

ISSN 2518-1726 (Online),  
ISSN 1991-346X (Print)

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ  
әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН  
Қазақстан Республикасының  
Ғылым Академиясының  
им. аль-Фараби

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN  
Al-Farabi  
Kazakh National University

### SERIES PHYSICO-MATHEMATICAL

## 6 (334)

NOVEMBER – DECEMBER 2020

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р ы  
ф.-м.ғ.д., проф., ҚР ҰҒА академигі  
**Ғ.М. Мұтанов**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

**Асанова А.Т.** проф. (Қазақстан)  
**Бошкаев К.А.** PhD докторы (Қазақстан)  
**Байгунчеков Ж.Ж.** проф., академик (Қазақстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Жүсіпов М.А.** проф. (Қазақстан)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., академик (Қазақстан)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Белорусь)  
**Молдабеков М. М.** проф., академик (Қазақстан)  
**Мырзакулов Р.** проф., академик (Қазақстан)  
**Өмірбаев У.У.** проф., академик (Қазақстан)  
**Пашаев А.** проф., академик (Әзірбайжан)  
**Рамазанов Т.С.** проф., академик (Қазақстан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Қазақстан), бас ред. орынбасары  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)  
**Тулешов А.К.** проф., чл.-корр. (Қазақстан)  
**Уалиев З.Г.** проф., чл.-корр. (Қазақстан)

**«ҚР ҰҒА Хабарлары. Физика-математикалық сериясы».**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Меншіктенуші: «Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы» РҚБ (Алматы қ.).

Қазақстан Республикасының Ақпарат және коммуникациялар министрлігінің Ақпарат комитетінде 14.02.2018 ж. берілген № 16906-Ж мерзімдік басылым тіркеуіне қойылу туралы куәлік.

Тақырыптық бағыты: *физика-математика ғылымдары және ақпараттық технологиялар саласындағы басым ғылыми зерттеулерді жариялау.*

Мерзімділігі: жылына 6 рет.

Тиражы: 300 дана.

Редакцияның мекенжайы: 050010, Алматы қ., Шевченко көш., 28; 219, 220 бөл.; тел.: 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© Қазақстан Республикасының Ұлттық ғылым академиясы, 2020

Типографияның мекенжайы: «NurNaz GRACE», Алматы қ., Рысқұлов көш., 103.

Главный редактор  
д.ф.-м.н., проф. академик НАН РК  
**Г.М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

**Асанова А.Т.** проф. (Казахстан)  
**Бошкаев К.А.** доктор PhD (Казахстан)  
**Байгунчеков Ж.Ж.** проф., академик (Казахстан)  
**Вишневский И.Н.** проф., академик (Украина)  
**Quevedo Hernando** проф. (Мексика),  
**Жусупов М.А.** проф. (Казахстан)  
**Ковалев А.М.** проф., академик (Украина)  
**Калимолдаев М.Н.** проф., академик (Казахстан)  
**Михалевич А.А.** проф., академик (Беларусь)  
**Молдабеков М. М.** проф., академик (Казахстан)  
**Мырзакулов Р.** проф., академик (Казахстан)  
**Пашаев А.** проф., академик (Азербайджан)  
**Рамазанов Т.С.** проф., академик (Казахстан)  
**Такибаев Н.Ж.** проф., академик (Казахстан), зам. гл. ред.  
**Тигиняну И.** проф., академик (Молдова)  
**Тулешов А.К.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Уалиев З.Г.** проф., чл.-корр. (Казахстан)  
**Умирбаев У.У.** проф., академик (Казахстан)

**«Известия НАН РК. Серия физика-математическая».**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы).

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации Министерства информации и коммуникаций Республики Казахстан № 16906-Ж, выданное 14.02.2018 г.

Тематическая направленность: *публикация приоритетных научных исследований в области физико-математических наук и информационных технологий.*

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28; ком. 219, 220; тел.: 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2020

Адрес типографии: «NurNaz GRACE», г. Алматы, ул. Рыскулова, 103.

