

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

ХАБАРЛАРЫ

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

1 (281)

ҚАҢТАР–АҚПАН 2012 ж.
ЯНВАРЬ–ФЕВРАЛЬ 2012 г.

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА

ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

АЛМАТЫ
НАН РК
ҒЫЛЫМ

Бас редактор
ҚР ҰҒА академигі
Б. Т. Жұмағұлов

Редакция алқасы:

физика-математика ғылымдарының докторы **Н. М. Темірбеков** (бас редактордың орынбасары), ҚР ҰҒА-ның академиктері **М. М. Әбділдин, Ф. Б. Байымбетов, Т. Ш. Калменов, Н. Қ. Блиев, В. И. Дробжев, Қ. Ә. Қасымов, Б. Н. Мұқашев, М. Ө. Өтелбаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Қ. Қ. Қадыржанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Н. Т. Данаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Т. С. Рамазанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Ө. Ө. Өмірбаев**, химия ғылымдарының докторы **Н. Е. Коробова** (жауапты хатшы)

Главный редактор
академик НАН РК
Б. Т. Жумагулов

Редакционная коллегия:

доктор физико-математических наук **Н. М. Темірбеков** (заместитель главного редактора), академики НАН РК **М. М. Абдильдин, Ф. Б. Баимбетов, Т. Ш. Кальменов, Н. К. Блиев, В. И. Дробжев, К. А. Касымов, Б. Н. Мукашев, М. О. Отелбаев**, доктор физико-математических наук **К. К. Кадыржанов**, доктор физико-математических наук **Н. Т. Данаев**, доктор физико-математических наук **Т. С. Рамазанов**, доктор физико-математических наук **У. У. Умирбаев**, доктор химических наук **Н. Е. Коробова** (ответственный секретарь)

Editor-in-chief
academician of the NAS of the RK
B. T. Zhumagulov

Editorial staff:

doctor of physical and mathematical sciences **N.M. Temirbekov** (deputy editor-in-chief), academicians of the NAS of the RK **M. M. Abdildin, Ph. B. Baimbetov, T. Sh. Kalmenov, N. K. Bliiev, V. I. Drobzhev, K. A. Kasymov, B. N. Mukashev, M. O. Otelbaev**, doctor of physical and mathematical sciences **K. K. Kadirzhanov**, doctor of physical and mathematical sciences **N. T. Danaev**, doctor of physical and mathematical sciences **T. S. Ramazanov**, doctor of physical and mathematical sciences **U. U. Umirbaev**, doctor of chemical sciences **N. E. Korobova** (secretary)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая» I ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 218–220, тел.: 261-06-33, 272-13-19, 272-13-18.

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

УДК 519.6+517.9

Г. ДАИРБАЕВА, Л. Н. ТЕМИРБЕКОВА

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА НА ОСНОВЕ МЕТОДА СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ

КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы

Рассматривается интегральное уравнение Гельфанда-Левитана для решения коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения. Предложен алгоритм численного решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана для задачи с сосредоточенным источником для гиперболического уравнения. Построен пример задачи с сосредоточенным источником. Численно решены прямая и обратная задача, результаты расчетов приведены в виде графиков.

В данной работе предлагается пример и алгоритм численного решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана для задачи с сосредоточенным источником для гиперболического уравнения

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + qu = 0.$$

Рассматривается дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана определения коэффициентов $q(x)$ рассматриваемого уравнения по вычисленным при $x = 0$ следам решений семейства задач Коши.

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, \quad t = 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x). \quad (2)$$

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x,t)$ по известным функциям $q(x)$ и начальным условиям (2).

В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x)$ по дополнительным информации

$$u(0,t) = f(t), \quad u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Обратным задачам вида (1)–(3) посвящены монографии В. Г. Романова [1], С. И. Кабанихина [2]. В работах И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [3], М. Г. Крейна [4] доказаны теоремы об однозначной разрешимости задачи (1)–(3). Дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения исследована в работе С. И. Кабанихина и Г. Б. Баканова [5]. В данной работе показано, что дискретный аналог обратной задачи эквивалентен конечному набору систем линейных алгебраических уравнений.

В работе [2] получено интегральное уравнение для обратной задачи (1)–(3)

$$\frac{1}{2} [f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{w}(x,\tau) d\tau = 0, \quad (4)$$
$$x > |t|.$$

Для численного решения интегрального уравнения (4) получается система линейных уравнений с плохо обусловленной матрицей. При каждом фиксированном $x > 0$ соотношение (4) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода относительно функции $\tilde{w}(x,t)$, $t \in (-x,x)$.

Решение этого уравнения относится к классу некорректных задач. В работе [2], дифференцируя уравнение (4) по t , получено уравнение типа Фредгольма второго рода

$$\tilde{w}(x, t) + \int_{-x}^x f'(t - \tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} [f'(t - x) + f'(t + x)] \quad (5)$$

$$x > 0, \quad t \in (-x, x)$$

Поскольку решение $\tilde{w}(x, t)$ уравнения (5) четно по переменной t , это уравнение можно переписать в виде [2]

$$\tilde{w}(x, t) + \int_0^x [f'(t - \tau) + f'(t + \tau)] \tilde{w}(x, \tau) d\tau = -\frac{1}{2} [f'(t - x) + f'(t + x)], \quad x > 0, t \in [0, x] \quad (6)$$

Уравнение (6) эквивалентно уравнению (4) при дополнительном условии, что решение $\tilde{w}(x, t)$ уравнения (6) является четной функцией по аргументу t .

Искомая функция $q(x)$ связана с решением интегрального уравнения (6) соотношением

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x - 0), \quad x > 0 \quad (7)$$

Для того чтобы построить решение обратной задачи в точке $x > 0$, достаточно решить уравнение (6) и найти $q(x)$ по формуле (7). Из теории уравнений Фредгольма известно, что для малых значений x уравнение (6) однозначно разрешимо.

Воспользуемся какой-либо формулой численного интегрирования

$$J(\psi) = \int_a^b \psi(x) dx \approx S_m(\psi) = \sum_{j=1}^m c_j \psi(x_j^{(m)}) \quad (8)$$

Для приближенного решения интегрального уравнения (6) заменим интеграл в этом уравнении на квадратурную сумму и при фиксированном $x > 0$ и при каждом t^k получим систему линейных уравнений:

$$w(x, t^k) + \sum_{i=0}^n c_i (f'(t^k - \tau_i) + f'(t^k + \tau_i)) w(x, \tau_i) - R_m(w) = -\frac{1}{2} [f'(t^k - x) + f'(t^k + x)] \quad (9)$$

$$0 \leq t^k \leq x, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Остаточный член $R_m(w)$ при вычислении интеграла с помощью квадратуры (8) является функцией переменной t . Полагая в (9) $t = t^k, k = 0, 1, 2, \dots, n$; отбрасывая остаточный член, получим систему уравнений

$$Aw = y, \quad (10)$$

где матрица A в случае метода прямоугольников имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 + h(f'(t^0 - \tau_0) + f'(t^0 + \tau_0)) & h(f'(t^0 - \tau_1) + f'(t^0 + \tau_1)) & \dots & h(f'(t^0 - \tau_n) + f'(t^0 + \tau_n)) \\ h(f'(t^1 - \tau_0) + f'(t^1 + \tau_0)) & 1 + h(f'(t^1 - \tau_1) + f'(t^1 + \tau_1)) & \dots & h(f'(t^1 - \tau_n) + f'(t^1 + \tau_n)) \\ h(f'(t^2 - \tau_0) + f'(t^2 + \tau_0)) & h(f'(t^2 - \tau_1) + f'(t^2 + \tau_1)) & \dots & h(f'(t^2 - \tau_n) + f'(t^2 + \tau_n)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(f'(t^n - \tau_0) + f'(t^n + \tau_0)) & h(f'(t^n - \tau_1) + f'(t^n + \tau_1)) & \dots & 1 + h(f'(t^n - \tau_n) + f'(t^n + \tau_n)) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$w = \begin{pmatrix} w(x, \tau_0) \\ w(x, \tau_1) \\ w(x, \tau_2) \\ \dots \\ w(x, \tau_n) \end{pmatrix}, \quad y = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} f'(t^0 - x) + f'(t^0 + x) \\ f'(t^1 - x) + f'(t^1 + x) \\ f'(t^2 - x) + f'(t^2 + x) \\ \dots \\ f'(t^n - x) + f'(t^n + x) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Для решения задачи (10) применяем итерационный метод оптимизации [2] и прямой метод SVD [2, 7].

Сингулярное разложение. Систему линейных уравнений можно решать эффективным методом сингулярного разложения, основанном на полном ортогональном разложении, имеющий вид [6]

$$A = UVK.$$

Здесь U и V – ортогональные матрицы размеров $(n \times n)$, K – диагональная матрица с сингулярными числами на главной диагонали. Изложим алгоритм счета методом сингулярного разложения. Система линейных алгебраических уравнений (10) имеет вид.

$$UKVw = y. \quad (13)$$

Умножая (13) слева на транспонированную к U матрице U^T , имеем

$$KVw = U^T y,$$

так как $UU^T = I$, I – единичная матрица.

Обозначим через l вектор Vw , тогда получим

$$Kl = U^T y. \quad (14)$$

Из уравнения (14) находим численно вектор l . Далее из уравнения

$$Vw = l. \quad (15)$$

Умножая слева на V^T , находим w

$$w = V^T l.$$

Метод оптимизации. Итерационные методы строим из вариационного принципа, т.е. найти решение уравнения (10), доставляющий минимум функционалу

$$J(w) = \|Aw - y\|^2 \rightarrow \min.$$

Рассмотрим явный итерационный метод

$$w^{k+1} = w^k - \alpha(Aw^k - y). \quad (16)$$

Обозначим через $r_k = Aw^k - y$ невязку, которая получается при подстановке приближенного значения w^k , полученного на k -й итерации в уравнения (10). Итерационный параметр α выбирается из условия минимума $\|r_{k+1}\|$ при заданной норме $\|r_k\|$.

Перепишем (16) в виде

$$w^{k+1} = w^k - \alpha r_k$$

Отсюда получим

$$Aw^{k+1} = Aw^k - \alpha Ar_k$$

И, следовательно,

$$r_{k+1} = r_k - \alpha Ar_k \quad (17)$$

Возведя обе части уравнения (17) скалярно в квадрат, получим

$$\|r_{k+1}\|^2 = \|r_k\|^2 - 2\alpha(r_k, Ar_k) + \alpha^2 \|Ar_k\|^2 \quad (18)$$

Отсюда видно, что $\|r_{k+1}\|$ достигает минимума, если

$$\alpha = \frac{(Ar_k, r_k)}{\|Ar_k\|^2}. \quad (19)$$

Пример задачи с сосредоточенным источником и ее решение. Задача (1), (2) с начальным условием в виде дельта – функции поставлена для нахождения обобщенного решения. Однако, при нахождении численного решения необходимо δ -функцию приближать последовательностью функции (например, функция «колокольчик»). В данном параграфе сделаем первый шаг для численного решения задачи (1), (2).

Рассмотрим пример прямой задачи, в которой вместо дельта-функции Дирака, взята функция $\frac{1}{2|x|}$. Она удовлетворяет некоторым свойствам дельта-функции Дирака. Пусть $q(x) = \frac{2|x|}{x^3} \text{sign}(x)$.

Нами рассматривается следующая прямая задача

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, t > 0 \quad (20)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{2|x|} \quad (21)$$

Легко проверить, что решением этой задачи будет функция

$$u(x, t) = \frac{t}{2|x|} \quad (22)$$

В нашем случае обратная задача выглядит следующим образом:

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, t > 0 \quad (23)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{2|x|} \quad (24)$$

Дополнительная информация о решении прямой задачи будет иметь следующий вид

$$u(0, t) = \frac{t}{\varepsilon}, \quad t \geq 0 \quad (25)$$

Согласно результатам исследований работ С. И. Кабанихина [2] прямую задачу (1)–(2) можно записать в виде задачи Гурса:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - q(x)u \\ u|_{t=|x|} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (26)$$

$$|x| < t < 2 - |x|, \quad t < |x|.$$

Пример (20)–(21) удовлетворяет задаче Гурса.

Гиперболическое уравнение (26) численно решаем с помощью разностной схемы:

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} - 0,5(q_{i+1} + q_{i-1}) \frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2}, \quad (27)$$

При $\tau = h$ получаем схему квадрат:

$$u_i^{k+1} = u_{i+1}^k + u_{i-1}^k - u_i^{k-1} - h^2 \frac{q_{i+1} + q_{i-1}}{2} \left(\frac{u_{i+1}^k + u_{i-1}^k}{2} \right). \quad (28)$$

Область определения квадрат $D = \{-1 < x < 1, 0 < t < 2\}$. Строим сетку так, как показано на рис. 1. Разобьем отрезок $[-1, 1]$ оси x и $[0, 2]$ оси t на n частей, $u(i, k)$ – множество функций двух аргументов, $x_l = lh$, $t_n = n\Delta t$ – узлы сетки, h – шаг сетки по x , Δt – шаг сетки по t , $n1 = n + 1$ – количество узлов сетки, $m = \left[\frac{n1}{2} + 1 \right]$ – номер узла сетки при $x = 0$. $q(x) = \frac{1}{2|x|}$ – заданная функция,

$r(k) = u(m, k)$, $k = 1, 2, \dots, n1$ – искомая функция. Схема, по которой решаем задачу Гурса, показана на рис. 2.

