

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ  
әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
Қазақстан Республикасының  
Ғылым Академиясының  
им. аль-Фараби

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
Al-Farabi  
Kazakh National University

### SERIES PHYSICO-MATHEMATICAL

## 6 (334)

NOVEMBER – DECEMBER 2020

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі  
**Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошкаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Байгунчеков Ж.Ж.** проф., академик (Қазақстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., академик (Қазақстан)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорусь)  
**Молдабеков М. М.** проф., академик (Қазақстан)  
**Мырзакулов Р.** проф., академик (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф., академик (Қазақстан)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Рамазанов Т.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)  
**Тулешов А.К.** проф., чл.-корр. (Қазақстан)  
**Уалиев З.Г.** проф., чл.-корр. (Қазақстан)

«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.).

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінің Ақпарат комитетінде 14.02.2018 ж. берілген № 16906-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

Тақырыптық бағыты: *физика-математика ғылымдары және ақпараттық технологиялар саласындағы басым ғылыми зерттеулерді жариялау.*

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28; 219, 220 бөл.; тел.: 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2020

Типографияның мекенжайы: «NurNaz GRACE», Алматы қ., Рысқұлов көш., 103.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК  
**Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Байгунчеков Ж.Ж.** проф., академик (Казахстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., академик (Казахстан)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Молдабеков М. М.** проф., академик (Казахстан)  
**Мырзакулов Р.** проф., академик (Казахстан)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Рамазанов Т.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)  
**Тулешов А.К.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Уалиев З.Г.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф., академик (Казахстан)

**«Известия НАН РК. Серия физика-математическая».**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и коммуникаций Республики Казахстан № 16906-Ж, выданное 14.02.2018 г.

Тематическая направленность: *публикация приоритетных научных исследований в области физико-математических наук и информационных технологий.*

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28; ком. 219, 220; тел.: 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2020

Адрес типографии: «NurNaz GRACE», г. Алматы, ул. Рыскулова, 103.

Editor in chief

doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK

**G.M. Mutanov**

Editorial board:

**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Baigunchekov Zh.Zh.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Kalimoldaev M.N.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Moldabekov M. M.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Myrzakulov R.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Ramazanov T.S.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)  
**Tuleshov A.K.** prof., chl.-korr. (Kazakhstan)  
**Ualiev Z.G.** prof., chl.-korr. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof., academician (Kazakhstan)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty).

The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Communications of the Republic of Kazakhstan **No. 16906-Ж**, issued on 14.02.2018.

Thematic scope: *publication of priority research in the field of physical and mathematical sciences and information technology.*

Periodicity: 6 times a year.

Circulation: 300 copies.

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2020

Address of printing house: «NurNaz GRACE», 103, Ryskulov str, Almaty.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.93>

Volume 6, Number 334 (2020), 19 – 26

UDC 539.3

A. Seitmuratov<sup>1</sup>, M.Zh. Aitimov<sup>1</sup>, A. Seitkhanova<sup>3</sup>,  
A. Ostayeva<sup>1</sup>, E. Tulegenova<sup>1</sup>, D. Janyssova<sup>1</sup>, T. Shamilov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan;<sup>2</sup>Azerbaijan University of Architecture and Construction, Azerbaijan, Baku;<sup>3</sup>Pavlodar Pedagogical University, Pavlodar, Kazakhstan.

E-mail: angisin\_@mail.ru

## SOLUTION OF PRIVATE TASKS OF CYLINDRICAL SHEAR WAVES (in the case of the distribution of constant values $\gamma - \alpha + 2 > 0$ and $\alpha = \beta$ )

**Abstract.** Many studies usually use two methods to determine wave characteristics.

First-The instantaneous state of the medium corresponding to a certain fixed moment of time is investigated.

Second-The change in time of the state of the body in question at some fixed point is investigated.

If studies are carried out taking into account the rheological properties of the material of the system in question or, if there is an environment surrounding the system, which also generally exhibits rheological properties, the use of these methods is significantly difficult. In such cases, the influence of rheological parameters on the components of the complex phase velocity at certain values of the vibration frequencies is studied.