Editor in chief

doctor of physics and mathematics, professor, academician of NAS RK

**G.M. Mutanov**

Editorial board:

**Asanova A.T.** prof. (Kazakhstan)  
**Boshkayev K.A.** PhD (Kazakhstan)  
**Baigunchekov Zh.Zh.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Vishnevskiy I.N.** prof., academician (Ukraine)  
**Quevedo Hernando** prof. (Mexico),  
**Zhusupov M.A.** prof. (Kazakhstan)  
**Kovalev A.M.** prof., academician (Ukraine)  
**Kalimoldaev M.N.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Mikhalevich A.A.** prof., academician (Belarus)  
**Moldabekov M. M.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Myrzakulov R.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Pashayev A.** prof., academician (Azerbaijan)  
**Ramazanov T.S.** prof., akademik (Kazakhstan)  
**Takibayev N.Zh.** prof., academician (Kazakhstan), deputy editor in chief.  
**Tiginyanu I.** prof., academician (Moldova)  
**Tuleshov A.K.** prof., chl.-korr. (Kazakhstan)  
**Ualiev Z.G.** prof., chl.-korr. (Kazakhstan)  
**Umirbayev U.U.** prof., academician (Kazakhstan)

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**

ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty).

The certificate of registration of a periodical printed publication in the Committee of information of the Ministry of Information and Communications of the Republic of Kazakhstan **No. 16906-Ж**, issued on 14.02.2018.

Thematic scope: *publication of priority research in the field of physical and mathematical sciences and information technology.*

Periodicity: 6 times a year.

Circulation: 300 copies.

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19; 272-13-18,  
<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2020

Address of printing house: «NurNaz GRACE», 103, Ryskulov str, Almaty.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

<https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.99>

Volume 6, Number 334 (2020), 68 – 73

UDC 530.1

**N.S. Serikbayev<sup>1,3</sup>, G. N. Nugmanova<sup>2,3</sup>, A.A. Meirmanova<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>L.N. Gumilyov Eurasian National University, Department of General and Theoretical Physics, Nur-Sultan, Kazakhstan;

<sup>2</sup>L.N. Gumilyov Eurasian National University, Department of Mathematical and Computer Modeling, Nur-Sultan, Kazakhstan;

<sup>3</sup>LLP “Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics”, Nur-Sultan, Kazakhstan.

E-mail: ns.serikbayev@gmail.com; nugmanovagn@gmail.com; akbotameirmanovaa@gmail.com

**GAUGE EQUIVALENCE BETWEEN THE TWO-COMPONENT GENERALIZATION OF THE (2+1)-DIMENSIONAL DAVEY-STEWARTSON I EQUATION AND  $\Gamma$  - SPIN SYSTEM**

**Abstract.** In recent years, multidimensional nonlinear evolutionary equations have been actively studied within the framework of the theory of solitons. Their relevance is confirmed by numerous scientific publications. In this work the gauge equivalence between the (2+1)-dimensional integrable two-component Davey-Stewartson I (DSI) equation and the  $\Gamma$  - spin system is established. Multicomponent generalizations of nonlinear integrable equations are of current interest from both physical and mathematical points of view. In the theory of integrable (soliton) equations, one of the key models is integrable nonlinear Schrodinger-type (NLS) equations. A two-component integrable generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation, obtained on the basis of its one-component representation, and its corresponding Lax representation were proposed. A geometric connection between the two-layer spin system and the integrable two-component Manakov system is found. The nonlinear equations are integrated using the inverse scattering problem method by means of a linear system. For each integrable nonlinear equation, as is known, there is a Lax pair of two linear equations, a compatibility condition, that is, a condition of zero curvature, which this equation serves. We have obtained Lax pair whose zero curvature condition gives the  $\Gamma$  - spin system.

**Key words:** Gauge equivalence,  $\Gamma$  - spin systems, integrable nonlinear equations, Manakov system, Davey-Stewartson I (DSI) equation.

**1. Introduction**

Integrable spin systems are an important subclass of integrable nonlinear equations. Multicomponent generalizations of nonlinear integrable equations are of current interest from both physical and mathematical points of view. In the theory of integrable (soliton) equations, one of the key models is integrable nonlinear Schrodinger-type (NLS) equations [1, 2]. The DS equations of types I and II are the (1+1)-dimensional generalizations of NLS equations [3]. In the work [4, 5], a two-component integrable generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation, obtained on the basis of its one-component representation, and its corresponding Lax representation were proposed. A geometric connection between the two-layer spin system and the integrable two-component Manakov system is established in [6-8]. The concept of gauge equivalence of two spectral problem was introduced in [5]. The main result of this work is the establishment of gauge equivalence between the (2+1)-dimensional integrable two-component DS-I equation and the  $\Gamma$  -spin system.