Алгоритм решения разностной прямой задачи:

- 1) вычисляются значения на характеристиках по формуле $u_i^i = 0,5$
- $u(i, k1) = 0,5$ – значение функции на характеристике слева,
- $u(i1, k) = 0,5$ – значение функции на характеристике справа.
- 2) положим $mm = mm - 1$.
- 3) строим цикл l от 2 до n с шагом 2.
- 4) вычисляем $mm = mm + 1$.
- 5) положим $ll = 0$.
- 6) строим цикл по k от 1 до mm .
- 7) вычисляем $ll = ll + 1$.
- 8) определяем номер узла по направлению x по формуле $il = m - ll + 1$.

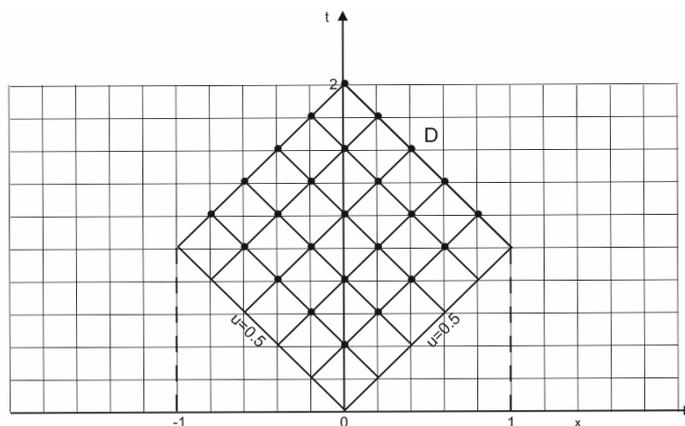


Рис. 1. Схема решения прямой задачи. Область $D = \{-1 < x < 1, 0 < t < 2\}$

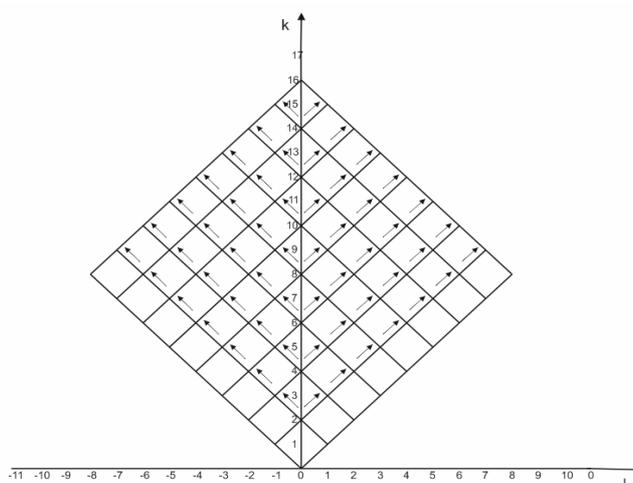


Рис. 2. Схема решения прямой задачи

9) по формуле

$$u(il, k + 1) = u(il + 1, k) + u(il - 1, k) - u(il, k - 1) - \\ - \frac{1}{4} h^2 (q(il + 1) + q(il - 1))(u(il - 1, k) + u(il + 1, k))$$

вычисляем значения искомой функции в узлах сетки, расположенных слева узла $i = m$. Аналогично вычисляются значения функции и в узлах сетки, расположенных справа узла $i = m$.

10) вычисляем $ip = m + l - 1$.

11) находим

$$u(ip, k + 1) = u(ip + 1, k) + u(ip - 1, k) - u(ip, k - 1) - \\ - \frac{1}{4} h^2 (q(ip + 1) + q(ip - 1))(u(ip - 1, k) + u(ip + 1, k)).$$

12) вычисляем $r(k) = u(m, k)$. Так как по схеме мы находим значения через одну точку с шагом 2, то для нахождения в каждой точке сетки необходимо интерполировать по четырем значениям:

$$u(m, k) = 0.25(u(m - 1, k) + u(m + 1, k) + u(m, k - 1) + u(m, k + 1)).$$

Составлена программа на ЭВМ. Функция $q(x)$ имеет график, показанный на рис. 3. Решение задачи (20), (21) приведено на рис. 4.

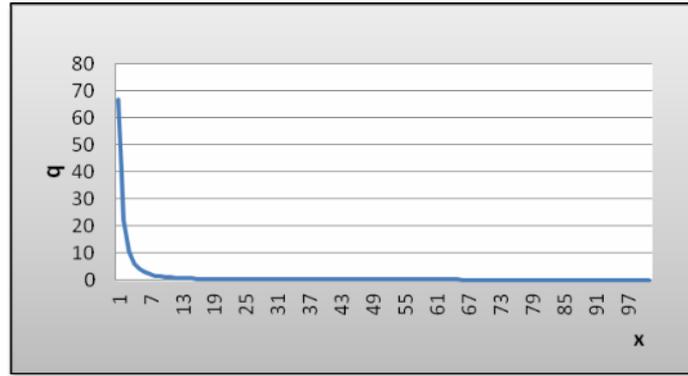


Рис. 3. График функции $q(x)$

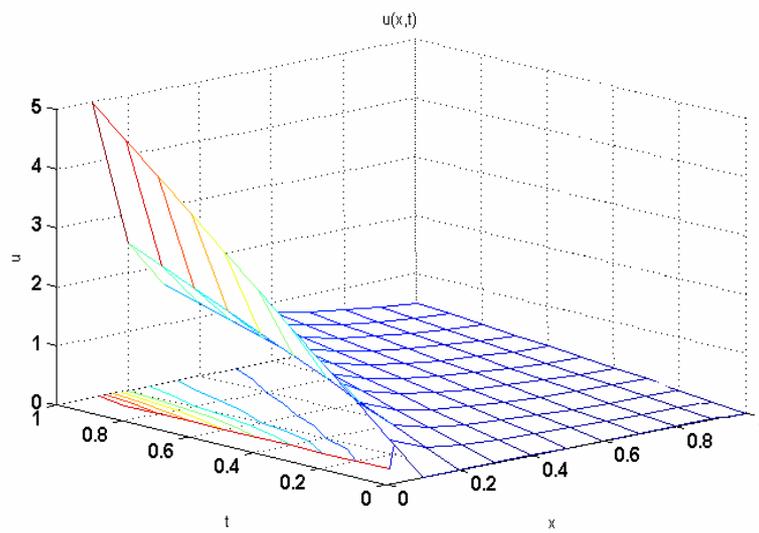


Рис. 4. Решение задачи (20)–(21)

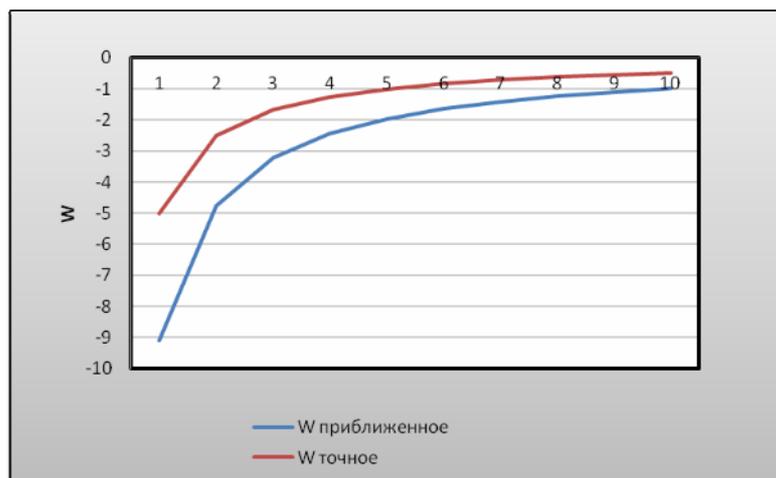


Рис. 5

Обратная задача (23)–(24) с дополнительной информацией (25) решена на ЭВМ. На рис. 5 показано сравнение приближенного и численного решения функции $\tilde{w}(x,x)$ при $\varepsilon = 0,01$. Из графика видно, что функция $\tilde{w}(x,x)$ определяется с точностью до постоянной согласно формуле (7).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984. – 263 с.
- 2 Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
- 3 Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН. Сер. матем. 1951. – Т. 15. – С. 309-360.
- 4 Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 94, № 6. – С. 767-770.
- 5 Кабанихин С.И., Баканов Г.Б. Дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения // Сибирский математический журнал. – 1999. – Т. 40, №2. – С. 307-324.
- 6 Годунов С.К. Решение системы линейных уравнений. – М.: Наука, 1980.
- 7 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.

Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki. *M.: Nauka*, **1984**, 263 (in Russ.).

Kabanikhin S.I. Obratnye i nekorrektnye zadachi. *Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo, Novosibirsk*, **2009**, 457 (in Russ.).

Gelfand I.M., Levitan B.M. Ob opredelenii differencial'nogo uravneniya po ego spektral'noj funkicii. *Izv. AN, ser. matem.*, **1951**, t.15, 309-360 (in Russ.).

Krejn M.G. Ob odnom metode jeffektivnogo resheniya obratnoj kraevoy zadachi. *Dokl. AN SSSR*. **1954**. T.94, № 6. 767-770 (in Russ.).

Kabanikhin S.I., Bakanov G.B. Diskretnyj analog metoda Gelfanda-Levitana v dvumernoj obratnoj zadache dlja giperbolicheskogo uravneniya. *Sibirskij matematicheskij zhurnal*, **1999**, t.40, №2, S. 307-324 (in Russ.).

Godunov S.K. Reshenie sistem lineynyh uravneniy. *M.: Nauka*, **1980** (in Russ.).

Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Chislennye metody. *M.: BINOM. Laboratorija znaniy*, **2008**, 636 (in Russ.).

Л. Н. Темірбекова

СИНГУЛЯРЛЫҚ ЖІКТЕУ МЕН ОҢТАЙЛАНДЫРУ ӘДІСІ НЕГІЗІНДЕ
ГЕЛЬФАНД–ЛЕВИТАН ТЕНДЕУІН САНДЫҚ ШЕШУ

Жұмыста коэффициентті кері гиперболалық тендеулерді шешуге арналған интегралдық Гельфанд–Левитан тендеуі қарастырылған. Белгілі бір есеп үшін интегралдық Гельфанд–Левитан тендеуінің сандық шешу алгоритмі беріліп, мысал келтірілген. Тура және кері есептің сандық шешімі шешіліп, оның нәтижелері график түрінде келтірілген.

L. N. Temirbekova

THE NUMERICAL DECISION OF EQUATION GEL'FANDA–LEVITANA
ON THE BASIS OF METHOD SINGULAR OF DECOMPOSITION AND OPTIMIZATION

We consider the Gelfand–Levitan integral equations of solving the inverse problem for hyperbolic equations. We propose a numerical algorithm of solving of the Gelfand–Levitan integral equations for a problem with a point source for hyperbolic equation. We construct an example of the problem with a point source. Numerically solved by the direct and inverse problem, the results of calculations are presented in graphs.

Л. А. ХАДЖИЕВА, В. В. МАЛИННИКОВ, А. Б. УМБЕТКУЛОВА

ОБ АНАЛИЗЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ БУРОВЫХ ШТАНГ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Исследуются нелинейные колебания буровой штанги неглубинного бурения. Допускается конечность упругих деформаций штанги. Рассмотрены модели сжато-скрученной штанги и ее плоского изгиба. Проведен анализ форм колебаний штанги, влияния ее параметров и режимов ее движения на колебательный процесс.

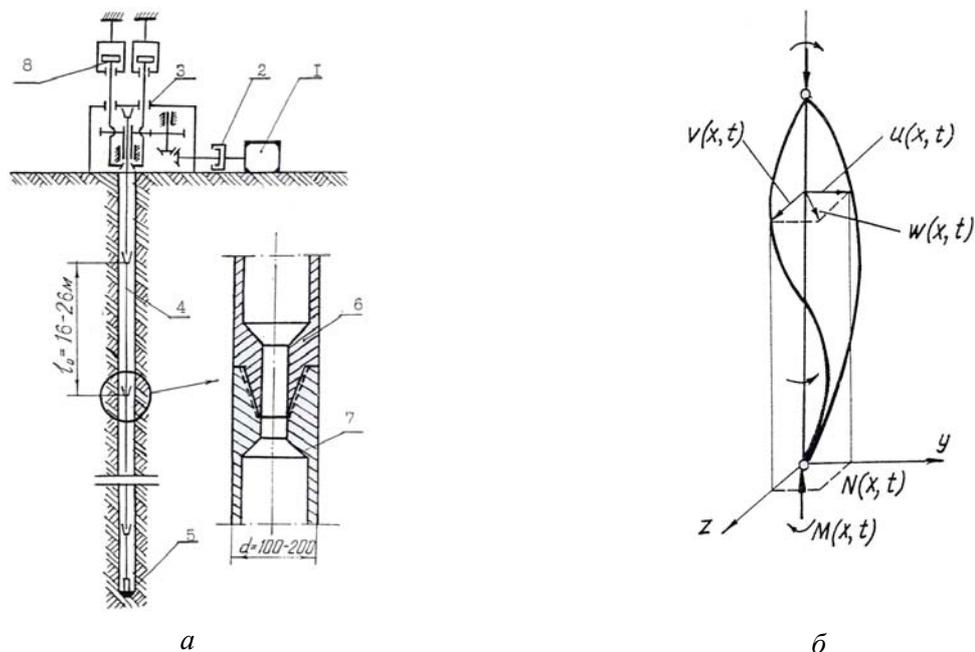
Совершенствование моделей движения буровых штанг представляет научный и практический интерес для нефте-газовой отрасли, так как из практики бурения известно, что около трети пробуренных скважин бракуются ввиду поломок буровых штанг, либо нарушения режимов бурения скважин и их искривления.

В данной работе исследуются нелинейные модели движения буровых штанг неглубинного бурения (рис. 1а).

Большинство известных динамических моделей буровых штанг линейны и основаны на допущении малости их упругих деформаций, тогда как увеличение длины штанги ведет к ее гибкости, и соответственно, возможности появления конечных перемещений под действием больших переменных инерционных сил и моментов, осевых нагрузок и др. факторов, с которыми нельзя не считаться.