**Key words:** deformable bodies, shear wave, vibrations, cylindrical shell, rod, viscoelastic medium.

This problem will be two-dimensional depending on two coordinates  $(R, \theta)$  and only the shear displacement  $u_z(r, \theta, t)$  and components of the stress tensor  $\sigma_{zr}$  and  $\sigma_{z\theta}$  other than zero

The problem statement will be as in [1]

Let a shear cylindrical wave propagate in an elastic inhomogeneous transversally isotropic cylindrical layer. At the moment  $t = 0$ , the tangential stress pulse  $\sigma_{zr}$  or the displacement  $u_z$ , but changing in coordinate  $\theta$ .

We solve the problem in dimensionless variables

$$\tau = \frac{bt}{r_0}; \quad r = \frac{R}{r_0}; \quad u = \frac{u_z}{r_0} \quad (1)$$

Where  $r_0$  - is the inner radius of the layer.

$b$  - is the shear wave velocity.

Hooke's law in an elastic inhomogeneous medium has the form

$$\sigma_{zr} = \mu_1(r) \frac{\partial u}{\partial r};$$

$$\sigma_{z\theta} = \mu_2(r) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}; \quad (2)$$

The equation of motion reduces to the following

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{zr} = \rho(r) b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (3)$$

Substituting (2) into equation (3) we obtain the basic equation, which has the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{\mu_1'(r)}{\mu_1(r)} \right] \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\mu_2(r) \partial^2 u}{\mu_1(r) \partial \theta^2} = \frac{b^2 \rho(r)}{\mu_1(r)} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \quad (4)$$

Let the boundary conditions for this problem have the form

$$\sigma_{zr} = f_m(\tau) \cos(m\theta) \text{ for } r = 1 \quad (5)$$

$$\sigma_{zr} = 0 \text{ for } r = r_1 \text{ (and } r_1 > 1) \quad (6)$$

In addition to the boundary conditions, it is necessary to specify initial conditions that are zero in our problem, i.e.

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} &= 0 \\ u \Big|_{\tau=0} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Since a linear problem is considered, it is advisable to use the one-sided Laplace transform over dimensionless time to solve it.

We apply the Laplace transform with respect to  $\tau$  to equation (4) and obtain

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{\mu_1'(r)}{\mu_1(r)} \right] \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\mu_2(r) \partial^2 u_0}{r^2 \mu_1(r) \partial \theta^2} = \frac{\rho(r) b^2}{\mu_1(r)} p^2 u_0 \quad (8)$$

The solution to equation (8) is sought in the form

$$u_0 = T(r) \cos(m\theta) \quad (9)$$

Flat

$$u_0 = \int_0^\infty u(r, \theta, t) e^{-p\tau} d\tau \quad (10)$$

Then equation (8) takes the form

$$\frac{\partial^2 T(r)}{\partial r^2} + \left[ \frac{1}{r} + \frac{\mu_1'(r)}{\mu_1(r)} \right] \frac{\partial T(r)}{\partial r} - \left[ \frac{m^2 \mu_2(r)}{r^2 \mu_1(r)} + \frac{\rho(r) b^2}{\mu_1(r)} p^2 \right] T(r) = 0 \quad (11)$$

In the future, we will assume that the inhomogeneity of the medium has the form

$$\mu_1(r) = \mu_{10} r^\alpha; \mu_2(r) = \mu_{10} r^\beta; \rho(r) = \rho_0 r^\gamma \quad (12)$$

Moreover,  $b^2 = \frac{\mu_{10}}{\rho_1}$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  – constants.