Consider the (2+1)-dimensional DSI equation [4]:

$$iq_{1t} + q_{1xx} + q_{1yy} - \nu_1 q_1 - \omega_1 q_2 = 0, \tag{1}$$

$$iq_{2t} + q_{2xx} + q_{2yy} - \omega_2 q_1 - \nu_2 q_2 = 0, \tag{2}$$

$$-ir_{1t} + r_{1xx} + r_{1yy} - v_1r_1 - \omega_1r_2 = 0, \tag{3}$$

$$-ir_{2t} + r_{2xx} + r_{2yy} - \omega_2r_1 - v_2r_2 = 0, \tag{4}$$

$$v_{1xx} - v_{1yy} = (2r_1q_1 + r_2q_2)_{xx} + 2(r_2q_2)_{xy} + (2r_1q_1 + r_2q_2)_{yy}, \tag{5}$$

$$v_{2xx} - v_{2yy} = (r_1q_1 + 2r_2q_2)_{xx} + 2(r_1q_1)_{xy} + (r_1q_1 + 2r_2q_2)_{yy}, \tag{6}$$

$$\omega_{1xx} - \omega_{1yy} = (q_1r_2)_{xx} - 2(q_1r_2)_{xy} + (q_1r_2)_{yy}, \tag{7}$$

$$\omega_{2xx} - \omega_{2yy} = (q_2r_1)_{xx} - 2(q_2r_1)_{xy} + (q_2r_1)_{yy}, \tag{8}$$

where  $r = \pm q^*$ ,  $q^*$  is the complex conjugate of  $q$ ,  $q_i = q_i(x, y, z)$ ,  $r_i = r_i(x, y, z)$  are complex-valued functions and  $v_i = v_i(x, y, t)$ ,  $\omega_i = \omega_i(x, y, t)$  ( $i = 1, 2$ ) are real functions.

Lax representation for this equation is given in the form

$$F_y = \Sigma F_x + QF, \tag{9}$$

$$F_t = 2i\Sigma F_{xx} + 2iQF_x + A_0F, \tag{10}$$

where

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -r_1 & 0 & 0 \\ -r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} c_{11} & i(q_{1x} + q_{1y}) & i(q_{2x} + q_{2y}) \\ -i(r_{1x} - r_{1y}) & c_{22} & c_{23} \\ -i(r_{2x} - r_{2y}) & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

The one-component cases of these equations have been extensively studied in [2, 3].

## 2. Gauge equivalence between the $\Gamma$ - spin system and two-component generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation

The  $\Gamma$  - spin system reads as

$$i\Gamma_t - 4i\alpha_x\Gamma + 4i\alpha\Gamma_x + 4i\alpha_y + \Gamma \{ \Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} + (\Gamma_x - \Gamma_y)^2 \} = 0, \tag{11}$$

where

$$\Gamma = g^{-1} \Sigma g, \Gamma^2 = I, \tag{12}$$

are

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \in su(3).$$

The Lax pair is given as

$$\Phi_y = \Gamma\Phi_x, \tag{13}$$

$$\Phi_t = 2i\Gamma\Phi_{xx} + iV'\Phi_x, \tag{14}$$

where

$$V' = 4i\alpha + \Gamma_x + \Gamma\Gamma_y. \tag{15}$$

**Theorem.** *The two-component generalization of the (2+1)-dimensional DSI equation (1)-(8) and  $\Gamma$ -spin system (11) is gauge equivalent to each other.*

*Proof.* According to the definition, the systems (9)-(10) and (13)-(14) are gauge equivalent if eigenfunctions  $F$  and  $\Phi$  can be connected as  $\Phi = g^{-1}F$  or  $F = g\Phi$ , where  $g$  is the solution of Eq. (9) at zero spectral parameter  $\lambda$ .