Поэтому здесь рассмотрена нелинейность моделей геометрической природы, вызванная допущением конечности деформаций буровых штанг.

Обычно в качестве расчетной схемы штанги достаточно большой длины принимается слегка искривленный гибкий упругий стержень, закрепленный по концам. При значительной длине стержня влиянием условий закрепления на формы поперечных колебаний и формы потери устойчивости можно пренебречь. Здесь для определенности стержень считается шарнирно опертым по концам. Схема его пространственного деформирования представлена на рис. 1б.



1 – электродвигатель; 2 – муфта сцепления; 3 – коробка передач; 4 – буровая штанга; 5 – буровой снаряд; 6,7 – щеки соединительной муфты; 8 – механизм подачи бурового става в забой

Рис. 1. Кинематическая схема буровой установки неглубинного бурения (а) и форма изогнутой оси ее штанги (б)

Действующие на штангу в процессе бурения внешние нагрузки переменны во времени. Продольная сила N складывается из собственного веса и усилия подачи, которое является периодической функцией времени. При вращении штанги на буровую коронку (долото) действуют силы сопротивления со стороны горной породы. Эти силы, а также силы трения о стенки скважины в случае касания преодолеваются за счет крутящего момента M , передаваемого от двигателя. Крутящий момент имеет постоянную и переменную во времени составляющие. Периодический характер момента M обусловлен изменением во времени сил сопротивления породы, которые, в свою очередь, зависят от величины продольного усилия N . Поэтому сила N и крутящий момент M представлены в виде сумм постоянных (номинальных) и переменных во времени слагаемых

$$\begin{aligned} N(x, t) &= N_0(x) + N_t(x)\Phi_N(t), \\ M(x, t) &= M_0(x) + M_t(x)\Phi_M(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Для конфигурации упругого деформирования оси буровой штанги (рис.1б) и действия на нее переменной продольной сжимающей силы $N(x,t)$ и скручивающего момента $M(x,t)$ рассмотрено уравнение изогнутой оси буровой штанги в рамках линейных теорий упругости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ_V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[M(x,t) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x,t) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + K_1 V &= -\rho F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ_U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[M(x,t) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x,t) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + K_1 U &= -\rho F \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $K_1 = \rho F \omega^2$ и принимаются следующие обозначения: ω – скоростью вращения буровой штанги; ρ – удельная масса материала; F – площадь поперечного сечения; EJ_V, EJ_U – жесткость штанги относительно осей y, z ; V – перемещение точек упругой линии штанги в плоскости XOZ ; U – перемещение точек упругой линии штанги в плоскости XOY .

Уравнение (2) будет носить нелинейный характер и значительно усложнится, если будут учтены конечности величин деформаций.

В работе в качестве первого приближения рассмотрены случаи плоского изгиба под действием переменной продольной осевой нагрузки $N(x,t)$ и случай сжато-скрученной штанги для малых и конечных деформаций. Согласно рассматриваемых случаев, уравнения колебаний (2) могут быть приведены методом разделения переменных Бубнова-Галеркина [1]:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= \sum_{k=1}^n f_k(t) V_k(x), \\ U(x, t) &= \sum_{k=1}^n f_k(t) U_k(x), \\ V_k(x) &= \sin \frac{kx\pi}{l}, \quad U_k(x) = \sin \frac{kx\pi}{l} \end{aligned} \quad (3)$$

к уравнениям параметрического вида:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_k + C_k^2 f_k [1 - 2v_k \Phi(t)] &= 0, \\ C_k &= \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m} \left(1 - \frac{N_t}{N_0} \right)}, \quad N_k = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{l^2}, \quad v_k = \frac{N_t}{2(N_k - N_0)}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\ddot{f}_k + C_k^2 f_k [1 - 2v_k \Phi(t)] + \alpha f_k^3 = 0. \quad (5)$$

Нелинейность уравнения (5) обусловлена учетом конечных деформаций в рамках нелинейной теории конечных деформаций В. В. Новожилова [2].

Соответственно, уравнения колебаний сжато-скрученной штанги будут представлены как:

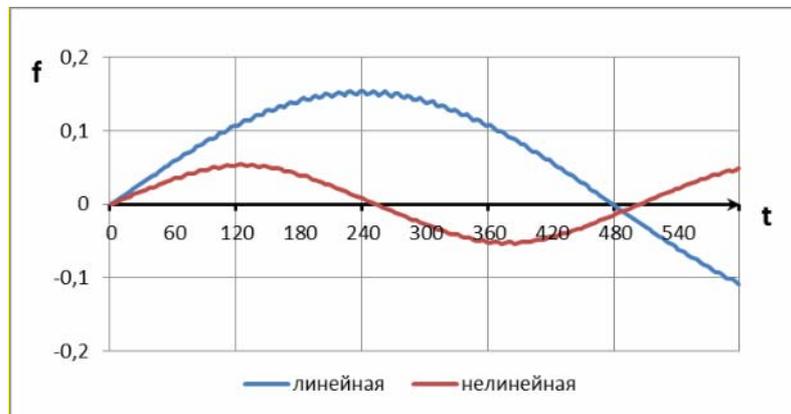
$$m\ddot{f}_k + f_k \left[EJ \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 - M \left(\frac{k\pi}{l} \right)^3 - N \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 + K_1 \right] = 0, \quad (6)$$

$$m\ddot{f}_k + f_k \left[EJ \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 - M \left(\frac{k\pi}{l} \right)^3 - N \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 + K_1 \right] + \alpha f_k^3 = 0, \quad (7)$$

Проведен численный анализ уравнений (4)-(6) при начальных условиях

$$f_k(t=0) = 0, \quad \frac{\partial f_k}{\partial t}(t=0) = 0,001. \quad (8)$$

Из сравнительного анализа результатов исследования линейной (4) и нелинейной моделей (5) плоского изгиба штанги под действием сжимающей нагрузки (рис. 2) видно, что амплитуда колебаний во втором случае меньше, чем в линейной постановке. То есть уточнение динамической модели буровой штанги за счет учета ее конечных деформаций свидетельствует о необходимости совершенствования динамических моделей и учета этого факта при расчете допустимых рабочих режимов последних и расчете их ресурсов использования.



$k = 1$

Рис. 2. Амплитуда колебаний буровой штанги линейной и нелинейной моделей при $E_d = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $\rho_d = 2698,9$ кг/м³; $l = 500$ м; $D_1 = 0,12$ м; $D_2 = 0,2$ м

Исследовано влияние форм изгиба штанги на амплитуду ее колебаний. Установлено, что при основной форме изгиба амплитуда перемещений буровой штанги превышает амплитуды больших форм (рис. 3, линейный случай).

В практике бурения используется дюралюминий. Исследования показали, что дюралюминиевая буровая штанги подвержена меньшим отклонениям от прямолинейной формы, чем стальная при тех же режимах бурения (рис. 3а).

Исследовано влияние параметров буровой штанги на ее колебательный процесс. Установлено существенное влияние длины буровой штанги (рис. 4а) и скорости ее вращения (рис. 4б) на амплитуды колебаний. Увеличение длины буровой штанги и скорости ее вращения ведет к существенному росту амплитуд колебаний.

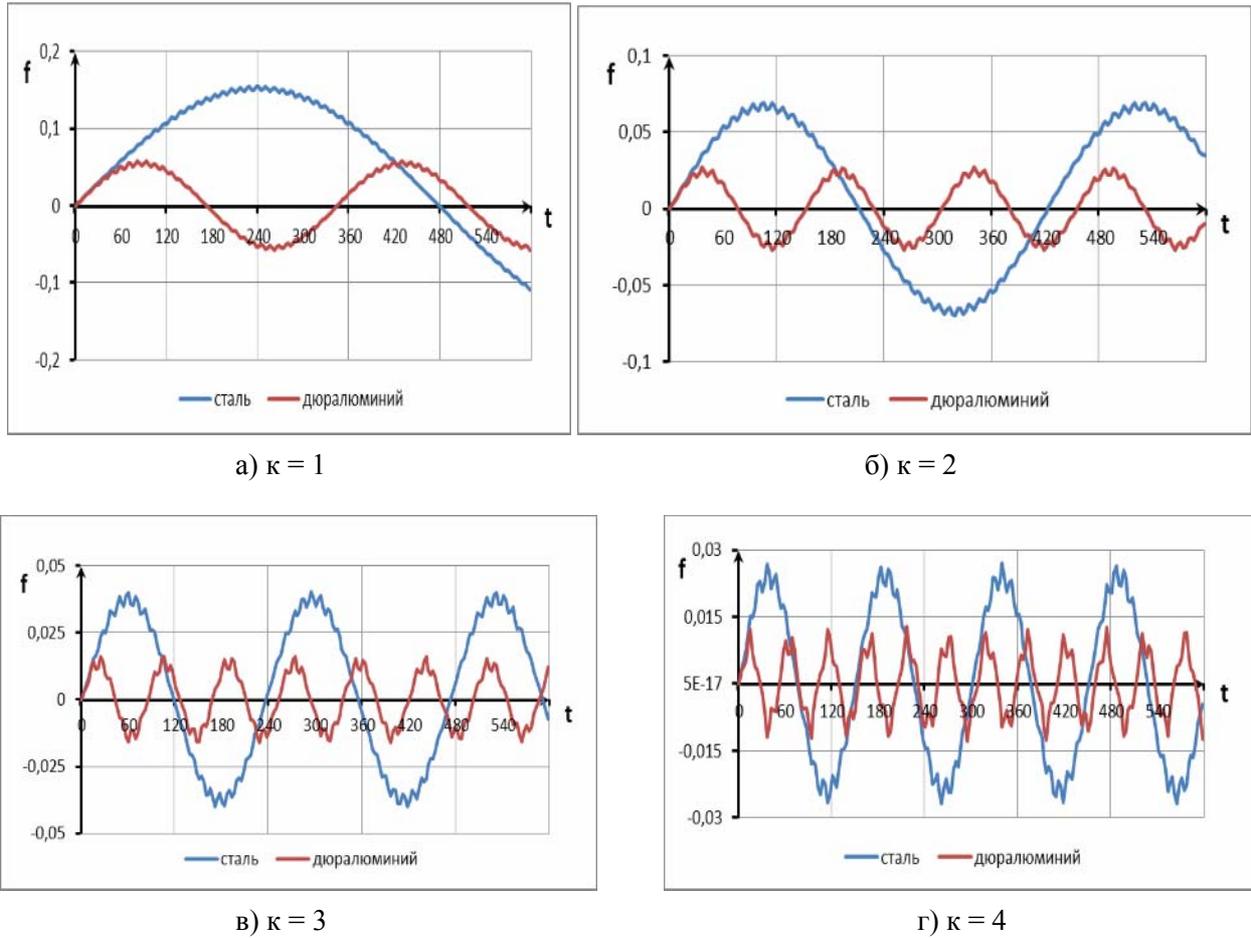


Рис. 3. Влияние свойств материала штанги на ее отклонение
 При $E_c = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\rho_c = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $E_d = 0,7 \cdot 10^5$ МПа; $\rho_d = 2698,9$ кг/м³; $l = 500$ м; $D_1 = 0,12$ м; $D_2 = 0,2$ м

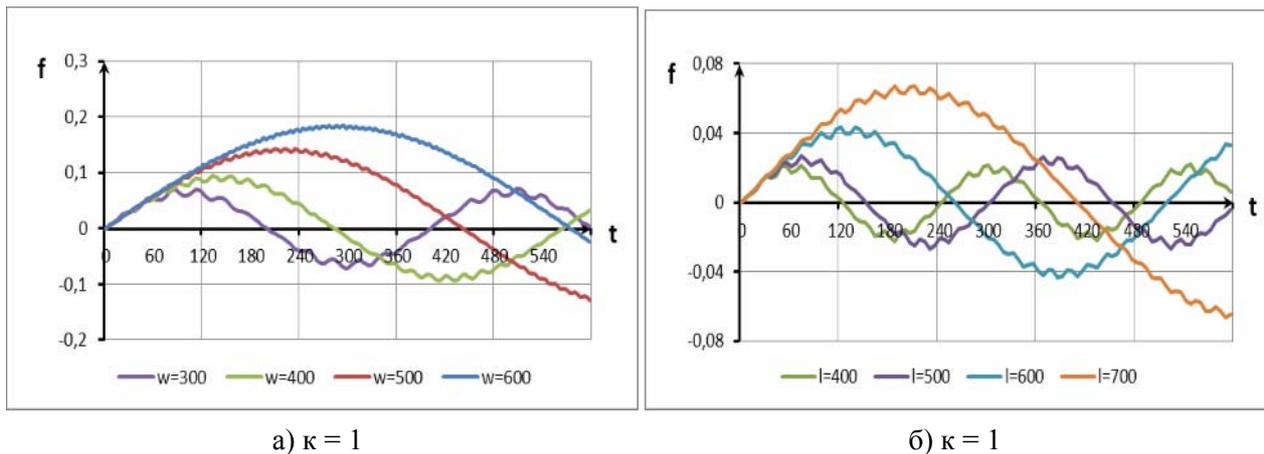


Рис. 4. Влияние частоты и длины на отклонение штанги
 при $E_c = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\rho_c = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $D_1 = 0,12$ м; $D_2 = 0,2$ м

В работе выявлено: для сжато-скрученной штанги форма изгиба практически не влияет на величины амплитуд ее колебаний и учет нелинейных факторов (конечность деформаций), не оказывает существенного влияния на результаты исследований.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Вибрации в технике. Справочник в 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 352 с.
- 2 Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.

