно, исследуя математическое моделирование процесса распространения тепла в колеблющихся упругих мембранах, также приходим к вырождающимся многомерным гиперболическим уравнениям. При изучении этих приложений возникает необходимость получения явного представления решений исследуемых задач. Смешанная задача для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах хорошо исследована. Эта задача также изучена в работах С.А.Алдашева, где показано, что ее корректность существенно зависит от высоты рассматриваемой цилиндрической области. На важность исследований многомерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка обратил внимания А.В. Бицадзе. Смешанные задачи для этих уравнений ранее не были изучены. В данной работе показана разрешимость смешанной задачи и получен явный вид классического решения для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка.

**Ключевые слова:** Евклидово пространство, тригонометрические функции, полярные координаты, ортогональность, функция Бесселя.

**п.1. Введение.** Смешанная задача для вырождающихся линейных гиперболических уравнений в обобщенных пространствах изучена в [1]. В [2,3] установлены корректность смешанной задачи для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений.

В данной работе показана разрешимость и получен явный вид классического решения смешанной задачи для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка

**п.2. Постановка задачи и результат.** Пусть  $D_\beta$  – цилиндрическая область евклидова пространства  $E_3$  точек  $(x_1, x_2, t)$ , ограниченная цилиндром  $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$ , плоскостями  $t = \beta > 0$  и  $t = 0$ , где  $|x|$  – длина вектора  $x = (x_1, x_2)$ . Части этих поверхностей, образующих границу  $\partial D_\beta$  области  $D_\beta$ , обозначим через  $\Gamma_\beta, S_\beta, S_0$  соответственно.

В области  $D_\beta$ , рассмотрим трехмерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^2 k_i(t) u_{x_i x_i} - k_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^2 a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u = 0, \quad (1)$$

где  $k_i(t) > 0$  при  $t > 0$  и могут обращаться в нуль при  $t = 0$ ,  $k_i(t) \in C([0, \beta]) \cap C^2((0, \beta))$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Уравнение (1) гиперболично при  $t > 0$ , а вдоль плоскости  $t = 0$  имеет место вырождение его типа и порядка.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат  $x_1, x_2, t$  с полярными  $r, \theta, t$ :  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

В качестве смешанной задачи рассмотрим задачу:

**Задача 1.** Найти решение уравнения (1) в области  $D_\beta$ , из класса  $C(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_0} = \tau(r, \theta), \quad u_t|_{S_0} = \nu(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\beta} = \psi(t, \theta), \quad (2)$$

при этом  $\tau(1, \theta) = \psi(0, \theta), \nu(1, \theta) = \psi_t(0, \theta)$ .

Пусть  $\frac{a_i(r, \theta, t)}{k_3(t)}, \frac{b_i(r, \theta, t)}{k_3(t)}, \frac{c_i(r, \theta, t)}{k_3(t)}, \in C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta), i = 1, 2$ .

Тогда справедлива

**Теорема.** Если  $\varphi(r, \theta) \in C^1(\bar{S}_\beta) \cap C^3(S_\beta)$ ,  $\psi(t, \theta) \in C^1(\bar{\Gamma}_\beta) \cap C^3(\Gamma_\beta)$ ,  $\tau(r, \theta), \nu(r, \theta) \in C^1(\bar{S}_0) \cap C^3(S_0)$  и выполняется условие

$$\cos \mu_{s,n} \beta' \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

то задача 1 имеет решение, где  $\mu_{s,n}$  – положительные нули функций Бесселя первого рода  $J_n(z)$ ,

$$\beta' = \int_0^\beta \sqrt{\frac{[k_1(\xi) + k_2(\xi)]}{2k_3(\xi)}} d\xi, \quad n = 0, 1, \dots$$

**п.3. Доказательство теоремы.** Решение задачи 1 в полярных координатах будем искать в виде ряда

$$u(\tau, \theta, t) = u_{10}(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{1n}(r, t) \cos n\theta + u_{2n}(r, t) \sin n\theta), \quad (4)$$

где  $u_{10}(r, t), u_{1n}(r, t), u_{2n}(r, t)$  - функции, которые будут определены ниже.