From the transformation  $F = g\Phi$  we take the derivatives with respect to  $y$  and  $t$ , then equate them to the left sides of the Eqs. (13)-(14). As a result, we obtain the following equations

$$\Phi_y = (g^{-1}\Sigma g_x + g^{-1}Qg - g^{-1}g_y)\Phi + g^{-1}\Sigma g\Phi_x. \quad (16)$$

$$\Phi_t = 2ig^{-1}\Sigma g\Phi_{xx} + 2ig^{-1}(2\Sigma g_x + Qg)\Phi_x + g^{-1}(2i\Sigma g_{xx} + 2iQg_x + A_0g\Phi - g_t)\Phi. \quad (17)$$

On the other hand, according to the definition of gauge equivalence,  $g$  satisfies Eqs. (9)-(10):

$$g_y = \Sigma g_x + Qg, \quad (18)$$

$$g_t = 2i\Sigma g_{xx} + 2iQg_x + A_0g. \quad (19)$$

Substituting these equations into (16)-(17), we obtain

$$\Phi_y = \Gamma\Phi_x. \quad (20)$$

$$\Phi_t = (4ig^{-1}\Sigma gg^{-1}g_x + 2ig^{-1}Qg)\Phi_x + 2ig^{-1}\Sigma g\Phi_{xx}. \quad (21)$$

Further, making the substitution  $\Gamma = g^{-1}\Sigma g$  in the last equations, one can rewrite them as

$$\Phi_y = \Gamma\Phi_x, \quad (22)$$

$$\Phi_t = 2i\Gamma\Phi_{xx} + i(4\Gamma g^{-1}g_x + 2g^{-1}Qg)\Phi_x. \quad (23)$$

As can be seen, it is necessary to express  $g^{-1}g_x$  and  $g^{-1}Qg$  in terms of  $\Gamma$ -spin. To begin with, let us define  $\Gamma_x$ :

$$\Gamma_x = (g^{-1}\Sigma g_x)_x = [\Gamma, g^{-1}g_x]. \quad (24)$$

Next we introduce the notation

$$g_x g^{-1} = i\theta_0. \quad (25)$$

Here

$$\theta_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \eta & -\alpha & 0 \\ \rho & 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad (26)$$

where  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  and  $\rho$  are real functions. Then Eq. (24) will take the following form

$$\Gamma_x = g^{-1}[\Sigma, g_x g^{-1}]g = 2ig^{-1}\theta_1 g, \quad (27)$$

and

$$\Gamma\Gamma_x = (g^{-1}\Sigma g)(2ig^{-1}\theta_1 g) = 2ig^{-1}\theta_2 g, \quad (28)$$

where

$$\theta_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \eta & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

In a similar way we find  $\Gamma_y$ :

$$\Gamma_y = \Gamma\Gamma_x + 2g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ r_1 & 0 & 0 \\ r_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} g. \quad (30)$$

From this equation the commutator simply is  $[\Gamma, \Gamma_x] = 2\Gamma\Gamma_x$  and  $\Gamma\Gamma_y + \Gamma_x = 2g^{-1}Qg$ . Taking into account the above expressions and after some calculations, we get the following:

$$g^{-1}g_x = i\alpha\Gamma + \frac{1}{2}\Gamma\Gamma_x, \quad (31)$$

$$g^{-1}Qg = \frac{1}{2}(\Gamma\Gamma_y - \Gamma_x). \quad (32)$$

If the last equations are substituted into Eq. (23), then the output is Eq. (14).

That is, here we have obtained Lax pair whose zero-curvature condition gives the  $\Gamma$  - spin system (11). Thus, we obtained the system of Eqs. (11)-(14), which was required to prove.

## 2. Conclusion.

To conclude, we obtained the Lax representation of the  $\Gamma$  - spin system (13)-(14) that is gauge equivalent to the Lax pair of the two-component generalization DSI (9)-(10).