Л. А. Хаджиева, В. В. Малинников, А. Б. Үмбетқұлова

БҰРҒЫЛАУ ШТАНГІНІҢ АҚЫРҒЫ ДЕФОРМАЦИЯЛЫ СЫЗЫҚСЫЗ
ТЕРБЕЛІСТЕР ТАЛДАУЫ ТУРАЛЫ

Бұрғылау штангінің сызықсыз тербелістері зерттелген. Оның серпімді деформациясының ақырлығы ескерілген. Штангінің жазықтық иілу мен сығылып бұралған модельдері қарастырылып, тербелістер формаларының талдауы жасалған. Штангінің параметрлері мен оның қозғалыс режимдерінің тербеліс процесіне әсер етуінің және тербелістер формаларының талдауы жүргізілген.

L. A. Khadzhieva, V. V. Malinnikov, A. B. Umbetkulova

ABOUT THE ANALYSIS OF NONLINEAR FLUCTUATIONS
OF CHISEL BARS WITH FINAL DEFORMATIONS

Nonlinear fluctuations of a chisel bar of not deep drilling are investigated. Finiteness of elastic deformations of a bar is supposed. Models of the is compressed-braided bar and its flat bend are considered. The analysis of forms of fluctuations of a bar, influence of parametres of a bar and modes of its movement on oscillatory process is carried out.

М. ДИНЕЙХАН, Г. Г. САЙДУЛЛАЕВА, Н. ХАБЫЛ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВОЙСТВ ЭКЗОТИЧЕСКИХ МЕЗОНОВ С УЧЕТОМ РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Проведены исследования, рассматривающие $X(3872)$ мезон как четырехкварковое состояние. В качестве динамической точки отсчета взята модель, которая описывает свойства релятивистического связанного состояния. Вычисляется ширина распада $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$, который происходит через промежуточное состояние $X \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$. Подходящие значения размерного параметра Λ_X X -мезона мы взяли из экспериментальных данных.

Введение. Новая необычная частица, получившая название $X(3872)$, была открыта в 2003 г. коллаборацией Belle [1]. Ее существование независимо подтверждено в эксперименте BaBar [2], а также в эксперименте CDF [3] в Фермилабе при столкновении протонов и антипротонов с энергией в системе центра масс около 2 ТэВ на коллайдере Tevatron [4]. Исследуя различные каналы распадов B -мезонов $B^\pm \rightarrow K^\pm X(3872)$, коллаборация Belle [1] обнаружила небольшой пик в районе 3,872 ГэВ в распределении по массе системы, состоящей из J/ψ и двух π -мезонов: $X(3872) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$. Новый пик находится чуть правее, чем хорошо известный сигнал от $\psi'(3686)$ -мезона, который также распадается на J/ψ и два пиона [1]. Это указало на канал образования новой частицы, получившей название $X(3872)$. Очевидно, B -мезон может распадаться на $X(3872)$ и K -мезон, после чего почти сразу же $X(3872)$ распадается на J/ψ и два π -мезона $X(3872) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$.

Были обнаружены несколько значений массы X -мезона на основе одного $\pi^+ \pi^- J/\psi$ распада. Наиболее точным измерением является $m_X = (3871.61 \pm 0.16 \pm 0.19) \text{MeV}$, а средним значением массы X -мезона взяли [3]:

$$m_X = (3871.51 \pm 0.22) \text{MeV}. \quad (1)$$

Из наблюдения распада $X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi$ коллаборации Belle [5] и BABAR [6] и из углового анализа выполненного экспериментом CDF было показано, что квантовые числа $X(3872)$ мезона J^{PC} может иметь значения 1^{++} или 2^{-+} . Однако, наблюдая распад $X(3872) \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0$ Belle и BABAR [7, 8], обнаружили, что значение 2^{-+} не согласуется со свойствами X -мезона.

Коллаборация Belle [5] обнаружила распад $X(3872) \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 J/\psi$ и показала, что относительная ширина для данного распада почти такая же, как и для моды распада $X(3872) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$:

$$\frac{B(X \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 J/\psi)}{B(X \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi)} = 1.0 \pm 0.4(\text{stat}) \pm 0.3(\text{syst}). \quad (2)$$

Из этих результатов видно, что X -мезон также может распадаться на три пиона: $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$. Эти результаты показывают сильное нарушение изоспина, так как три-пионный распад происходит через промежуточный ω -мезон с изоспином 0, а двух-пионный распад происходит через промежуточный ρ -мезон с изоспином 1. А также очень трудно объяснить двух-пионный распад, который идет за счет промежуточных ρ -мезонов с интерпретацией $X(3872)$ мезона как обычного чармония $c\bar{c}$ с изоспином 0. Имеется несколько интерпретаций $X(3872)$ мезона, однако в настоящее время наиболее интригующая задача заключается в том, что $X(3872)$ мезон является

мезонной молекулой с энергией связи $M_X - (M_{D^{*0}} + M_{D^0}) = -0.30 \pm 0.40$ MeV или четырехкварковое состояние из двух цветных кварков и из двух цветных антикварков. Интерпретация $X(3872)$ мезона как четырехкварковое состояние хорошо описывает имеющиеся экспериментальные данные, полученные из распадов $X(3872) \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 J/\psi$ и $X(3872) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$.

В данной работе мы будем рассматривать $X(3872)$ мезон как четырехкварковое состояние в рамках релятивистской модели связанных состояний.

Модель, которая описывает свойства релятивистического связанного состояния. Описанию основных свойств экзотических мезонов посвящено немало теоретических работ. В результате этих работ показано, что мезон $X(3872)$ является четырехкварковым состоянием с квантовыми числами $J^{PC} = 1^{++}$ и симметричным распределением спина $[cq]_{S=0} [\bar{c}\bar{q}]_{S=1} + [cq]_{S=1} [\bar{c}\bar{q}]_{S=0}$, $q = u, d$.

В настоящий момент отсутствует общепринятый рецепт описания многокварковых состояний. Одним из основных моментов является определение константы адрон-кваркового взаимодействия.

Сформулируем это описание с описанием свойств дейтрона в работе Салама [9]. Этот подход успешно применяется для описания свойств адронов в нелокальной кварковой модели [10]. В нелокальной модели кварков считается, что обычные физические частицы – адроны подчиняются систематике группы $SU(3)$, имеют экспоненциально наблюдаемые массы и описываются стандартными квантовыми полями, удовлетворяющим обычным уравнениям Дирака, Клейна-Гардона и др.

Предполагается, что адроны (барионы и мезоны) являются связанными состояниями кварков. Это предположение эквивалентно требованию равенства нулю константы перенормировки волновой функции адронов [9], т.е.

$$Z_H = 0. \quad (3)$$

Во втором порядке теории возмущений условие связности записывается в следующем виде:

$$Z_H = 1 - \Pi'(m^2) = 0. \quad (4)$$

Здесь $\Pi(p^2)$ – производная массового оператора адрона на массовой поверхности.

Четырехкварковый адронный ток записывается в виде:

$$\begin{aligned} J_{X_q}^\mu(x) = & \int dx_1 \dots \int dx_4 \delta\left(x - \sum_{i=1}^4 w_i x_i\right) \Phi_X \left(\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \right) \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{dec} \{ [q_a(x_4) C \gamma^5 c_b(x_1)] [\bar{q}_d(x_3) \gamma^\mu C \bar{c}_e(x_2)] + \\ & + [q_a(x_4) C \gamma^\mu c_b(x_1)] [\bar{q}_d(x_3) \gamma^5 C \bar{c}_e(x_2)] \}, \end{aligned} \quad (5)$$

где использованы обозначения $w_1 = w_2 = w_c = \frac{m_c}{2(m_q + m_c)}$, $w_3 = w_4 = w_q = \frac{m_q}{2(m_q + m_c)}$.

Здесь зарядово-сопряженная матрица $C = \gamma^0 \gamma^2$: $C = C^+ = C^{-1} = -C^T$, $C \Gamma^T C^{-1} = \pm \Gamma$, («+» для $\Gamma = S, P, A$ и «-» для $\Gamma = V, T$).

Такой подход приводит к феноменологическим мезонным лагранжианам, в которых мезонные вершины определяются кварковыми петлями.

Эффективный Лагранжиан, который описывает взаимодействие X_q мезона ее с составляющими кварками, записывается в виде:

$$L_{\text{вз}} = g_X X_{q\mu}(x) J_{X_q}^\mu(x) \quad q = u, d \quad (6)$$

Условие (2) позволяет определить константы связи g адрон-кваркового взаимодействия.

$$\begin{aligned} \Pi_X^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} \Pi_X(p^2) + p^\mu p^\nu \Pi_X^{(1)}(p^2), \\ \Pi_X(p^2) &= \frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \Pi_X^{\mu\nu}(p). \end{aligned} \quad (7)$$

Вершинная функция $\Phi_X \left(\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \right)$ вычисляется с помощью соответствующих координат Якоби.

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{2w_2 + w_3 + w_4}{2\sqrt{2}} \rho_1 - \frac{w_3 - w_4}{2\sqrt{2}} \rho_2 + \frac{w_3 + w_4}{2} \rho_3, \\ x_2 &= x - \frac{2w_1 + w_3 + w_4}{2\sqrt{2}} \rho_1 - \frac{w_3 - w_4}{2\sqrt{2}} \rho_2 + \frac{w_3 + w_4}{2} \rho_3, \\ x_3 &= x - \frac{w_1 - w_2}{2\sqrt{2}} \rho_1 + \frac{w_1 + w_2 + 2w_4}{2\sqrt{2}} \rho_2 - \frac{w_1 + w_2}{2} \rho_3, \\ x_4 &= x - \frac{w_1 - w_2}{2\sqrt{2}} \rho_1 - \frac{w_1 + w_2 + 2w_3}{2\sqrt{2}} \rho_2 - \frac{w_1 + w_2}{2} \rho_3, \end{aligned}$$

где $x = \sum_{i=1}^4 x_i w_i$, $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^2 = \sum_{i=1}^3 \rho_i^2$.

Следовательно,

$$\Phi_X \left(\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \right) = \prod_{i=1}^4 \int \frac{dp_i}{(2\pi)^4} e^{-i \sum_{i=1}^4 p_i x_i} \times \tilde{\Phi}_X(p_1, \dots, p_4),$$

здесь мы воспользовались обозначениями

$$\tilde{\Phi}_X(p_1, \dots, p_4) = (2\pi)^4 \delta \left(\sum_{i=1}^4 p_i \right) \bar{\Phi}_X(-\Omega^2), \quad (8)$$

$$\bar{\Phi}_X(-\Omega^2) = \frac{1}{4} \prod_{i=1}^3 \int d\rho_i e^{i \sum_{i=1}^3 \omega_i \rho_i} \Phi_X(R^2),$$

где $\Omega^2 = \sum_{i=1}^3 \omega_i^2$, $R^2 = \sum_{i=1}^3 \rho_i^2$.

Координаты Якоби

$$\omega_1 = \frac{p_1 - p_2}{2\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{p_1 + p_2 + 2p_3}{2\sqrt{2}}. \quad (9)$$

Для удобства в вычислении вершинную функцию выбираем в Гауссовском виде

$$\bar{\Phi}_X(-\Omega^2) = \exp \left(\frac{\Omega^2}{\Lambda_X^2} \right). \quad (10)$$

Параметр Λ_X характеризует размеры X мезона. Диаграмма массового оператора X_u -мезона показана на рис. 1.

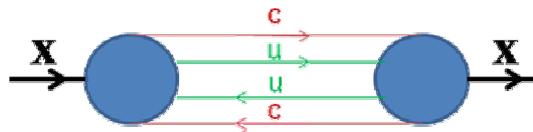


Рис. 1. Диаграмма, которая описывает массовый оператор X_u -мезона

Имеется

$$\begin{aligned} \Pi'_X(p^2) &= \frac{1}{2p^2} p^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \Pi_X(p^2) = \frac{2g_X^2}{3p^2} (g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}) \prod_{i=1}^3 \int \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}_X^2(-K^2) \times \\ &\{ -w_c \text{tr}[S_c^{[12]} \not{p} S_c^{[12]} \gamma^5 S_q^{[2]} \gamma^5] \text{tr}[S_c^{[3]} \gamma^\mu S_q^{[13]} \gamma^\nu] + w_q \text{tr}[S_c^{[12]} \gamma^5 S_q^{[2]} \not{p} S_c^{[2]} \gamma^5] \text{tr}[S_c^{[3]} \gamma^\nu S_q^{[13]} \gamma^\nu] - \\ &- w_c \text{tr}[S_c^{[12]} \not{p} S_q^{[2]} \gamma^5] \text{tr}[S_c^{[3]} \not{p} S_c^{[3]} \gamma^\mu S_q^{[13]} \gamma^\nu] + w_q \text{tr}[S_c^{[12]} \gamma^5 S_q^{[2]} \gamma^5] \text{tr}[S_c^{[3]} \gamma^\nu S_q^{[13]} \not{p} S_q^{[13]} \gamma^\nu] \}, \end{aligned} \quad (11)$$

где мы использовали сокращения

$$\begin{aligned} S_c^{[12]} &= S_c(k_1 + k_2 - w_c p), \quad S_c^{[3]} = S_c(k_3 - w_c p), \quad S_q^{[2]} = S_q(k_2 + w_q p), \\ S_q^{[13]} &= S_q(k_1 + k_3 + w_q p), \quad K^2 = \frac{1}{8}(k_1 + 2k_2)^2 + \frac{1}{8}(k_1 + 2k_3)^2 + \frac{1}{4}k_1^2. \end{aligned}$$

Теперь будем рассматривать l -петлевой интеграл

$$\Pi(p_1, \dots, p_m) = \int [d^4 k]^l \prod_{i=1}^m \Phi_{i+n}(-K_{i+n}^2) \prod_{i_3=1}^n S_{i_3}(\tilde{k}_{i_3} + \nu_{i_3}),$$

где $K_{i+n}^2 = \sum_{i_2} (\tilde{k}_{i_2}^{i_2} + \nu_{i_2}^{i_2})^2$.