Then equation (11) takes the form

$$r^2 T''(r) + r(1 + \alpha) T'(r) - (m^2 r^{\beta-\alpha} \gamma_1^2 + p^2 r^{\gamma-\alpha+2}) T(r) = 0 \quad (13)$$

Here  $\gamma_1^2 = \frac{\mu_{20}}{\mu_{10}}$

Suppose that  $\gamma - \alpha + 2 > 0$  and  $\alpha = \beta$

The general solution of equation (13) in the case under consideration is equal to

$$T_r = C_1 r^{-\frac{\alpha}{2}} K_y \left( \frac{2}{y-\alpha+2} \right) p r^{\left(\frac{\gamma-\alpha+2}{2}\right)} + C_2 r^{-\frac{\alpha}{2}} I_y \left( \frac{2}{y-\alpha+2} \right) p r^{\left(\frac{\gamma-\alpha+2}{2}\right)} \quad (14)$$

Here  $K_y(z)$  and  $I_y(z)$  - are the Bessel function of the imaginary argument, and

$$y = \frac{1}{\gamma-\alpha+2} \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma_1^2 m^2} \quad (15)$$

The constants  $C_1$  and  $C_2$  are determined from the boundary conditions (13) and (14)

$$C_1 = \frac{f_{m0}(p)[pr_1^s I_{y-1}(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] K_y(p \frac{r_1^s}{s})]}{\rho_0 b^2 [pK_{y-1}(\frac{p}{s}) + K_y(\frac{p}{s}) [ys + \frac{\alpha}{2}]] [pr_1^s I_{y-1}(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] I_y(p \frac{r_1^s}{s})] - [pI_{y-1}(\frac{p}{s}) [ys + \frac{\alpha}{2}]]} \cdot \frac{1}{[p \frac{r_1^s}{s} K_{y-1}(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] I_y(p \frac{r_1^s}{s})]} \tag{16}$$

Where 
$$S = \frac{\gamma - \alpha + 2}{2} \tag{17}$$

Consequently

$$T(r) = \frac{f_{m0}(p)}{\rho_0 b^2 r^{\frac{\alpha}{2}}} \{K_y(p \frac{r^s}{s}) [ [pr_1^s I_{y-1}(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] I_y(p \frac{r_1^s}{s}) ] + I_y(p \frac{r^s}{s}) [ [pr_1^s K_{y-1}(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] K_y(p \frac{r_1^s}{s}) ] ] \} \{ [pK_{y-1}(\frac{p}{s}) - K_y(\frac{p}{s}) [ys + \frac{\alpha}{2}]] [p \frac{r_1^s}{s} I_y(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] I_y(p \frac{r_1^s}{s}) ] - [pI_y(\frac{p}{s}) - I_y(\frac{p}{s}) [ys + \frac{\alpha}{2}]] [p \frac{r_1^s}{s} K_y(p \frac{r_1^s}{s}) - [ys + \frac{\alpha}{2}] K_y(p \frac{r_1^s}{s}) ] \}^{-1} \tag{18}$$

In the general case, it is very difficult to invert expression (18) with respect to p. Expression (18) can be inverted for discrete values of the index, i.e. when

$$\nu = n + \frac{1}{2} \tag{19}$$

where n is an integer, then the Bessel functions are elementary.

For example, for  $n = 0$

$$T(r) = \frac{f_{m0}(p)}{\rho_0 b^2 r^{\frac{\alpha}{2}}} \{K_{\frac{1}{2}}(p \frac{r^s}{s}) [ [pr_1^s I_{-\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) - [\frac{s + \alpha}{2}] I_{\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) ] ] + I_{\frac{1}{2}}(p \frac{r^s}{s}) [ [pr_1^s K_{-\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) - [\frac{s + \alpha}{2}] K_{\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) ] ] \} \{ [pK_{-\frac{1}{2}}(\frac{p}{s}) - K_{\frac{1}{2}}(\frac{p}{s}) [\frac{s + \alpha}{2}]] [p \frac{r_1^s}{s} I_{-\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) - [\frac{s + \alpha}{2}] I_{\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) ] - [pI_{-\frac{1}{2}}(\frac{p}{s}) - I_{\frac{1}{2}}(\frac{p}{s}) [\frac{s + \alpha}{2}]] [p \frac{r_1^s}{s} K_{-\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) + [\frac{s + \alpha}{2}] K_{\frac{1}{2}}(p \frac{r_1^s}{s}) ] \}^{-1} \tag{20}$$