*The work was supported by the MES RK on the GF, IRN AP08857372.*

Н.С. Серикбаев<sup>1,3</sup>, Г. Н. Нугманова<sup>2,3</sup>, А.А. Мейрманова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан;

<sup>2</sup>Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан;

<sup>3</sup>«Рэтбай Мырзақұлов атындағы Еуразия халықаралық теориялық физика орталығы» ЖШС, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

### ЕКІ КОМПОНЕНТТІ ЖАЛПЫ (2+1)-ӨЛШЕМДІ ДЭВИ-СТЮАРТСОН І ТЕҢДЕУІ МЕН $\Gamma$ - СПИНДІК ЖҮЙЕСІ АРАСЫНДАҒЫ КАЛИБРЛІК ЭКВИВАЛЕНТІЛІГІ

**Аннотация.** Соңғы жылдары солитондар теориясы аясында көпөлшемді сызықты емес эволюциялық теңдеулер белсенді зерттелуде. Олардың өзектілігі көптеген ғылыми жарияланымдармен дәлелденеді. Интегралданатын (солитонды) теңдеулер теориясында Шредингер типіндегі интегралданатын сызықты емес теңдеулер (ШСТ) негізгі модельдердің бірі болып саналады. Бұл теңдеуді алғаш рет Э.Шредингер кванттық жүйелердің іргелі қасиеттерін талдау үшін ұсынған және бастапқыда ол атом ішіндегі бөлшектердің өзара әрекеттесу үдерісін сипаттау үшін қолданылған [1-2].

Сызықтық емес интегралданатын теңдеулердің көпкомпонентті жалпылануы физикалық және сондай-ақ математикалық тұрғыдан қазіргі уақытта қызығушылық тудырады. Жалпыланған ШСТ теңдеуі толқындық үдерістер физикасындағы құбылыстардың тұтас жиынтығын сипаттайды. Ол физиканың түрлі саласындағы толқынды сипаттауда кеңінен тараған, атап айтқанда, сызықтық емес оптика, плазмалық физика және т.б. I және II типті Дэви-Стюартсона (ДС) теңдеуі ШСТ теңдеуінің біркомпонентті (2+1)-өлшемді жалпылануы саналады [3], ал [4-5] жұмыста интегралданатын (2+1)-өлшемді ДСІ теңдеуінің екі компонентті жалпылануы ұсынылған.

Сызықтық емес теңдеулер интегралданады, яғни сызықтық жүйе арқылы шашыранды кері есеп әдісі арқылы шешуге болады, мәні бойынша сызықтық теория әдістерімен сызықтық емес есепті зерттеуге мүмкіндік береді. Біз білетіндей, әрбір интегралданатын сызықтық емес теңдеуге арналған екі сызықтық теңдеуден тұратын Лакс жұбы бар, үйлесімділік шарты, яғни нөлдік қисықтық шарты берілген теңдеу болып саналады. [4]-жұмыста ұсынылған екі компонентті ДСІ теңдеуі оның бір компонентті ұсыну және сәйкес Лакс ұсынысы негізінде алынған. Жалпы Лакс жұбы сәйкес сызықтық емес теңдеу интегралдылығына кепілдік бермейді, бірақ бұл – қажетті шарт.

Сызықтық емес интегралданатын теңдеулерді зерттеудегі тағы бір ұғым – калибрлік эквиваленттілік маңызды рөл атқарады. Екі спектрлік есептің калибрлік эквиваленттілік ұғымы [2]-де енгізілді. Калибрлік эквиваленттік – қарастырылған теңдеулерге тән кейбір маңызды жалпы сипаттамаларды ашуға мүмкіндік беретін, сызықтық емес теңдеулерді зерттеуге арналған тәсіл. Калибрлік эквиваленттілік бірқатар жаңа интегралданатын теңдеулер құруға және Лакс жұбы арқылы дәл шешуге мүмкіндік береді.

[6-8] жұмыста екіқабатты спиндік жүйе мен интегралданатын екі компонентті Манаков жүйесі арасындағы калибрлік эквиваленттілік анықталған.

Мақалада (2+1)-өлшемді интегралданатын екі компонентті ДСІ теңдеуі (1)-(8) мен  $\Gamma$  -спиндік жүйесі (11) қарастырылған, олардың өзара байланысы зерттелген.

Калибрлі эквиваленттілік анықтамасына сәйкес, (9)-(10) және (13)-(14) жүйесінің  $F$  және  $\Phi$  меншікті функцияларын  $\Phi = g^{-1}F$ ,  $g$  немесе  $F = g\Phi$ , мұндағы  $g$  - (9) теңдеудің  $\lambda$  нөлдік спектрлік параметр кезіндегі



пешімі деп байланыстырсақ, калибрлік эквивалентті деп сипатталады.  $F = g\Phi$  түрлендіруінен  $u$  және  $t$ -ға қатысты туынды аламыз, содан кейін оларды (13)-(14) теңдеулердің сол жақ бөлігіне теңестіреміз және т.б. Осылайша осы екі теңдеудің калибрлік эквиваленттілігі сәйкесінше Лакс жұбы арқылы ДСІ теңдеуінің (9)-(10) Лакс жұбы және  $\Gamma$  - спиндік жүйесінің (13)-(14) Лакс жұбы арасында дәлелденген.