Запишем пропагатор кварка в представлении Швингера

$$S(k) = (m + \not{k}) \int_0^\infty d\beta e^{-\beta(m^2 - k^2)}. \quad (12)$$

Имеется

$$\Phi_{i+n}(-K^2) = \exp[\beta_{i+n} K^2] \quad i = 1, \dots, m, \quad (13)$$

где параметр $\beta_{i+n} = s_i = \frac{1}{\Lambda_i^2}$ связан с размерами X -мезона.

Получая интегралы по петлям

$$\Pi = \int_0^\infty d^n \beta F(\beta_1, \dots, \beta_n), \quad (14)$$

где под F подразумевается целая структура данной диаграммы. Ряд параметров Швингера β_i можно привести в симплексы, вводя дополнительный параметр t

$$1 = \int_0^\infty dt \delta\left(t - \sum_{i=1}^n \beta_i\right), \quad (15)$$

который приводит к

$$\Pi = \int_0^\infty dt t^{n-1} \int_0^1 d^n \alpha \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) F(t\alpha_1, \dots, t\alpha_n). \quad (16)$$

Всего есть n численных интегралов: $(n-1)$ по параметрам α и интеграл по параметру t .

Мы вырезаем верхний предел интеграла в точке $\frac{1}{\lambda_i}$ и получаем

$$\Pi^c = \int_0^{\frac{1}{\lambda_i}} dt t^{n-1} \int_0^1 d^n \alpha \left(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i\right) F(t\alpha_1, \dots, t\alpha_n). \quad (17)$$

Это показывает, что кварки никогда не вылетают из адронов, т.е. явление конфайнмента.

В данной работе рассматривается однопетлевая двухточечная функция. Имеем

$$\Pi_2(p^2) = \int \frac{d^4 k_E}{\pi^2} \frac{e^{-sk_E^2}}{[m^2 + (k_E + \frac{1}{2} p_E)^2][m^2 + (k_E - \frac{1}{2} p_E)^2]},$$

где мы собрали все нелокальные Гауссовские вершинные функции в фактор $e^{-sk_E^2}$. Отметим, что, k_E, p_E – моменты в Эвклидовом пространстве. Получая интегралы по петлям,

$$\begin{aligned} \Pi_2(p^2) &= \int_0^\infty dt \frac{t}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha \exp\left(-tz_{loc} + \frac{st}{s+t} z_1\right), \\ z_{loc} &= m^2 - \alpha(1-\alpha)p^2, \quad z_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 p^2. \end{aligned} \quad (18)$$

В данной работе вычисляются матричные элементы перехода $X \rightarrow J/\Psi + \rho(\omega)$. Соответствующий матричный элемент этого распада записывается в виде:

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu\rho} &= \left(X_u(p, \mu) \rightarrow J/\Psi(q_1, \nu) + v^0(q_2, \rho) \right) = \\ &= 6g_X g_{J/\Psi} g_{v^0} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4 i} \bar{\Phi}_X(-K_1^2) \times \Phi_{J/\Psi}\left(-\left(k_1 + \frac{1}{2}q_1\right)^2\right) \Phi_{v^0}\left(-\left(k_2 + \frac{1}{2}q_2\right)^2\right) \times \\ &\quad \times \text{tr}\left[i\gamma^5 S_c(k_1)\gamma^\nu S_c(k_1+q_1)\gamma^\mu S_u(k_2)\gamma^\rho S_u(k_2+q_2)\right] = \\ &= \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\nu} q_1^\rho M_{XJv}^{(1)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\nu} q_2^\rho M_{XJv}^{(2)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\rho} q_2^\nu M_{XJv}^{(3)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \nu\rho} q_1^\mu M_{XJv}^{(4)} + \varepsilon^{q_1 \mu\nu\rho} M_{XJv}^{(5)} + \\ &\quad + \varepsilon^{q_2 \mu\nu\rho} M_{XJv}^{(6)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\rho} q_1^\nu M_{XJv}^{(7)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \nu\rho} q_2^\mu M_{XJv}^{(8)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где введено обозначение $K_1^2 = \frac{1}{2}\left(k_1 + \frac{1}{2}q_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(k_2 + \frac{1}{2}q_2\right)^2 + \frac{1}{4}(w_u q_1 - w_c q_2)^2$ и $v^0 = \rho, \omega$.

С помощью матричных элементов (19) ширину распада $X \rightarrow J/\Psi + 2\pi(3\pi)$, который проходит через промежуточное состояние, можно представить в следующем виде

$$\frac{d\Gamma\left(X \rightarrow J/\Psi + n\pi\right)}{dq^2} = \frac{1}{8m_X^2 \pi} \frac{1}{3} |M_{XJv}|^2 \frac{\Gamma_{v^0} m_{v^0}}{\pi} \frac{p^*(q^2)}{(m_{v^0}^2 - q^2)^2 + \Gamma_{v^0}^2 m_{v^0}^2} B(v^0 \rightarrow n\pi), \quad (20)$$

где

$$\frac{1}{3} |M_{XJv}|^2 = \frac{1}{3} \sum_{pol} |\varepsilon_X^\mu \varepsilon_{J/\Psi}^\nu \varepsilon_{v^0}^\rho M_{\mu\nu\rho}|^2.$$

Здесь $p^*(q^2) = \lambda^{1/2}(m_X^2, m_{J/\Psi}^2)/2m_X$ есть момент частицы J/Ψ , а масса m_X определяется из ограничения

$$m_X - (m_{J/\Psi} - m_\rho) = -0.90 \pm 0.41 \text{ MeV}.$$

Регулируемыми параметрами являются массы кварков m_q и размерные параметры λ, Λ_X . Мы изменили параметр Λ_X в большом интервале и находили, что отношение:

$$\frac{\Gamma(X_u \rightarrow J/\Psi + 3\pi)}{\Gamma(X_u \rightarrow J/\Psi + 2\pi)} \approx 0.25 \quad (21)$$

является довольно стабильной по переменным Λ_X . Следовательно, используя этот результат и существенное экспериментальное значение, который показан в (2), находим

$$\frac{\Gamma(X_{l,u} \rightarrow J/\Psi + 3\pi)}{\Gamma(X_{l,u} \rightarrow J/\Psi + 2\pi)} \approx 0.25 \times \left(\frac{1 \pm \tan \theta}{1 \mp \tan \theta}\right)^2 \approx 1, \quad (22)$$

который дает $\theta \approx \pm 18.4^\circ$ для X_l («+») и X_h («-») соответственно. Эти значения хорошо совпадают с результатами в [11,12]: $\theta \approx \pm 20^\circ$ и $\theta \approx \pm 23.5^\circ$. Ширина распада является очень чувствительной по изменению параметра Λ_X .

ЛИТЕРАТУРА

- 1 S.K. Choi *et al.* [Belle Collaboration], Phys. Rev. Lett. 91, 262001 (2003).
- 2 B. Aubert *et al.* [BaBar Collaboration], Phys. Rev. Lett. 93, 041801 (2004).
- 3 D. E. Acosta *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. 93, 072001 (2004).
- 4 F. Abe *et al.* Observation of the B_c meson in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8 \text{ TeV}$ Phys. Rev. Lett., 81:2432-2437, 1998.
- 5 K. Abe *et al.*, [Belle Collaboration], “Evidence for $X(3872) \rightarrow \gamma J/\Psi$ and the sub-threshold decay $X(3872) \rightarrow \omega J/\Psi$ ”, arXiv:hep-ex/0505037, hep-ex/0505038.
- 6 B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. D 74, 071101 (2006).
- 7 G. Gokhroo *et al.* [Belle Collaboration], Phys. Rev. Lett. 97, 162002 (2006).
- 8 B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. D 77, 011102 (2008).
- 9 Hayashi K. *et al.* Fort der Phys.m 1967, 15, p. 625,
- 10 Salam A. Nuovo Cimento, 1962, 25, p. 224.
- 11 Динейхан М., Ефимов Г.В., Иванов М.А. Распады скалярных мезонов в нелокальной модели кварков // ЯФ, 35, 134 (1982).
- 12 L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa and V. Riquer, Phys. Rev. D 71, 014028 (2005) [arXiv:hep-ph/0412098]; I. Bigi, L. Maiani, F. Piccinini, A. D. Polosa and V. Riquer, Phys. Rev. D 72, 114016 (2005) [arXiv:hep-ph/0510307].
- 13 M. Nielsen, F. S. Navarra and S. H. Lee, arXiv:0911.1958 [hep-ph]; F. S. Navarra and M. Nielsen, Phys. Lett. B 639, 272 (2006) [arXiv:hep-ph/0605038].

М. Дінейхан, Г. Г. Сайдұллаева, Н. Хабыл

ЭКЗОТИКАЛЫҚ МЕЗОНДАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІН ӘСЕРЛЕСУДІҢ
РЕЛЯТИВИСТІК СИПАТЫН ЕСКЕРЕ ОТЫРЫП АНЫҚТАУ

Біз $X(3872)$ мезонын төрт кварктен тұратын бөлшек ретінде қарастыра отырып зерттеулер жүргіздік. Ол үшін релятивистік байланысқан күйлердің қасиеттерін сипаттайтын модельді қолдандық. $X \rightarrow J/\Psi + \rho(\omega)$ аралық күйі арқылы жүзеге асатын $X \rightarrow J/\Psi + 2\pi(3\pi)$ ыдырауының ені есептеп табылды. $X(3872)$ мезонының Λ_X өлшем параметрінің қажет мәндері тәжірибелік мәліметтерден алынды.

M. Dineikhan, G. G. Saidullaeva, N. Khabyl

THE PROPERTIES OF EXOTIC MESONS
WITH RELATIVISTIC CHARACTER OF INTERACTION

We explore the consequences of treating the $X(3872)$ meson as tetraquark bound state. As dynamical framework we employ a relativistic constituent quark model which includes infrared confinement in an effective way. We calculate the decay width of the observed channels $X \rightarrow J/\Psi + 2\pi(3\pi)$ via the intermediate off-shell state $X \rightarrow J/\Psi + \rho(\omega)$. For reasonable values of the size parameter Λ_X of the $X(3872)$ we find consistency with the available experimental data.

M. DINEYKHAN², D. SANGAA¹, A. V. BELUSHKIN¹, D. T. AZNABAYEV², B. MUKHAMETULY²

NEUTRON SCATTERING FOR CONDENSED MATTER SCIENCE

¹Frank Laboratory of Neutron Physics, JINR, 141980 Dubna, Russia

²Faculty of Physics, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Present review gives neutron scattering methods and several recent examples of traditional and novel application of neutron methods at the IBR-2 to address the problems of practical importance. Some results in nano and functional materials development, engineering applications, improvement of fuel cells are briefly outlined.

Keywords: *new materials, neutron scattering, neutron diffraction* Проверено на каз. и рус. яз.

PACS: 81.70.-q; 81.05.Zx; 89.20.Bb; 07.88.+y; 61.05.fm; 61.05.fg

Introduction. If one compares the brightness of different radiation sources, it appears that even the best modern neutron sources produce just a bit more neutrons than a candle produces photons. The brightness of synchrotron radiation sources is more than 10 orders of magnitude higher. Meanwhile, the next generation neutron sources, like SNS in USA [1], JPARC in Japan [2] are being commissioned and started first runs for experiments, and the projected ESS in Europe [3] for nearly future. This is because the science, which can be made with the use of neutron beams, is in many cases unbeatable or even inaccessible for any other methods. This is because neutrons possess some specific properties. The absence of electric charge allows neutrons to penetrate deep into materials (up to several cm in steel!) and, therefore, to probe the bulk properties and to use complex sample environment to create necessary conditions at a sample under study. Small cross section of neutron scattering makes it possible to apply the first Born approximation for data analysis and to investigate biological and other objects without risk of radiation damage. Anomalously large magnetic moment of the neutron makes it a very efficient tool to examine different magnetic properties on a microscopic scale. Wavelength of thermal and cold neutrons (0.5 - 20 Å) and their energies (from micro electron volts to several hundred milli electron volts) are very well suited for exploration of crystal and magnetic structures and for investigations of atomic and magnetic elementary excitations. Last but not the least, neutrons are scattered by nuclei, not by electronic shells of atoms. Therefore, the interaction of neutrons with the elements is isotope specific. Different isotopes of the same element can have neutron scattering length (principal constant characterizing nuclear scattering of neutrons) not only of different values, but can also be of different sign. For example, hydrogen has a negative neutron scattering length (− 3.74 fm) while its heavy isotope deuterium has a positive one (6.67 fm). One can immediately observe it by mixing hydrogen-containing materials with their deuterated forms, which makes it possible to vary the average value of neutron scattering amplitude. At a certain relative concentration of protonated and deuterated materials the scattering amplitude can be made equal to zero. This procedure is called contrast variation technique and it is widely used in the neutron scattering studies of complex hydrogen-containing systems, like biological objects, polymers, complex liquids, etc. Contrast variation allows one to cancel the neutron scattering signal from the selective parts of the system (again, by proper mixing of protonated and deuterated forms of these parts) while increasing the signal from the parts, which are relevant for the study.

These properties of the neutron have made it possible to perform a broad variety of basic studies of condensed matter properties. One can mention pioneering work on observation of antiferromagnetic structure in MnO [4], first measurements of phonon dispersion curves in aluminium and germanium [5, 6], localization of protons in hydrogen bonds [7]. Until now many complex problems of condensed matter science have been successfully solved using different neutron scattering methods. However, at the end of the last century and, especially, today the applications of neutron techniques for solving different problems important for industrial and technological development of modern societies started to play more and more important role.