Given that

$$K_{n+(\frac{1}{2})}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}$$

$$I_{\pm(n+(\frac{1}{2}))}(z) = \frac{1}{\sqrt{2z\pi}} [e^z \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k} + (-1)^{n+1} e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}]$$

or 
$$K_{\pm(\frac{1}{2})}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} I_{\pm(\frac{1}{2})}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{\sqrt{2\pi z}} \tag{21}$$

We rewrite expression (21) as

$$T(r) = \frac{f_{m0}(p)}{\rho_0 b^2} r^{-\frac{\gamma+\alpha+2}{4}} \left\{ \frac{e^{\frac{p}{s}(r_1^s - r^s)}}{\left[ \frac{p}{e^{\frac{p}{s}(r_1-1)}} - e^{-\frac{p}{s}(r_1-1)} \right] \left( p + \frac{s}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)} + \frac{e^{-\frac{p}{s}(r_1^s - r^s)}}{\left[ \frac{p}{e^{\frac{p}{s}(r_1-1)}} - e^{-\frac{p}{s}(r_1-1)} \right] \left( p - \frac{s}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} \right\} \quad (22)$$

Or

$$T(r) = \frac{f_{m0}(p)}{\rho_0 b^2} r^{-\frac{\gamma+\alpha+2}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p + \frac{\gamma+\alpha+2}{4}} - \frac{\exp[-\varphi_2(r)p]}{p - \frac{\gamma+\alpha+2}{4}} \right\} \quad (23)$$

Where

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= [(r^s - 1) + 2k(r_1^s - 1)] \frac{1}{s} \\ \varphi_2(r) &= [-(r^s - 1) + 2k(r_1^s - 1)] \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (24)$$

Consider the expression

$$T(r) = \frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p + \frac{\gamma+\alpha+2}{4}} = \frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \left( -\frac{\gamma+\alpha+2}{4} \right)^k \frac{1}{p^m} \quad (25)$$

We denote

$$E_{10} = \frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p} \quad (26)$$

$$E_{1m} = \frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p^{m+1}}$$

and get

$$\begin{aligned} E_{11} &= \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} E_{10} d\xi; E_{12} = \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{1!} E_{10} d\xi \\ E_{13} &= \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{2!} E_{10} d\xi; \dots, E_{1m} = \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{(m-1)!} E_{10} d\xi \end{aligned}$$

Then the expression (25) takes the form

$$\begin{aligned} T_1(r) &= E_{10} - \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} E_{10} d\xi + \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{1!} E_{10} d\xi - \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{2!} E_{10} d\xi + \\ &\dots + \left( -\frac{\gamma+\alpha+2}{4} \right)^m \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{(m-1)!} E_{10} d\xi = E_{10} - \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \frac{(\xi - \varphi_1(r))}{1!} + \right. \\ &\left. \left( \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \right)^2 \frac{(\xi - \varphi_1(r))^2}{2!} - \dots + \left( \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \right)^{m-1} \frac{(\xi - \varphi_1(r))^{m-1}}{(m-1)!} + \dots \right\} E_{10} d\xi \end{aligned} \quad (27)$$

or

$$T_1(r) = E_{10} - \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} e^{-\frac{\gamma+\alpha+2}{4}(\xi - \varphi_1(r))} E_{10} d\xi \quad (28)$$

$$T_1(r) = \frac{\exp[-\varphi_2(r)p]}{p - \frac{\gamma+\alpha+2}{4}} = -\frac{\exp[-\varphi_1(r)p]}{p} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma+\alpha+2}{4} \right)^m \frac{1}{p^m} \quad (29)$$

We denote

$$E_{20} = \frac{\exp[-\varphi_2(r)p]}{p} \quad (30)$$



$$E_{2m} = \frac{\exp[-\varphi_2(r)p]}{p^{m+1}}$$

As previously put

$$E_{21} = \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} E_{20} d\xi; E_{22} = \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_2(r))}{1!} E_{20} d\xi$$

$$E_{23} = \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_2(r))^2}{2!} E_{20} d\xi; \dots, E_{2m} = \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_2(r))^{m-1}}{(m-1)!} E_{20} d\xi \tag{31}$$