Жұмыстың негізгі нәтижесі (2+1) өлшемді интегралданатын екі компонентті ДСІ теңдеуі мен  $\Gamma$  -спиндік жүйесі арасындағы калибрлік эквивалент орнатылғандығы болып саналады.

Н.С. Серикбаев<sup>1,3</sup>, Г. Н. Нугманова<sup>2,3</sup>, А.А. Мейрманова<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, кафедра Общей и Теоретической Физики, Нур-Султан, Казахстан;

<sup>2</sup>Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, кафедра Математического и Компьютерного Моделирования, Нур-Султан, Казахстан

<sup>3</sup>ТОО “Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics”, Нур-Султан, Казахстан

### КАЛИБРОВОЧНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МЕЖДУ ДВУХКОМПОНЕНТНЫМ ОБОБЩЕНИЕМ (2+1)-МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДЭВИ-СТЮАРТСОНА I И $\Gamma$ - СПИНОВОЙ СИСТЕМОЙ

**Аннотация.** В последние годы в рамках теории солитонов активно изучаются многомерные нелинейные эволюционные уравнения. Их актуальность подтверждается многочисленными научными публикациями. В теории интегрируемых (солитонных) уравнений одной из ключевых моделей являются интегрируемые нелинейные уравнения типа Шредингера (НУШ). Впервые это уравнение было предложено Э. Шредингером для анализа фундаментальных свойств квантовых систем, и первоначально с его помощью описывались процессы взаимодействия внутриатомных частиц [1-2].

Многокомпонентные обобщения нелинейных интегрируемых уравнений в настоящее время представляют интерес как с физической, так и с математической точки зрения. Обобщенное уравнение НУШ описывает целую совокупность явлений в физике волновых процессов. Оно широко распространено при описании волн в различных областях физики, в частности в волновых явлениях нелинейной оптики, физике плазмы и т.д. Как известно уравнения Дэви-Стюартсона (ДС) типов I и II являются однокомпонентными (2+1)-мерными обобщениями уравнений НУШ [3], а в работах [4, 5] предложено двухкомпонентное интегрируемое обобщение (2+1)-мерного уравнения ДСІ.

Нелинейные уравнения интегрируются, т.е. их можно решить с помощью метода обратной задачи рассеяния посредством линейной системы, который позволяет исследовать нелинейную задачу, по существу, методами линейной теории. Как мы знаем для каждого интегрируемого нелинейного уравнения существует пара Лакса из двух линейных уравнений, условием совместности, то есть условием нулевой кривизны которых служит данное уравнение. Предложенное в работе [4] двухкомпонентное уравнение ДСІ, получено на основе его однокомпонентного представления и соответствующего ему представления Лакса. Вообще, существование пара Лакса не гарантирует интегрируемость соответствующего нелинейного уравнения, но является необходимым условием.

Еще одно понятие – калибровочная эквивалентность – играет важную роль в исследованиях нелинейных интегрируемых уравнений. Понятие калибровочной эквивалентности двух спектральных задач было введено в [2]. Калибровочная эквивалентность – это подход к исследованию нелинейных уравнений, который позволяет открыть некоторые важные общие характеристики, присущие рассматриваемым уравнениям. Калибровочная эквивалентность позволяет генерировать ряд новых интегрируемых уравнений и решить их точно с помощью формулы Лакса.

В работах [6-8] найдена калибровочная эквивалентность между двухслойной спиновой системой и интегрируемой двухкомпонентной системой Манакова.