Подставив (4) в (1), в полярных координатах будем иметь

$$\begin{aligned} Lu \equiv & k_1(t) \left( \cos^2 \theta u_{10rr} + \frac{\sin^2 \theta}{r} u_{10r} \right) + k_2(t) \left( \sin^2 \theta u_{10rr} + \frac{\cos^2 \theta}{r} u_{10r} \right) - u_{10tt} + \\ & + a_1(r, \theta, t) \cos \theta u_{10r} + a_2(r, \theta, t) \sin \theta u_{10r} + b(r, \theta, t) u_{10t} + c(r, \theta, t) u_{10} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ k_1(t) \left[ \cos^2 \theta (\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \frac{\sin^2 \theta}{r} (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{n \sin 2\theta}{r} (\sin n\theta u_{1nr} - \cos n\theta u_{2nr}) + \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{n^2 \sin^2 \theta}{r^2} (\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \right] + k_2(t) \left[ \sin^2 \theta (\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{n \sin 2\theta}{r} (\cos n\theta u_{2nr} - \sin n\theta u_{1nr}) + \frac{\cos^2 \theta}{r} (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) - \frac{n^2}{r^2} \cos^2 \theta (\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \right] - \right. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & -u_{1nt} \cos n\theta - u_{2nt} \sin n\theta + a_1 \left[ \cos \theta (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n \sin \theta}{r} (\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) \right] + \\
 & + a_2 \left[ \sin \theta (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n \cos \theta}{r} (\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) \right] + \\
 & + b(\cos n\theta u_{1nt} + \sin n\theta u_{2nt}) + c(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \} = 0.
 \end{aligned}$$

Теперь полученное выражение (5) сначала умножим на  $\rho(\theta) \neq 0$ , а затем проинтегрируем от 0 до  $2\pi$ . После несложных преобразований получим ряд

$$\begin{aligned}
 & \frac{(k_1 + k_2)}{2} \rho_{10} \left( u_{10rr} + \frac{1}{r} u_{10r} \right) - \rho_{10} u_{10t} + \frac{(k_1 - k_2)}{2} d_{10} \left( u_{10rr} - \frac{1}{r} u_{10r} \right) \\
 & + a_{10}(r, t) u_{10r} + b_{10}(r, t) u_{10t} + c_{10}(r, t) u_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{(k_1 + k_2)}{2} \rho_{jn} (u_{jnrr} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{r} u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn}) - \rho_{jn} u_{jnt} + \frac{(k_1 - k_2)}{2} d_{jn} \left( u_{jnrr} - \frac{1}{r} u_{jnr} + \frac{n^2}{r^2} u_{jn} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(k_2 - k_1)}{2} e_{jn} \left( u_{jnr} - \frac{u_{jn}}{r} \right) + a_{jn}(r, t) u_{jnr} + b_{jn}(r, t) u_{jnt} + c_{jn}(r, t) + u_{jn} \right] \right\} = 0, \\
 & \rho_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad \rho_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin n\theta d\theta, \quad d_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \cos n\theta d\theta, \\
 & d_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \sin n\theta d\theta, \quad e_{1n} = -\int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \sin n\theta d\theta, \quad e_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \cos n\theta d\theta, \\
 & a_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta) \cos n\theta d\theta, \quad a_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho (a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta) \sin n\theta d\theta, \\
 & b_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho b \cos \theta d\theta, \quad b_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho b \sin \theta d\theta, \quad c_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho \left[ (a_1 \sin \theta - a_2 \cos \theta) \frac{n \sin n\theta}{r} + c \cos n\theta \right] d\theta, \\
 & c_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \left[ (a_2 \cos \theta - a_1 \sin \theta) \frac{n \cos n\theta}{r} + c \sin n\theta \right] d\theta, \quad n = 0, 1, \dots
 \end{aligned} \tag{6}$$

Далее рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$k(t) \rho_{10} \left( u_{10rr} + \frac{1}{r} u_{10r} \right) - \rho_{10} u_{10t} = 0, \quad k(t) = \frac{k_1(t) + k_2(t)}{2}. \tag{7}$$

$$k(t) \rho_{j1} \left( u_{j1rr} + \frac{1}{r} u_{j1r} - \frac{u_{j1}}{r^2} \right) - \rho_{j1} u_{j1t} = \frac{(k_2 - k_1) d_{10}}{2} \left( u_{10rr} - \frac{u_{10r}}{r} \right) - a_{10} u_{10r} - b_{10} u_{10t} - c_{10} u_{10}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 & k(t) \rho_{j1} \left( u_{jnrr} + \frac{1}{r} u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn} \right) - \rho_{jn} u_{jnt} = -\frac{(k_1 - k_2)}{2} d_{jn-1} \left( u_{jn-1rr} - \frac{1}{r} u_{jn-1r} + \frac{(n-1)^2}{r^2} u_{jn-1} \right) - \\
 & - \frac{(k_2 - k_1)}{r} e_{jn-1} \left( u_{jn-1r} - \frac{u_{jn-1}}{r} \right) - a_{jn-1} u_{jn-1r} - b_{jn-1} u_{jn-1t} - c_{jn-1} u_{jn-1}, \quad j = 1, 2, n = 2, 3, \dots
 \end{aligned} \tag{9}$$

Нетрудно показать, что если  $\{u_{10}, u_{jn}\}, j=1,2, n=1,2,\dots$  решение системы (7)-(9), то оно является и решением уравнения (6).