Consequently

$$-T_2(r) = E_{20} + \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} E_{20} d\xi + \dots + \left(\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}\right)^m \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \frac{(\xi - \varphi_2(r))^{m-1}}{(m-1)!} E_{20} d\xi = E_{20} +$$

$$\frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \{1 + \dots + \left(\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}\right)^{m-1} \frac{(\xi - \varphi_2(r))^{m-1}}{(m-1)!} + \dots\} E_{20} d\xi \text{ or}$$

$$-T_2(r) = E_{20} + \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} e^{\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}(\xi - \varphi_2(r))} E_{20} d\xi \tag{32}$$

Thus, the expression for T takes the form:

$$T(r) = \frac{f_{m0}(p)}{\rho_0 b^2} r^{-\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ E_{10} - \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \exp\left[-\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}(\xi - \varphi_1(r))\right] E_{20} d\xi + E_{20} + \right.$$

$$\left. \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \exp\left[-\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}(\xi - \varphi_2(r))\right] E_{20} d\xi \right\} \tag{33}$$

Inverting the expression in P, we obtain

$$T = \frac{1}{\rho_0 b^2} r^{-\gamma + \alpha + 2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\tau} \left\{ E_{10} - \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_1(r)}^{\infty} \exp\left[-\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}(\xi - \varphi_1(r))\right] E_{20} d\xi \right\} f_m(\tau - z) dz +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\tau} \left\{ E_{20} + \frac{\gamma + \alpha + 2}{4} \int_{\varphi_2(r)}^{\infty} \exp\left[\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}(\xi - \varphi_2(r))\right] E_{20} d\xi \right\} f_m(\tau - z) dz \tag{34}$$

where

$$E_{10} = J_0(\tau - \varphi_1(r)); E_{20} = J_0(\tau - \varphi_2(r))$$

$$K_1 = \left[ \frac{s\tau - (r^s - 1)}{2(r_1^s - 1)} \right]; K_2 = \left[ \frac{s\tau + (r^s - 1)}{2(r_1^s - 1)} \right] \tag{35}$$

Knowing T, we can determine  $(r, \theta, \tau)$

$$u(r, \theta, \tau) = T(\tau, r) \cos(m\theta) \tag{36}$$

Similarly, we can obtain expressions for the stress  $\sigma_{zr}$  and  $\sigma_{z\theta}$

$$\frac{\sigma_{zr}}{\cos(m\theta)} = r^{-\frac{\gamma + \alpha + 2}{4}} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \int_0^{\tau} f(\tau - \xi) \frac{dE_{10}}{dr} d\xi - \frac{1}{r} f(\tau - \varphi_1(r)) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[ \int_0^{\tau} f(\tau - \xi) \frac{dE_{20}}{dr} d\xi - \frac{1}{r} f(\tau - \varphi_2(r)) \right] \right\} \tag{37}$$

$$\frac{\sigma_{z\theta}}{\sin(m\theta)} = m\mu_{20} r^{\frac{(-\gamma + 5\alpha + 6)}{4}} u(r, \theta, \tau) \tag{38}$$

Formulas (34), (36), (37), (38) give an exact solution to the problem, taking into account the entire complex wave picture.

In the calculation, it was assumed that the points of the inner surface of the cylindrical layer are rigidly fixed.

**А.Ж. Сейтмуратов<sup>1</sup>, М.Ж. Айтимов<sup>1</sup>, А.К. Сейтханова<sup>3</sup>,  
А.Б. Остаева<sup>1</sup>, Э. Төлегенова<sup>1</sup>, Д.Д. Джанысова<sup>1</sup>, Т. Шамилов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, Қызылорда, Қазақстан;

<sup>2</sup>Әзірбайжан архитектура және құрылыс университеті, Баку, Әзірбайжан;

<sup>3</sup>Павлодар педагогикалық университеті, Павлодар, Қазақстан

### **ЦИЛИНДРЛІК ЫҒЫСУ ТОЛҚЫНДАРЫНЫҢ ДЕРБЕС ЕСЕБІ ( тұрақты мәні $\gamma - \alpha + 2 > 0$ және $\alpha = \beta$ шамасы жағдайында)**