В этой статье рассмотрено (2+1)-мерное интегрируемое двухкомпонентное уравнение ДСІ (1)-(8) и  $\Gamma$  - спиновая система (11), исследована их взаимосвязь. Согласно определению калибровочной эквивалентности, системы (9)-(10) и (13)-(14) калибровочно эквивалентны, если собственные функции  $F$  и  $\Phi$  могут быть связаны следующим образом:  $\Phi = g^{-1}F$  или  $F = g\Phi$ , где  $g$  – решение уравнения (9) при нулевом спектральном параметре  $\lambda$ . Из преобразования  $F = g\Phi$  берем производные по  $u$  и  $t$ , а затем приравниваем их к левым частям уравнений (13)-(14) и т.д. Таким образом, доказана калибровочная эквивалентность этих двух уравнений с помощью соответствующих пар Лакса, т.е. парой Лакса уравнения ДСІ (9)-(10) и парой Лакса  $\Gamma$  - спиновой системы (13)-(14).

Основным результатом данной работы является установление калибровочной эквивалентности между (2+1)-мерным интегрируемым двухкомпонентным уравнением ДСІ и  $\Gamma$  - спиновой системой.

**Information about authors:**

Serikbayev Nurzhan Sagindikovich, PhD, Assoc. Professor, L. N. Gumilyov Eurasian National University, department of General and Theoretical Physics, Kazakhstan, Researcher LLP "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics" Kazakhstan ns.serikbayev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1259-637X>;

Nugmanova Gulgassyl Nukarbaevna, Candidate of physical and mathematical sciences, Assoc. Professor. L. N. Gumilyov Eurasian National University, Mathematical and Computer modeling, Kazakhstan, Researcher LLP "Ratbay Myrzakulov Eurasian International Centre for Theoretical Physics". Kazakhstan nugmanovagn@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-4492-2459>;

Meirmanova Akbota Assylbekovna - PhD student, L. N. Gumilyov Eurasian National University, department of General and Theoretical Physics, Kazakhstan. akbotameirmanovaa@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0003-4050-322X>

**REFERENCES**

[1] Ablowitz M., Clarkson P. Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, London Mathematical Society Lecture Note Series Book, 2003. 149, p. 516

[2] Zakharov V., Takhtadjan L. Equivalence of the nonlinear Schrodinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet, Theor. Math. Phys. 1979. 38, pp. 17-23.

[3] Davey A., Stewartson K. On three-dimensional packets of surface waves, Proc. of the Royal Society of London Series A, 1974. 338, pp. 101-110.

[4] Serikbayev N., Nugmanova G., Myrzakulov R. On the two-component generalization of the (2+1)-dimensional Davey-Stewartson I equation, Journal of Physics: Conference Series 1391 (2019) 012160, [doi:10.1088/1742-6596/1391/1/012160]

[5] Serikbayev N., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Traveling wave solutions for the (3+1)-dimensional Davey-Stewartson equations, Journal of Physics: Conference Series 1391 (2019) 012166, [doi:10.1088/1742-6596/1391/1/012166]

[6] Myrzakul A., Myrzakulov R. Darboux transformations exact soliton solutions of integrable coupled spin systems related with the Manakov system, [arXiv:1607.08151]

[7] Myrzakul A., Myrzakulov R. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrodinger equation, [arXiv:1608.08553]

[8] Nugmanova G., Myrzakul A. Integrability of the two-layer spin system, Proc. of Twentieth Int. Conf. "Geometry, Integrability and Quantization", June 2-7, 2018. Varna, Bulgaria. 2019. pp. 208-214 [doi: 10.7546/giq-20-2019-208-214]

**Publication Ethics and Publication Malpractice**  
**in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

(Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайтах:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

**ISSN 2518-1726 (Online), ISSN 1991-346X (Print)**

Редакторы: *М. С. Ахметова, Д. С. Аленов, А. Ахметова*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 07.12.2020.

Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.

6,3 п.л. Тираж 300. Заказ 6.

## Уважаемые авторы научных журналов НАН РК!

Президиумом НАН РК принято решение, в целях повышения международного рейтинга академических изданий, объединить следующие 3 журнала, начиная с № 5 (сентябрь-октябрь), 2020 г., с высокорейтинговыми журналами НАН РК, входящими в международные базы Scopus, WoS и др.:

1. «**Известия НАН РК. Серия биологических и медицинских наук**» объединить с журналом «**Доклады НАН РК**»;
2. «**Известия НАН РК. Серия аграрных наук**» – «**Доклады НАН РК**»;
3. «**Известия НАН РК. Серия общественных и гуманитарных наук**» – с журналом «**Вестник НАН РК**».