In this review some of the results obtained at IBR-2 reactor, Joint Institute for Nuclear research (JINR), Dubna, using neutron scattering methods, neutron radiography and tomography will be discussed briefly.

1. IBR-2 reactor -for condensed matter studies. IBR-2 reactor is the main basic facility at Joint Institute for Nuclear research (JINR), Dubna dedicated to condensed matter research. The IBR-2 operates as a fast pulsed reactor. Its main distinctive property, which makes it differ from other nuclear reactors, is the mechanical modulation of the reactivity by means of a movable reflector. IBR-2 is the most intense pulsed neutron source in the world (IAEA-TECDOC-1439, February 2005). Producing a record neutron flux of 10^{16} n/cm² /s in the pulse, the IBR-2 reactor is also an economical and relatively inexpensive facility. Activation of the equipment and the burn up of the active core are slow due to the low mean power. The IBR-2 reactor is mainly used for investigations in the fields of condensed matter physics (solids and liquids), biology, chemistry, Earth and materials science. Operating experience has shown that it is a very effective neutron source; in most areas of application it compares well with the best neutron sources based on proton accelerators. At present, this experience is of special importance in connection with the increasing interest in long-pulsed neutron sources.

The IBR-2 has some specific features which make this facility very efficient for experiments which require:

- Broad momentum transfer range
- Broad energy transfer range
- Fixed scattering geometry
- Simultaneous measurements of elastic and inelastic scattering
- Tight collimation of the neutron beam.

Different experimental techniques, many of them unique, have been developed at the IBR-2 reactor to study the properties of condensed matter. In recent years, IBR-2 spectrometers have provided important results in determinations of the precise structure of high-temperature superconductors and colossal magneto-resistance compounds, and in studies of the peculiarities of elementary excitation spectra in superfluid helium. Work to investigate the spatial structure of ribosomes and biological membranes and to model biologically related objects has been performed. At the present time, applied investigations are being actively developed. Analytical work aimed at solving problems in the field of environmental protection (bio-monitoring of industrial regions, multi-element analysis of atmospheric aerosols) is being carried out using neutron activation analysis. At the FSD spectrometer, investigations of internal stresses in metals by neutron diffraction have been started. The high penetrating power of neutrons makes it possible to find internal defects and to determine stresses in components that cannot be studied using traditional non-destructive testing methods.

The user policy at the IBR-2 allows specialists from different organizations to gain access to the experimental facilities.

The long-standing experience of using pulsed nuclear reactors in Dubna shows that these facilities are effective and economical, and that they offer unique possibilities for neutron investigations in many fields of modern science. These reactors play an important part in forming ideas and providing technical solutions when creating new neutron sources all over the world. The successful operation of the IBR-2 reactor for more than twenty years provided the basis for the development of a new trend – the creation of long-pulse neutron sources. This provides reason enough to further upgrade the IBR-2 pulsed nuclear reactor.

2. Condensed matter research with neutrons. The main goal of the research in the field of neutron scattering studies of condensed matter is the investigation of the fundamental principles and driving forces of the self-organising structure formation of atoms and molecules; transformations of these assemblies under the influence of external forces and variable field conditions; studies of microscopic dynamics of such structures and the search for correlations between structure and microscopic dynamics with macroscopic properties and/or the function of the objects under investigation[8].

Available resources and manpower will be concentrated in the following priority research fields:

- Nanostructures.
- Biopolymers, Biomedical applications.
- Strongly correlated electronic systems. Magnetism and superconductivity.
- Materials, Earth and Engineering sciences.

2.1. Nanostructures. Nanostructures – structures having dimensions of 1 to 100 nm. Novel behaviors associated with the nanoscale are not merely the result of orders-of-magnitude reductions in size, but are

caused by the emergence of *genuinely new phenomena*. These include the effects of confinement on electronic structure, the dominance of interfacial and surface phenomena (in contrast to bulk effects) with increasing surface-to-volume ratio, and purely quantum effects.

Nanoscience is positioned at the crossroads of several traditional academic disciplines like physics, chemistry, biology, computational science and engineering. Nanoscience covers topics such as self-organizing and self-assembling organic and inorganic materials, nano-structured alloys and composites, advanced functional polymeric materials, ultrathin films, quantum dots, nanotubes, nanocrystals, etc.

Apart from the scientific interest, a major driving force behind the research in nano-systems is the prospect of wider technological applications.

Neutron scattering offers unique capabilities for the exploration, characterization and finally for the understanding and control of nanostructures. Nanoscale systems and devices involve complex materials usually containing different nanophases. Their structure can be unraveled by neutron scattering and in particular by small-angle neutron scattering (SANS). The large cross-section difference for hydrogen and deuterium enables H/D labeling studies of complex “soft”, biological and “soft-hard” nanosystems. Many nano-devices contain magnetic phases and neutron scattering has proved to be the unique tool for the investigation of the magnetic structure of matter, both static and dynamic.

Recent examples of the successful application of neutron scattering at IBR-2 to address these problems include studies of fullerenes in solution, magnetic liquids, branched polymers, nano-diamonds and other systems.

2.2. Biopolymers, biomedical applications. Crystallography, SANS and inelastic scattering of biological molecules make major contributions to their structure analysis. Neutron scattering provides a unique approach as a non-destructive and non-adsorbing probe, with contrast variation involving H/D exchange. For multi-component systems (like ribosomes, extensively studied at the IBR-2 reactor), information about the distribution of the components has been obtained by variation of the D₂O content in solution. Moreover, specific deuteration allows selected parts of macromolecular structures to be highlighted and analyzed *in-situ*.

The dynamics of biological molecules remains difficult to characterize and are still poorly understood. But this aspect is of great importance for biological function and activity. Neutron scattering is perfectly and uniquely suited to the space-time window of biological macromolecules. Protein function and activity, enzyme catalysis, ligand binding, receptor action, electron and proton transfer are strongly dependent on the internal dynamics and conformational fluctuations. Dynamics experiments probe the forces that underpin a molecular structure and its fluctuations and in chemistry they provide a stringent test for a structural or interaction model. Recent work performed at IBR-2 in this direction, combined with molecular dynamics simulations, and has received an encouraging JINR prize.

Membrane biophysics studies on the molecular scale are crucial for understanding the self-organization processes which underline many functional aspects of the membrane, in particular membrane transport, molecular recognition on surfaces and adhesion between cells and substrates. Experiments performed at IBR-2 on model lipid membranes, vesicles and objects mimicking real biological membranes have already proved of great potential in such research.

2.3. Strongly correlated electronic systems. Magnetism and superconductivity. Almost everything we know about magnetic structure – from the early demonstration of antiferromagnetism in simple systems to the complex magnetic structures being developed by hard magnets – has come from experiments with neutrons. Similarly, polarized neutron reflectometry provides unique access to surface and interfacial magnetism in thin films and multilayers. Neutrons have provided the definitive crystal structure of high temperature superconductors, which serve as the basis for all considerations of the mechanism of superconductivity and have led to the production of better quality materials. Experiments performed in this direction at FLNP were not just of world class quality, but often have been pioneering and opened new research directions.

2.4. Material, Earth and engineering sciences. Neutron scattering has established itself as one of the most important tools for the analysis of materials. Metals, ceramics and their composites, semiconductors, superconductors, nanophase materials, liquids, polymers, concrete, biomaterials as well as many other materials have been analysed with great success using neutron scattering. In many situations neutron scattering is an indispensable tool, since no other method provides information within the same space-time window. Neutrons are well suited to non-destructive studies of components in their as-fabricated and in-

service condition. At the same time, neutrons take a volume average such that results relate to the properties of real materials. Whenever new materials become available, neutron scattering plays a key role in providing a microscopic understanding of their structural, dynamic and magnetic properties. Examples which come from IBR-2 experiments cover high- T_c superconductors, giant magneto resistance compounds, fullerenes and other materials of present interest. Results of engineering research on real industrial components at IBR-2 were highly appreciated and their authors have received a number of prestigious awards.

The use of neutron scattering by the Earth Sciences community has a relatively short history, but it is now clear that the potential of neutron scattering methods for the solution of Earth Sciences problems, including many environmental problems, is enormous. For example, texture, defined as preferred orientation in a crystalline material, carries a fingerprint of the rock's history. Quantitative texture analyses provide fundamental information for the modeling of rock anisotropies and reconstruction of tectonic events. At IBR-2 the following problems of fundamental character are being studied:

- Origin of the seismic anisotropy of the lithosphere of the Earth.
- Metamorphic, geo-dynamic and evolutionary processes in the lithosphere of the Earth on the basis of the crystallographic textures of deep and surface rocks.
- Kinetics of phase transitions in minerals and rocks and its relation to the origin of seismic activities.

3. Engineering applications. Russian RBMK-type nuclear power reactors use in their construction bimetallic adaptors, which connect stainless steel tubes with zirconium alloy tubes. Connection is made using the so-called cold welding technique. For this purpose the end part of zirconium tube is made cone shaped with a set of teeth on its outer part. Correspondingly the steel tube inner part is cone shaped with the set of teeth matching the shape of zirconium tube. Then both parts are connected in a vacuum at a temperature of 900°C. Since the thermal expansion coefficient of steel is about 3 times larger than that of zirconium, then on cooling a tight connection of two parts is realized. At the same time this process leads to the generation of significant residual stresses in the connection area. These stresses can potentially cause the formation of microcracks and the reduction of service period of the adaptor.

The high-resolution neutron diffraction method has been employed to measure the residual stress tensor in a set of cross sections of the adaptor joints [9]. It has been possible to identify regions, which are the most dangerous from the viewpoint of fatigue failure. Moreover, on the basis of measurements the recommendations have been made on how to reduce the dangerous stresses in the adaptor, and consequently to increase its service life and to improve operational characteristics by using an additional heat treatment procedure.

4. Fuel cells. Fuel cells convert the energy of chemical reactions inside them into electricity. Many laboratories around the globe are involved in the construction and optimization of different fuel cells, as they promise to become a source of clean energy. A typical fuel cell consists of a proton-conducting membrane to both sides of which porous electrodes are attached. This structure is enclosed into a container with specially machined channels to ensure the flow of chemical reactants and removal of the reaction products from the cell. The efficiency of fuel cell operation is strongly dependent on the uniformity of reactant flow and therefore it is very important to investigate this process *in situ* inside the real device. Such an opportunity is provided by the neutron imaging technique. In [10] the investigation of direct methanol fuel cell is presented.

From the anode side of the cell methanol is fed and diffuses through a porous medium to the electrochemical active electrode. After oxidation of methanol carbon dioxide is formed as a reaction product, which needs to be removed from the anodic compartment. Protons generated due to the chemical reaction diffuse through proton-conducting membrane to the cathodic volume, where they react with the flow of oxygen and water is obtained as a reaction product. This water also needs efficient removal from the cell. So, carbon dioxide from anodic side and water from the cathodic side may affect the efficiency of fuel cell operation. Neutron imaging has allowed the observation of flow field inside the real fuel cell to be monitored during the cell operation. It has been observed that carbon dioxide indeed blocks some channels for methanol supply. It has also been found that the problem might be partially cured by an increase of mass flow. But still the geometry of channels in the fuel cell used has not made it possible to distribute mass flow homogeneously. The results obtained have stimulated further studies of alternative channel geometries and quantitative characterization of this liquid layers inside the cell.

5. Neutron radiography and neutron tomography. As mentioned in the introduction, neutrons can easily penetrate through materials composed of heavy elements, while hydrogen scatters thermal and cold neutrons strongly. This fact is the basis for non destructive investigation of hydrogen-containing materials inside metallic or other hydrogen-free enclosures using the neutron imaging methods.

Cultural heritage. Neutron radiography and neutron tomography provide unique opportunities for non-invasive investigations of historical artifacts. In combination with the traditional X-ray imaging the results obtained contain extremely rich information about authenticity, period of origin, manufacturing details and previous restoration works. This is because X-rays are extremely sensitive to the metal parts of the objects, while neutrons have a very high contrasting capability for organic materials, including wood, textiles, leather. In [11] a number of examples are presented on the basis of research performed at PSI, Switzerland.

In particular, neutrons revealed resin parts in the old dagger as a result of earlier restoration works on this object. Also indications of ornament on the knife edge became visible in the neutron light.

Another example is the investigation of Roman bronze sculpture. Because of high lead content in the bronze material the inner structure of the object is only visible with neutrons.

Yet another interesting artifact study presented in this publication was a heavily corroded finger ring. The question to be answered was whether the inner structure of the ring contains a gem stone or, at least, a structure for fixing such a stone. Traditional methods of investigations could not clarify this point. Neutron tomography results clearly revealed spherical hole in which the presently missing gem stone was fixed.

Conclusions. Obviously, the examples presented above are not comprehensive and, of course, are biased by personal preferences of the author. Nevertheless, it seems that even in this form the breadth of existing and potential new applications of neutron-based methods is clear. The next generation neutron sources will open completely new opportunities, which are not feasible now. Meanwhile the role of smaller neutron facilities will not diminish as they will form the basis for testing new ideas and will continue to contribute considerably to the presently well established fields of research.