**Аннотация.** Деформацияланатын денелердегі дөңгелек элементтердің ығысу толқыны үдерістерін зерттеуде фазалық жылдамдық ұғымы фазалық ортаның өзгеру жылдамдығы ретінде енгізіледі. Цилиндрлік қабықтың гармоникалық тербелісі жағдайында фазалық жылдамдық қабық шетінде еркін тірелген тербеліс жиілімен сипатталады. Сондықтан цилиндрлік қабаттағы толқынды зерттеу арқылы ұзындықтағы қабықтың табиғи формалары мен тербеліс жиілігіне тікелей байланысты. Жұмыс нәтижесі бірөлшемді цилиндрлік толқындардың серпімді және жабысқақ орта, шыбық және материалдағы толқын өрісінің сипаттамасын зерттеуге мүмкіндік береді. Қарастырылған зерттеулер жүйе материалының реологиялық қасиеттерін ескеру негізінде жүргізілсе немесе қоршаған ортаның айналасында болса, онда бұл реологиялық қасиеттерді көрсетеді, аталған әдістерді қолдану айтарлықтай қиынға соғады. Мұндай жағдайда комплексті фазалық жылдамдықтың реологиялық параметрлері – тербеліс жиілігінің нақты мәні есептеледі. Жұмыс – жазықтық пен дөңгелек элементтердің толқын үдерістерінің тұрақтылық динамикасын зерттеуге арналған, сонымен қатар қабатты, серпімді жазықтық бетіне қозғалатын жүктеме әсері туралы жазықтық есебі, сызықты емес деформациялардан болатын кернеу заңы қарастырылған. Есептің қолданбалылығы – динамикалық есепті шешудің түрлі сандық алгоритмдерін жасау үшін қолданылады. Деформацияланатын ортадағы түрлі периодты және периодты емес қозғалысының басты мәні қарапайым гармоникалық типтегі жазықтық толқыны болып саналады, олардың әсері осы бетке жақын орналасқан. Сондықтан Реле таралу толқынының есебін қарастыра аламыз. Жартылай жазықтықтағы материалдың қозғалыс теңдеуі потенциалда  $\phi, \psi$  толқын теңдеулері негізінде сипатталады. Құрылымдарды немесе құрылымдарды жобалау барысында маңызды шарттардың бірі – құрылымдардың тұрақтылық жағдайы мен элементтері ескеріледі.

Ұзындықтың дөңгелек серпімді өзегін қарастырғанда белгілі бір уақытта штамның ұшына интенсивтіліктің осьтік сығылатын  $P(t)$  күші қолданылады деп болжам жасаймыз. Дөңгелек шыбықтың тұрақтылықты жоғалтуы математикалық теория негізінде және дөңгелек өзектің көлденең тербелісі негізінде зерттеледі [3]. Осы мәселелерге сүйене отырып, оған қалыпты немесе айналмалы ығысу кернеуі қолданылғанда қатаң немесе деформацияланатын шекаралармен шектелген серпімді қабат тербелісінің кейбір аксиметриялық мәселелерін қарастырамыз. Мәселелердің шешімі интегралдық түрлендіру арқылы координата және уақыт бойынша алынған.

**Түйін сөз:** деформацияланатын қатты дене, толқын, тербеліс, цилиндрлік тербеліс, сырық.

**А.Ж. Сейтмуратов<sup>1</sup>, М.Ж. Айтимов<sup>1</sup>, А.К. Сейтханова<sup>3</sup>,  
А.Б. Остаева<sup>1</sup>, Э. Тулегенова<sup>1</sup>, Д.Д. Джанысова<sup>1</sup>, Т. Шамилов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Қызылординский государственный университет им. Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан

<sup>2</sup>Азербайджанский университет Архитектуры и Строительства, Баку, Азербайджан

<sup>3</sup>Павлодарский педагогический университет, Павлодар, Казахстан

### **РЕШЕНИЕ ЧАСТНЫХ ЗАДАЧ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СДВИГОВЫХ ВОЛН (при раскладе постоянных величин $\gamma - \alpha + 2 > 0$ и $\alpha = \beta$ )**