Далее, учитывая ортогональность ([4]) систем тригонометрических функций  $\{1, \cos n\theta, \sin n\theta, n=1,2,\dots\}$  на отрезке  $[0; 2\pi]$ , из краевого условия (2) в силу (4) будем иметь

$$u_{10}(r,0) = \tau_{10}(r), u_{10t}(r,0) = v_{10}(r), u_{10}(1,t) = \psi_{10}(t), \quad (10)$$

$$u_{jn}(r,0) = \tau_{jn}(r), u_{jnt}(r,0) = v_{jn}(r), u_{jn}(1,t) = \psi_{jn}(t), j=1,2, n=1,2,\dots, \quad (11)$$

$$\tau_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(r,\theta) d\theta, v_{10}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) d\theta, \psi_{10}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t,\theta) d\theta,$$

$$\tau_{1n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(r,\theta) \cos n\theta d\theta, v_{1n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) \cos n\theta d\theta, \psi_{1n}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t,\theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$\tau_{2n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(r,\theta) \sin n\theta d\theta, v_{2n}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r,\theta) \sin n\theta d\theta, \psi_{2n}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t,\theta) \sin n\theta d\theta,$$

$n=1,2,\dots$

Таким образом, задача 1 сведена к системе смешанных задач для уравнений (7) -(9). Теперь найдем решения этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)-(9) можно представить в виде

$$k(t) \left( u_{jnrr} + \frac{1}{r} u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn} \right) - u_{nnt} = f_{jn}(r,t), n=0,1,\dots \quad (12)$$

где  $\bar{k}(t) = \frac{k(t)}{k_3(t)}$ ,  $f_n(r,t)$  определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом  $f_0(r,t) \equiv 0$ .

В [3] показано, что задачи (12),(10) и (12),(11) однозначно разрешимы, если выполняется условие (3).

Далее, сначала решив задачи (7), (10) ( $j=1,2, n=0$ ), а затем (8), (11)

( $j=1,2, n=1$ ) и т.д. найдем последовательно все  $u_{10}(r,t), u_{jn}(r,t), j=1,2, n=1,2,\dots$

Следовательно, задачи (6), (10) и (6), (11) также однозначны разрешимы. Итак, показано, что

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta) Lu d\theta = 0. \quad (13)$$

Пусть  $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$ , причем  $R(r) \in V_0, V_0$  – плотна в  $L_2((0,1))$ ,  $\rho(\theta) \in C^\infty((0,2\pi))$  – плотна в  $L_2((0,2\pi))$ , а  $R(t) \in V_1, V_1$  – плотна в  $L_2((0,\beta))$ . Тогда  $f(r,\theta,t) \in V, V = V_0 \otimes (0,2\pi) \otimes V_1$  – плотна в  $L_2(D_\beta)$  ([4]).

Отсюда и из (13), следует, что

$$\int_{D_\beta} f(r,\theta,t) Lu dD_\beta = 0$$

и

$$Lu = 0, \forall (r,\theta,t) \in D_\beta.$$

Таким образом, решением задач 1 является функция (4), где  $u_{10}(r, t)$ ,  $u_{jn}(r, t)$ ,  $j = 1, 2, n = 1, 2, \dots$  определяются из предыдущих двумерных задач.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции  $\varphi(r, \theta)$ ,  $\psi(r, \theta)$ ,  $\tau(r, \theta)$ ,  $\nu(r, \theta)$ , аналогично как в [2, 3], можно показать, что полученное решение (4) принадлежит классу  $C(\overline{D_\beta}) \cap C^2(D_\beta)$ .

Следовательно, теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда науки КазНПУ (договор №8 от 05.01.2020г.)

**С.А. Алдашев, З.Н. Канапьянова**

Математика, физика және информатика институты,  
Абай атындағы ҚазҰПУ, Алматы, Қазақстан