REFERENCES

- 1 <http://neutrons.ornl.gov/>
- 2 <http://j-parc.jp/MatLife/en/index.html>
- 3 <http://www.neutron-eu.net/>
- 4 C.G.Shull, J.S.Smart, Phys. Rev., **76**, 1256-1257, (1949); C.G.Shull, W.A.Strauser and E.O.Wollan, Phys. Rev., **83**, 333-345 (1951).
- 5 B.N.Brockhouse, A.T.Stewart, Phys. Rev., **100**, 756- 757 (1955).
- 6 B.N.Brockhouse, P.K.Iyengar, Phys. Rev., **108** (3), 894-895 (1957).
- 7 H.A.Levy, S.W.Peterson, Rev. Mod. Phys., **30** (1), 101 (1958).
- 8 S.H.Kilcoyne, Physica B, **350**, 91-97 (2004); M.Al-Jawad, P.Manuel, C.Ritter, S.H.Kilcoyne, Journal of Physics Condensed Matter, **18** (4), 1449-1458 (2006).
- 8 A.V. Belushkin Scientific Programme of the Frank Laboratory of Neutron Physics, Dubna, 2010-5, 2010
- 9 A.V.Tamonov, V.V.Sumin, J. Neutron Res., **12** (1-3), 69-73 (2004).
- 10 D.Kramer, E.Lehmann, G.Frei, P.Vontobel, A.Wokaun, G.G.Scherer, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res., **A542**, 52-60 (2005).
- 11 E.H.Lehmann, P.Vontobel, E.Deschler-Erb, M. Soares, Nucl. Instr. Meth. Phys. Res., **A542**, 68-75 (2005).

М. Динейхан, Д. Сангаа, А.В. Белушкин, Д.Т. Азнабаев, Б. Мұхаметулы

РАССЕЯНИЕ НЕЙТРОНОВ В ФИЗИКЕ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

Данный обзор рассматривает методы по нейтронному рассеянию и несколько недавних примеров традиционного и нового применений нейтронных методов на реакторе ИБР-2 для решения практически важных задач. Некоторые результаты в области развития нано- и функциональных материалов, инженерных приложений, совершенствования топливных элементов изложены вкратце.

М. Динейхан, Д. Сангаа, А.В. Белушкин, Д.Т. Азнабаев, Б. Мухаметұлы

НЕЙТРОНДАРДЫҢ КОНДЕНСИРЛЕНГЕН ОРТА ФИЗИКАСЫНДАҒЫ ШАШЫРАУЫ

Осы шолу нейтрондарды шашырату, ИЖР-2 қондырғысындағы іс жүзінде маңызды есептердің шешімі үшін нейтрон әдістерінің дәстүрлі және жаңа қолдануларының бірнеше жақында жасалынған мысалдарын қарастырады. Дамытудың төңірегіндегі кейбір нәтижелер нано- және функционалдық материалдар, инженерлік қосымшалар мен жанармай элементтерін жетілдіру туралы қысқаша айтылған.

УДК 519.863; 517.977.5;
57.087; 57.081.23

Г. Г. ЛИТВИНЕНКО¹, Н. Г. ЛИТВИНЕНКО¹, Н. З. МУКАШЕВ²

О ПРАКТИЧЕСКОМ ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЗАВИСИМОСТЬ УДЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ РОСТА МИКРООРГАНИЗМОВ ОТ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ СРЕДЫ

¹Институт математики, информатики и механики КН МОН РК,
²ТОО «Грань», г. Экибастуз

Приведены результаты теоретического анализа существующих способов математического описания зависимости удельной скорости роста микробиологических популяций от факторов среды.

Создание новых и интенсификация существующих биотехнологических процессов ставит перед биотехнологической наукой принципиально новые научно-технические задачи. В частности, это постановка задач по оптимизации процессов микробиологического синтеза и разработка способов их решения.

Стремление к оптимальному управлению биотехнологическими процессами приводит к необходимости сопоставления различных вариантов их осуществления. В ряде случаев возможно непосредственное сравнение биотехнологических процессов, которые используются на действующих предприятиях или их аналогах в лабораторных или опытно-промышленных условиях. Однако в сложных технологических процессах подобные методы имеют достаточно ограниченные возможности, требуют больших материальных и трудовых затрат, являются длительными либо вообще нереализуемыми.

В этой ситуации решающее значение приобретает другой путь исследования микробиологических процессов, когда реальный процесс заменяется его аналогом, выраженным в виде математической модели. В этом случае объектом исследования становится математическая модель, что позволяет выявить качественные и количественные взаимосвязи факторов, влияющих на процесс. Найти оптимальные условия ведения процесса, оценить его потенциальные возможности и степень отклонения текущего состояния производства от оптимального. Существенно сократить время и затраты на изучение и оптимизацию процесса.

Однако необходимо отметить, что математическая модель является надежным инструментом для оптимизации процессов микробиологического синтеза только в том случае, если допущения, положенные в ее основу, в полной мере отвечают основным свойствам моделируемой системы. Есть основная типичная ошибка, которую следует иметь в виду, применяя математическое моделирование в микробиологии. Сама по себе она достаточно очевидна и заключается в том, что при моделировании микробиологических процессов очень часто механически используют готовые решения в основном из биохимии, но при этом забывают, что биохимические модели - это модели молекулярного уровня, а микробиологические - это модели популяционного уровня. В результате при работе с реальными микробиологическими процессами приходят к неверным выводам.

Популяционные модели микроорганизмов на уровне полного агрегирования, т.е. без учета внутривидовой структуры сводятся к воспроизведению динамики биомассы $X(t)$ и биосинтеза целевого продукта $P(t)$ во времени.

Поскольку микробиологические системы строго подчиняются закону сохранения, то вполне естественно, что их математическое описание представляется в виде системы дифференциальных уравнений материального баланса для основных наблюдаемых переменных: концентрации биомассы микроорганизмов, субстратов, продуктов метаболизма, которая, в случае необходимости,

может быть дополнена уравнениями теплового и газового баланса. При постоянном объеме и температуре система уравнений материального баланса, описывающая микробиологический процесс, соответствует записи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \mu(s_1 \dots s_n) X - DX \\ \frac{ds_1}{dt} &= D(s_1^0 - s_1) - \frac{1}{y_1} \mu(s_1 \dots s_n) X \\ \frac{ds_2}{dt} &= D(s_2^0 - s_2) - \frac{1}{y_2} \mu(s_1 \dots s_n) X \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{ds_k}{dt} &= D(s_k^0 - s_k) - \frac{1}{y_k} \mu(s_1 \dots s_n) X \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dP}{dt} &= q(s_1 \dots s_n) X - DP \end{aligned} \right\} (1)$$

где X – концентрация клеток в среде; $\mu(s_1 \dots s_n)$ – удельная скорость роста; s_k – k -й фактор среды (концентрация субстрата, продукта жизнедеятельности микроорганизмов, температура, pH и т. д.); D – удельная скорость разбавления; y_{ik} – коэффициент утилизации k -го вещества; s_k^0 – концентрация k -го вещества в подаваемой среде; P – концентрация в среде целевого продукта; $q(s_1 \dots s_n)$ – удельная скорость биосинтеза.

Данная система уравнений и теоретические предпосылки, послужившие основой для ее создания, представлены в большом количестве работ как общетеоретического, так и практического характера. Например, в монографии Малашенко Ю. Р. с соавторами [1] излагаются методические подходы и способы решения вопросов применения математического моделирования к задачам оптимального управления процессами биосинтеза и прогнозирования роста клеток. В книге Бирюкова Н. П. и Кантере В. А. [2] приведены обобщения широкого круга вопросов, связанного с оптимизацией периодических процессов микробиологического синтеза. В работе Варфоломеева С. Д. и Калюжного С. В. [3] изложены основы и методы анализа кинетики микробиологических процессов и детально рассмотрены аналитические модели клеточного роста.

В последнее время особенно интенсивно методы математического моделирования процессов микробиологического синтеза развиваются в США. Это работы, связанные с моделированием процесса синтеза антибиотиков в *fed-batch* процессах. В частности, исследования таких авторов, как Birol I с соавторами [4, 5], в которых даны не только теоретические описания одного из наиболее употребляемых процессов *fed-batch* культивирования микроорганизмов при производстве пенициллина, но и построены реально действующие математические модели для расчетов оптимальных процессов микробиологического синтеза.

В работе Винарова А. Ю. с соавторами [6] система (1) используется в качестве основной системы уравнений для решения оптимизационной задачи при проектировании и оптимального управления процессами, проходящими в биореакторах. Список публикаций, в которых используется указанная система уравнений, можно продолжить, но с учетом целей данной статьи в этом нет необходимости.

Более важно обратить внимание на то обстоятельство, что результаты расчетов, полученные при решении системы (1), полностью определяются формой и значениями коэффициентов функции $\mu(s_1 \dots s_n)$, описывающей зависимость удельной скорости роста от различных факторов среды.

К настоящему времени предложено несколько десятков вариантов математических функций, описывающих эту зависимость, при построении которых их авторы исходили из различных представлений, иногда чисто формальных (например, применяя общие закономерности химической кинетики). Все известные уравнения принято делить на эмпирические и экспериментально-аналитические.

Для уравнений первого типа характерно то, что структура поручаемого уравнения зависит от вида аппроксимирующего эксперимент выражения и таким образом имеет ограничения общности.

Уравнения второго типа, среди которых наиболее известны:

Уравнение Моно:

$$\mu = \frac{\mu_{\max} S}{K_S + S}. \quad (2)$$

Уравнение Мозера:

$$\mu = \mu_{\max} (1 + K_S s^{-\lambda})^{-1}. \quad (3)$$

Уравнение Контуа¹:

$$\mu = \mu_{\max} \frac{s}{Bx + s}, \quad (4)$$

а также описывающие ингибирование роста клеток избытком субстрата.

Уравнение Эндрюса [7]:

$$\mu = \mu_{\max} \frac{s}{K_S + s + \frac{s^2}{K_i}}. \quad (5)$$

Уравнение Аиба и др. [8]:

$$\mu = \mu_{\max} \frac{s}{K_S + s} \frac{K_p}{K_p + p}, \quad (6)$$

где μ_{\max} – максимальная удельная скорость роста для субстрата; s – концентрация субстрата; p – концентрация продукта; K_S , K_P – константы предполагают действие определенного биологического или физико-химического закона в сочетании с экспериментальным определением параметров модели. Выделение указанных моделей в отдельную группу основывается на внешнем сходстве зависимостей удельной скорости роста от концентрации субстрата с известным уравнением Михаэлис-Ментен и уравнением ферментативной реакции неконкурентного ингибирования.

Основой подобной аналогии является принцип «узкого места», в соответствии с которым цепь ферментативно катализируемых реакций, сопровождающих процесс потребления клеткой субстрата, лимитируется наиболее медленной реакцией. В литературе часто упоминается, что модель Моно не случайно имеет вид модели Михаэлиса, так как в основе роста клетки лежат именно ферментативные процессы.

Использование уравнения Моно и в практике микробиологических исследований стало настолько традиционным, что параметры этих функций μ_{\max} , K_S трактуются как характеристики некоего микроорганизм-субстратного комплекса и им придается смысл биологических констант, характеризующих тот или иной вид микроорганизмов, а многие авторы неоднократно делали попытки определить зависимость μ_{\max} , K_S от таких факторов среды, как температура и рН и т. д.

Однако каких-либо строгих теоретических или экспериментальных доказательств о том, что это действительно, так нигде не приводится и до сих пор остается невыясненным, можно ли просто ставить в соответствие скорость некоторой ферментативной реакции, определяющей рост клетки, удельной скорости роста популяции клеток, особенно в тех случаях, когда «узкое место», более или менее постоянное в масштабе жизни клетки, смещается в течение периода развития популяции.

¹ В уравнение Контуа входит кажущаяся константа Михаэлиса B , пропорциональная концентрации биомассы x , поэтому по мере увеличения плотности популяции максимальная скорость роста должна уменьшаться и, в конце концов, μ станет пропорциональной s^{-1} .

Более того, известно достаточно большое количество работ, в которых показано, что при практическом определении параметров роста в различных биотехнологических процессах возникают серьезные трудности. Например, в публикациях А. Holmberg с соавторами [9-11] показано, что при использовании уравнения Моно:

- наборы параметров, при которых получают хорошее описание зависимости удельной скорости от концентрации субстрата не единственные;
- параметры, оцененные на основании данных, полученных в процессах с явно одинаковыми условиями, сильно варьируют.

Учет этих фактов вызвал необходимость критического анализа на предмет биологического смысла констант μ_{\max} , K_S , используемых в уравнении Моно, что и было сделано в работе А. Holmberg [12]. Где автор исследовал применимость уравнения Моно в микробиологической практике при помощи анализа чувствительности и убедительно показал, что точная идентификация параметров этого уравнения на основе стохастических данных практически невозможна, а параметры μ_{\max} , K_S являются эмпирическими и их интерпретация как биологических констант неправомерна.

В дополнение к этому можно сказать, что реальные процессы роста микробных популяций протекают по достаточно сложным и неизученным механизмам, а уравнение Моно как непрерывная функция со свойствами $\mu(0) = 0$ и $\mu(s) \rightarrow \mu_{\max}$ при $s \rightarrow \infty$ играет роль экстраполяционного уравнения только для небольшой части кинетической кривой, а величина K_S , определяемая из анаморфоз кинетических кривых, является «эффективной» константой и смысла биологической константы иметь не может.

Кроме этого, необходимо отметить, что уравнения Моно, Эндрюса, Мозера и многие другие, широко используемые в литературе для описания зависимости удельной скорости роста от факторов среды, несмотря на свои внешние различия, по своей сути это всего лишь одна и та же дробно-рациональная функция вида:

$$y = f(x) = \frac{\sum_{k=0}^n a_{n-k} x^k}{\sum_{j=0}^m b_{m-j} x^j}, \quad (7)$$

где a_n и b_m – коэффициенты $n, m \in N$.

Вид и свойства этой функции очень хорошо изучены и определяются значениями коэффициентов a_n и b_m . Например, при $n = m = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = \mu_{\max}$, $b_0 = K_S$, $b_1 = 1$ выражение (7) будет соответствовать уравнению Моно. При других значениях n, m и коэффициентов можно получить уравнение Эндрюса и другие. В случае, если в числителе и знаменателе этой функции стоят полиномы от двух переменных (концентрация субстрата и концентрация биомассы), можно получить и другие уравнения.