**Аннотация.** При исследованиях сдвиговых волновых процессов круговых элементов в деформируемых телах вводится понятие фазовой скорости как скорости изменения фазовой среды. В случае гармонических колебаний цилиндрической оболочки фазовая скорость выражается через частоту собственных колебаний, свободно опертой по краям оболочки, и поэтому исследование волн в цилиндрическом слое имеет самое прямое отношение к проблеме определения собственных форм и частот колебаний оболочек конечной длины. Проводимые в данной работе результаты по одномерным цилиндрическим волнам в упругих и вязкоупругих средах и стержнях позволяют исследовать влияние характеристик материала сред на волновые поле в материале. Если исследования проводятся с учетом реологических свойств материала рассматриваемой системы или имеется окружающая систему среда, также в общем случае, проявляющая

реологические свойства, использование этих способов значительно затруднено. В таких случаях изучается влияние реологических параметров на составляющие комплексной фазовой скорости при определенных значениях частот колебаний. Поэтому работа посвящена изучению динамики устойчивости волновых процессов плоских и круговых элементов, а также рассматривается класс плоских задач о воздействии подвижных нагрузок на поверхность слоистой упругой полуплоскости при нелинейном законе зависимости напряжений от деформаций. Задачи данного класса представляют большой прикладной интерес и, кроме того, могут служить эталоном для разработки тех или иных численных алгоритмов для решения динамических задач. Среди различных периодических и непериодических движений деформируемых сред важное значение имеют плоские волны простого гармонического типа, распространяющиеся по поверхности тела или полуплоскости, влияние которых ограничивается окрестностью этой поверхности. Поэтому можно рассмотреть задачу о распространении волны Релея.

Если рассмотреть круглый упругий стержень длины, то будем предполагать, что к торцам стержня в какой-либо момент времени прикладывается осевая сжимающая сила интенсивности  $P(t)$ . Потеря устойчивости круглого стержня будет исследоваться на основе математической теории и поперечного колебания круглого стержня, изложенной в работе [3]. На основе этих задач можно рассмотреть некоторые осесимметричные задачи колебания упругого слоя, ограниченные жесткими или деформируемыми границами при воздействии на него нормального или вращательного касательного напряжения. Решения рассматриваемых задач получены с использованием интегральных преобразований по координате или по времени.

**Ключевые слова:** деформируемая твердая тела, волна, колебания, цилиндрическая оболочка, стержень, вязкоупругая среда.

#### Information about authors:

Seitmuratov Angisin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, The Korkyt Ata Kyzylorda State University. Kyzylorda, Kazakhstan. angisin\_@mail.ru .<https://orcid.org/0000-0002-9622-9584>;

Aitimov Myrat-PhD, The Korkyt Ata Kyzylorda State University. Kyzylorda, Kazakhstan. aitimovmurat07@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0002-8397-8914>;

Ainur Seitkhanova, Pavlodar Pedagogical University, Department "Physics", PhD – Mechanics. Pavlodar ainur1179@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-6667-4548>;

Ostayeva Aiymkhan Batyrkhanovna - Acting associate professor of the Department of Computer Science, candidate of pedagogical sciences. The Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan, aimak73@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-3361-2022>;

Tulegenova Elmira, Candidate of Economic Sciences, senior lecturer. The Korkyt Ata Kyzylorda State University. Kyzylorda, Kazakhstan. Etulegenova@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-4501-7343>;

Janyssova Dariga – Senior Lecturer, The Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan. dsin65@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-9904-5350>;

Shamilov Tefriz, Candidate of Technical Sciences, Professor, Department of «Physics», Azerbaijan University of Architecture and Construction, Azerbaijan, Baku. invar59@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-9139-1075>

#### REFERENCES

[1] Filippov I.G., Filippov S.I. 1995. Dynamic stability theory of rods. Proceedings of the Russian-Polish seminar. Theoretical Foundations of construction. Warsaw, pp. 63–69.