Статьи, которые публиковались в журналах «**Известия НАН РК. Серия биологических и медицинских наук**» и «**Известия НАН РК. Серия аграрных наук**», впредь будут публиковаться в журнале «**Доклады НАН РК**», а статьи, публикуемые в журнале «**Известия НАН РК. Серия общественных и гуманитарных наук**», – в журнале «**Вестник НАН РК**».

При подаче статей просим указывать название журнала и отрасль науки, согласно представленного перечня (см. ниже) в данном журнале:

I. Научный журнал «**Вестник НАН РК**» посвящен исследованиям фундаментальной науки (гуманитарные и естественные):

Редакционная коллегия принимает статьи по следующим отраслям науки:

1. Гуманитарные (экономика, юриспруденция, история и археология, политология и социология, философия, филология, педагогика и психология, литературоведение, искусствоведение)
2. Естественные (астрономия, физика, химия, биология, география и технические науки). Примеры технических наук: космонавтика, кораблестроение, машиностроение, системотехника, электротехника, электросвязь, радиоэлектроника, ядерная энергетика и т.д.

Адрес сайта «**Вестник НАН РК**» – <http://www.bulletin-science.kz/index.php/en/arhive>

II. Научный журнал «**Доклады НАН РК**» посвящен исследованиям в области получения наноматериалов, биотехнологии и экологии.

Редакционная коллегия принимает статьи по следующим отраслям науки:

1. Получение наноматериалов в области естественных наук, медицины и сельского хозяйства.
2. Биотехнология в земледелии, растениеводстве и зоотехнике.
3. Общая биология и биотехнология в медицине.
4. Экология.

Адрес сайта «**Доклады НАН РК**» – <http://reports-science.kz/index.php/en/archive>

Кроме того, в журналах «**Известия НАН РК. Серия физико-математическая**», «**Известия НАН РК. Серия химии и технологий**» и «**Известия НАН РК. Серия геологии и технических наук**» также указаны отрасли науки, по которым будут приниматься научные статьи для экспертизы и дальнейшего опубликования:

III. Научный журнал «**Известия НАН РК. Серия физико-математическая**» посвящен исследованиям в области математики, физики и информационной технологии.

Редакционная коллегия принимает статьи по следующим отраслям науки:

1. Математика.
2. Информатика.
3. Интеллектуальный анализ данных и распознавание образов.
4. Математическое моделирование социальных и экономических процессов.

5. Механика.
6. Механика машин и роботов.
7. Теория управления и космические исследования.
8. Физика.
9. Ядерная физика.
10. Теоретическая физика.
11. Астрономия.
12. Ионосфера.

Адрес сайта «**Известия НАН РК. Серия физико-математическая**» –

<http://physics-mathematics.kz/index.php/en/archive>

IV. Научный журнал «**Известия НАН РК. Серия химии и технологий**» посвящен исследованиям в области химии и технологий новых материалов.

Редакционная коллегия принимает статьи по следующим отраслям науки:

1. Органическая химия.
2. Неорганическая химия.
3. Высокомолекулярные соединения.
4. Физическая химия (катализ, электрохимия).
5. Технология новых материалов.
6. Технология органических веществ.
7. Технология неорганических веществ.
8. Технология химических удобрений.
9. Технология полимерных и строительных материалов и силикаты.
10. Технология пищевых продуктов.
11. Фармацевтическая химия.

Адрес сайта «**Известия НАН РК. Серия химии и технологий**» –

<http://chemistry-technology.kz/index.php/en/archiv>

V. Научный журнал «**Известия НАН РК. Серия геологии и технических наук**» посвящен исследованиям в области геологии и технических наук:

Редакционная коллегия принимает статьи по следующим отраслям науки:

1. Геология.
2. Региональная геология.
3. Петрология.
4. Геология нефти и газа.
5. Геология и генезис рудных месторождений.
6. Гидрогеология.
7. Горное дело и геомеханика.
8. Фундаментальные проблемы обогащения минерального сырья.
9. Инженерная геология.
10. Геофизика и сейсмология.
11. География.

Адрес сайта «**Известия НАН РК. Серия геологии и технических наук**» –

<http://www.geolog-technical.kz/index.php/en/archive>