### ТҮРІ МЕН ДӘРЕЖЕСІ ӨЗГЕРТІЛГЕН ҮШӨЛШЕМДІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ АРАНАЛҒАН АРАЛАС ЕСЕП

**Аннотация.** Кеңістіктегі электромагниттік өрісті математикалық модельдеу кезінде электромагниттік процес сипаты ортаның қасиеттері негізінде анықталатыны белгілі. Егер орта өткізгіш болмаса, онда көпөлшемді гиперболалық теңдеулерді аламыз. Сондықтан күрделі ортадағы электромагниттік өрістерді талдағанда (мысалы, егер қоршаған ортаның өткізгіштігі өзгерсе) көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулерге келеміз. Сондай-ақ, Гамильтон принципі бойынша кеңістіктегі серпімді мембраналардың тербелістерін зерттегенде көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулермен модельдеуге болатындығы белгілі. Сондықтан тербелмелі серпімді мембраналарда жылудың таралу үдерісін математикалық модельдеуді зерттей отырып, көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулерге келеміз. Осы мәселелерді зерттеу кезінде нақты шешімдерді келтіру қажет. Жалпыланған кеңістікте көпөлшемді өзгертілген гиперболалық теңдеулерге аралас есептер жақсы зерттелген. Бұл есеп С.А. Алдашевтің еңбектерінде де зерттелген, онда есептің дұрыстығы қарастырылып отырған цилиндрлік аймақ биіктігіне байланысты екендігі көрсетілген. А.В. Бицадзе түрі мен дәрежесі өзгертілген көпөлшемді гиперболалық теңдеулерді зерттеудің маңыздылығына назар аударды. Бұл теңдеулер бойынша аралас есептер бұрын қарастырылмаған. Жұмыста түрі мен дәрежесі өзгертілген үшөлшемді гиперболалық теңдеулерге араланған аралас есеп шешімінің барлығы дәлелденген және оның нақты түрі келтірілген.

**Түйін сөздер:** Евклидті кеңістік, тригонометриялық функциялар, полярлық координаттар, ортогоналдылық, Бессель функциясы.

**S. A. Aldashev, Z. N. Kanapyanova**

Institute of Mathematics, Physics and Informatics,  
KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan

### IXED PROBLEM FOR THREE-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS WITH DEGENERATION OF TYPE AND ORDER

**Abstract.** It is known that in space during mathematical modeling of electromagnetic fields in space, the nature of the electromagnetic process is determined by the properties of the medium. If the medium is non-conductive, then we get degenerating multidimensional hyperbolic equations. Therefore, the analysis of electromagnetic fields in complex environments (for example, if the conductivity of the medium changes) is reduced to degenerating multidimensional hyperbolic equations. It is also known that oscillations of elastic membranes in space according to the Hamilton principle can be modeled by degenerating multidimensional hyperbolic equations. Therefore, by studying mathematical modeling of the process of heat propagation in oscillating elastic membranes, we also come to degenerating multidimensional hyperbolic equations. When studying these applications, it becomes necessary to obtain a clear representation of the solutions to the investigated problems. The mixed problem for degenerating multidimensional hyperbolic equations in generalized spaces is well researched. This task is also studied in the works of S. A. Aldashev, where it is shown that its correctness significantly depends on the height of the cylindrical region

under consideration. A.V. Bitsadze drew attention to the importance of studies of multidimensional hyperbolic equations with degeneration of type and order. Mixed problems for these equations have not previously been studied. In this work, the solvability of a mixed problem is shown and a clear form of a classical solution for three-dimensional hyperbolic equations with degeneration of type and order is obtained.

**Keyword:** Euclidean spaces, trigonometric functions, polar coordinates, orthogonality, Bessel function.

**Information about authors:**

Aldashev C.A., Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan; aldash51@mail.ru; <https://orcid.org/0000-0002-8223-6900>;

Kanapyanova Z.N., 6D060100-Mathematics 3-year, Institute of Mathematics, Physics and Informatics, KazNPU named after Abay, Almaty, Kazakhstan; kanapyanova81@bk.ru; <https://orcid.org/0000-0002-4214-4569>

**REFERENCES**

[1] Krasnov M. L. Mixed boundary value problems for degenerate linear hyperbolic second-order differential equations // *Mod. sat.*, 1959, vol. 49(91). 29–84 p.

[2] Aldashev S. A. Correctness of the mixed problem for a class of degenerate multidimensional hyperbolic equations // *Journal of "Computational and applied mathematics"*, Kiev: KNU them.T.G. Shevchenko, 2019, No. 2 (131). 5-14 p. DOI: 10.17721/1728-2721

[3] Aldashev S. A. the Well Posedness of The Mixed Problem for Degenerate Multidimensional Hyperbolic Equations// *proceedings of conference "Modern Problems of Mathematical Modeling, Computational methods and information"*, Kiev, KNU. Shevchenko, 2018, 14-15 p. DOI: 10.17721/1728-2721

[4] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *elements of the theory of functions and functional analysis*, Moscow: Nauka, 1976, 543 p.

**Publication Ethics and Publication Malpractice**  
**in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

(Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы: *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, А. Ахметова*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 07.12.2020.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
п.л. Тираж 300. Заказ 6.