[2] Medeubaev N.K., Seytmuratov A.Z., Ramazanov M.I. Solving Problems of Vibrational Processes of Isotropically Homogeneous Elastic Plates// Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, 41(9), 1846–1853  
DOI: 10.1134/S1995080220090188

[3] Seitmuratov A., Taimuratova, L.U., Zhussipbek, B., Seitkhanova, A., Kainbaeva, L. Conditions of extreme stress state //News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences, 2019, ISSN 2224-5278 Vol. 5, Number 437 (2019), 202–206. <https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.143>

[4] Seitmuratov A., Yergalauova Z., Makhambayeva I., Bexeitova A. Axisymmetric problems of elastic layer oscillation limited by rigid or deformed boundaries//News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences, 2018, ISSN 2224-5278. Vol. 1, Number 427 (2018), 127–135.

[5] Seitmuratov A.Z., Makhambayeva I.U., Medeubaev N.K. Analysis of tensely of the deformed state of pedigree array near-by making//News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences, 2016, ISSN 2224-5278. Vol. 6, Number 420 (2016), 187–194.

[6] Seitmuratov A., Seylova Z.T., Kanibaikyzy K., Smakhanova A.K., Serikbol S.M. Approximate equation plate oscillation for transverse displacement of points of the median plane//News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences, 2018, ISSN 2224-5278. Vol. 3, Number 429 (2018), 258–265.

[7] Medeubaev N., Menlikozhaeva S., Seitmuratov A., Ramazanov M., Zharmenova B., Shamilov T. Area of applicability of approximate equations of vibrations of rod systems of variable thickness (in English)//News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series 2018, ISSN 1991-346X. Vol. 4, Num. 320(2018), 5–15.

[8] Seitmuratov A., Zhussipbek B., Sydykova G., Seithanova A., Aitimova U. Dynamic stability of wave processes of a round rod // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. 2019 2(324): 90–98 (in Eng). ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print). <https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.16>

[9] Seitmuratov A., Tileubay S., Toxanova S., Ibragimova N., Doszhanov B., Aitimov M. Zh. The problem of the oscillation of the elastic layer bounded by rigid boundaries // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. 2018 5(321): 42–48 (in Eng). ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print). <https://doi.org/10.32014/2018.2518-1726.6>

[10] Seitmuratov A., Zharmenova B., Dautbayeva A., Bekmuratova A. K., Tulegenova E., Ussenova G. Numerical analysis of the solution of some oscillation problems by the decomposition method // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. 2019 1(323): 28–37 (in Eng). ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print). <https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.4>

[11] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Abzhapbarov A., and Shomanbayeva M. The features of a non-stationary state of stress in the elastic multisupport construction // AIP Conference Proceedings. 2016. V. 1759, 020039, <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959653>.

[12] Seitmuratov, A. Z., Nurlanova, B. M., Medeubaev N. Equations of vibration of a two-dimensionally layered plate strictly based on the decision of various boundary-value problems // Bulletin of the Karaganda university-mathematics. 2007 3(87): 109–116 (in Eng).

[13] A. Seitmuratov, N. Medeubaev, Z. Seylova, L. Taimuratova, A. Dautbayeva, S. Tileubay, E. Tulegenova. Oscillation equations of rectangular plates in linear approximation // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. 2020. Vol. 98. No 06. © 2005 – ongoing JATIT & LLS ISSN: 1992-8645 [www.jatit.org](http://www.jatit.org)

[14] Seitmuratov, A., Dautbayeva, A. O., Berkimbayev, K., Turlugulova, N. A., Tulegenova, E. N. Constructed two-parameter structurally stable maps // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Series of Geology and Technical Sciences ISSN 2224-5278 Volume 6, Number 438 (2019), 302–307. <https://doi.org/10.32014/2019.2518-170X.182>

[15] Seitmuratov, A.; Medeubaev, N.; Yeshmurat, G. Approximate solution of the an elastic layer vibration task being exposed of moving load // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. 2018. Vol. 2, Number 318 (2018), 54–60 (in Eng). ISSN 1991-346X

**Publication Ethics and Publication Malpractice**  
**in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

(Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы: *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, А. Ахметова*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 07.12.2020.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
п.л. Тираж 300. Заказ 6.