Дробно-рациональная функция, благодаря своим свойствам, очень широко используется в самых различных областях науки и в биологии, в частности, для решения обратных задач, когда необходимо аппроксимировать экспериментальные данные простым и удобным в практике математическим выражением. Однако коэффициенты этих выражений, определенные на основе экспериментальных данных, в каждом конкретном случае являются эмпирическими и никакого другого смысла иметь не могут.

Из рассмотренного материала видно, что некоторые модели учитывают существующие реально явления насыщения или ингибирования скорости роста микроорганизмов при увеличении концентрации субстрата, однако это явление математически отражено в моделях различным образом на основе применения аналогий с различными реакциями. Представляется более общим и целесообразным исходить из достаточно простого и достоверного биологического явления, на основе которого можно аналитически строить модели скорости роста популяций.

Однако в настоящее время моделей, параметры которых можно было бы определить без эксперимента и, следовательно, без неизбежных неточностей при его постановке и реализации, не предложено. Тем не менее, обширные сведения, накопленные в результате экспериментальных исследований, позволяют сделать некоторые обобщения, касающиеся вопроса описания удельной скорости роста микробных популяций.

Поскольку этот вопрос достаточно сложный и для его решения наиболее рациональным является использование системного анализа, с позиций которого функционирование биотехнологической системы описывается при помощи следующего набора переменных:

- *Входные переменные*, v_i через которые осуществляется воздействие окружающей среды на систему (например, физические и химические факторы).

- *Выходные переменные*, y_i характеризующие реакцию систем на внешние и внутренние изменения факторов.

- *Переменные состояния*, s_i характеризующие способность системы к сохранению и осуществлению обратной связи, а также ее реакцию на влияние внутренних факторов.

- *Факторное пространство*, Ψ евклидово пространство, координаты которого сопоставлены значениям ранжированных факторов среды. Для обозначения факторного пространства обычно используют запись вида

- $\Psi = \{(v_1 \dots v_k, s_1 \dots s_n)\}$, означающую, что множество Ψ состоит из всевозможных последовательностей вида $(v_1 \dots v_k, s_1 \dots s_n)$. Таким образом, каждой конкретной комбинации значений факторов среды соответствует точка факторного пространства Ψ с координатами $(v_1 \dots v_k, s_1 \dots s_n)$

- *Функция отклика*, функция φ^k , отображающая факторное пространство Ψ на шкалу I^k :

- $\varphi^k : \Psi_m \rightarrow I^k$, которая каждой точке $(v_1 \dots v_k, s_1 \dots s_n)$ пространства Ψ сопоставляет число $\varphi^k(v_1 \dots v_k, s_1 \dots s_n)$ на шкале I^k . Типичный пример – это удельная скорость роста биомассы $\varphi^k = \mu(s_1 \dots s_n)$, когда $v_1 \dots v_k$, что, как правило, наблюдается в эксперименте, фиксирована.

Значения, принимаемые функцией с номером k на определенной шкале при варьировании факторов, факторов среды в соответствии с правилом Либиха – Шелфорда, ограничены снизу и сверху. Если обозначить через $I^k = [\underline{C}_k, \overline{C}_k]$ отрезок на шкале измерений, ограниченный минимально \underline{C}_k и максимально \overline{C}_k возможным значением k -того показателя, то он будет соответствовать толерантности по указанному фактору. В непосредственной близости к кардинальным точкам \underline{C}_k и \overline{C}_k должны быть расположены зоны пессимума, в которых физиолого-биохимическая активность микроорганизмов сильно ограничена; далее – субоптимальные зоны, в границах которых по мере удаления от зоны пессимума наблюдается рост биосинтетических реакций микробной популяции. Средняя зона определяется как оптимальная. Интенсивность действия фактора в этих границах наиболее благоприятна для развития популяций.

Следовательно, при выборе формы аналитического выражения $\varphi^k = \mu(s_1 \dots s_n)$ необходимо учитывать, что функция должна иметь следующие свойства:

- $\varphi^k = \mu(s_1 \dots s_n)$ нелинейная функция многих переменных, имеющая размерность $1/\text{время}$ и представляющая собой внутреннюю характеристику микробной популяции, не зависящую от объема и количества биомассы;

- значения функции $\varphi^k = \mu(s_1 \dots s_n)$ в определенной области $\Psi \subset \Psi = \{(v_1 \dots v_k, s_1 \dots s_n)\}$ ограниченной кардинальным точкам $[\overline{s}_k, \underline{s}_k]$ по каждому из факторов $\varphi^k > 0$, а вне этой области $\varphi^k \approx 0$.

- внутри области Ψ , где $\varphi^k = \mu(s_1 \dots s_n) > 0$ должна иметь экстремум $\varphi^k = \mu(s_1 \dots s_n)$.

Однако, как уже было отмечено выше, детальные механизмы и законы, по которым можно было бы определить зависимость $\varphi^k = \mu(s_1 \dots s_n)$ от изменения факторов среды, до настоящего времени не изучены, следовательно, возникает задача определения неизвестной функциональной связи между переменными величинами на основе данных эксперимента.

Однозначно определить неизвестную функциональную зависимость между переменными на основе результатов эксперимента, содержащих различные ошибки измерения, невозможно. Поэтому следует четко понимать, что целью математической обработки результатов эксперимента является не нахождение истинного характера зависимости между переменными или абсолютной величины какой-либо константы, а представление результатов наблюдений в виде наиболее простой формулы с оценкой возможной погрешности ее использования. Для решения этой задачи прикладная математика предлагает использовать три класса или группы функций, широко применяемых в регрессионном анализе.

Первая группа включает в себя линейные комбинации функций, что совпадает с классом всех полиномов степени n и, как частный случай, дробно-рациональную функцию. Применение полиномов в качестве функций, аппроксимирующих экспериментальные данные, имеет ограниченный характер, что связано с их свойствами (осциллирование при повышении n). В то же время для конкретных задач, в частности, для целей математического моделирования процессов, для использования в технологических регламентах и решении оптимизационных задач часто оказываются достаточно эффективными модели с использованием кубических сплайнов, если ограничить описание зависимости $\varphi^k = \mu(s_1 \dots s_n)$ в оптимальной зоне по факторам среды.

Безусловно, в этом случае существенно теряется прогностическая ценность модели, если значения факторов выходят из области оптимума, но для нужд практики это не столь важно, так как основное требование к таким моделям очевидное – непротиворечие имеющимся массивам измерений и биологическому смыслу системы, а также возможность на их основе решать оптимизационные задачи. При этом использование сплайнов становится очень удобным инструментом. Поскольку при переходе от аппроксимации многочленами к аппроксимации сплайнами достигается улучшение качества приближения. При одинаковых вычислительных затратах абсолютные погрешности аппроксимации сплайнами меньше, чем погрешности аппроксимации многочленами. Кроме того, сплайны позволяют избежать осцилляций, а для решения задачи сходимости предъявляются более слабые требования, чем в случае многочленов.

Вторую группу образуют периодические функции. Этот класс имеет отношение к рядам Фурье. Данная группа функций не может быть использована по определению, т. к. зависимость удельной скорости роста от факторов среды не является периодической.

Третья группа образуется показательными функциями. Эти функции встречаются в реальных ситуациях, в частности, функция:

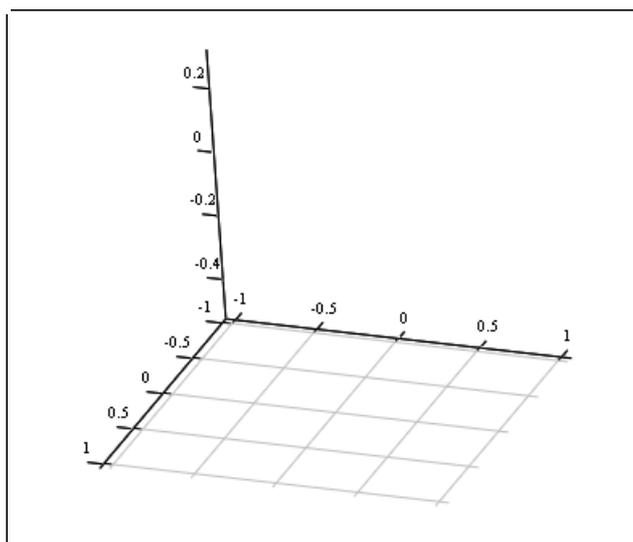
$$\mu_i(s_1 \dots s_n) = a \prod_{i=1}^n b_i s_i \exp\left(\sum_{i=1}^n -c_i s_i\right), \quad (9)$$

где a, b_i, c_i – коэффициенты; s_i – численное значение i -го фактора.

Общий вид данной функции для частного случая, когда $n = 2$, представлен на рисунке. Совершенно очевидно, что данная функция хорошо соответствует представленным выше требованиям. Функция имеет глобальный экстремум, а в случае, когда любой из факторов становится равным нулю или выходит за определенные границы, функция также принимает либо нулевое значение, либо близкое к нулю. Кроме того, эта функция легко линеаризуема, а это значит, что определение коэффициентов (9) не представляет трудностей.

Безусловно, модель, соответствующую выражению (9), нельзя считать универсальным описанием $\varphi^k = \mu(s_1 \dots s_n)$, так как в основу этой модели положены эмпирические данные и механизмы этого явления она не раскрывает. Однако в связи с тем, что эта модель вполне соответствует общим представлениям о характере влияния факторов среды на удельную скорость роста микроорганизмов ее использование в практике вполне оправданно.

К примеру, выражение (9) можно применять при решении оптимизационных задач. Для этого эксперименты по поиску оптимума разделяются на два этапа. На первом этапе планируется серия экспериментов с целью получить общее описание многофакторной зависимости $\varphi^k = \mu(s_1 \dots s_n)$ с использованием (9), свойства которого позволяют аппроксимировать экспериментальные данные в очень широком интервале варьирования факторов среды, но точность этого подписания очень зависит от ошибок измерений экспериментальных данных.



М,М

График функции, описывающей зависимость удельной скорости роста от двух факторов среды

После того, как эта цель достигнута, выражение (9) можно использовать для вычисления границ зоны оптимума в первом приближении, что дает возможность значительно сузить интервал поиска по каждому фактору.

Далее наступает второй этап, на котором план эксперимента строится с учетом того, чтобы все его точки не выходили за границы зоны оптимума. На этом этапе для аппроксимации данных, полученных в эксперименте, используются кубические сплайны, дающие более точную аппроксимацию, которая позволяет выполнить расчеты для поиска оптимального управления биотехнологической системой.

Необходимо отметить следующее, вопрос о том, насколько сложными моделями надо пользоваться для описания эксперимента, является в значительной степени дискуссионным. В то же время для конкретных задач, в частности, для целей математического моделирования процессов, для использования в технологических регламентах часто оказываются достаточно эффективными модели с эмпирическими параметрами. Основное требование к упрощенным моделям – непротиворечие имеющимся массивам измерений и биологическому смыслу системы.

Таким образом, задачи, возникающие в процессе изучения микробиологической кинетики, на сегодняшний день не являются только математическими, вычислительными или чисто биологическими. Это задачи обработки результатов экспериментов, неизбежно содержащих в себе некоторый элемент неопределенности в силу биологической природы объекта изучения. Отсюда следует, что оценка того, как связана неопределенность в данных со степенью неоднозначности решения при обработке и анализе данных кинетического эксперимента в микробиологии является чрезвычайно важным элементом при разработке методов решения задачи оптимального управления процессами микробиологического синтеза.

Автор считает, что изученные в статье вопросы представляют собой лишь предварительный этап в решении рассматриваемой проблемы и заранее благодарен за все замечания и предложения, касающиеся как существа решаемых задач, так и методики их изложения.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Малашенко Ю.Р., Мучник Ф.Б., Романовская В.А., Садовников Ю.С. Математические модели и ЭВМ в микробиологической практике. – Киев: Наук. думка, 1980. – 196 с.
- 2 Бирюков В.В., Кантере В.М. Оптимизация периодических процессов микробиологического синтеза. – М.: Наука, 1985. – 296 с.
- 3 Варфоломеев С.Д., Калюжный С.В. Биотехнология: Кинетические основы микробиологических процессов. – М.: Высш. шк., 1990. – 296 с.

- 4 Birol I., Undey C., Birol G., Cinar A. A Web-Based Simulator for Penicillin Fermentation // International Journal of Engineering Simulation, 2(1), 24-30, 2001.
- 5 Birol G., Undey C., Cinar A. A Modular Simulation Package for Fed-batch Fermentation: Penicillin Production // Computers and Chemical Engineering, 26(11), 1553-1565, 2002.
- 6 Винаров А.Ю., Гордеев Л.С., Кухаренко А.А., Панфилов В.И. Ферментационные аппараты для процессов микробиологического синтеза. М.: ДеЛи принт, 2005. – 273 с.
- 7 Andrews J.F. A Mathematical Model for the Continuous Culture of Microorganisms Utilizing Inhibitory Substrates // Biotech. Bioeng, 10, 707 1968.
- 8 Aiba S., Shoda M., Nogatani M. Kinetics of Product Inhibition in Alcohol Fermentation // J. Ferment. Technol. Japan, 47, 790, 1968.
- 9 Holmberg. J. Ranta. Procedures for parameter and state estimation of microbial grow process models // Automatica 18 1982.
- 10 Holmberg. R. Sievanen, G. Carlberg. Fermentation of Bacillus thurengiensis for exotoxic production: Process analyses study // Biotechnol. Bioeng. 22, 1707-1724, 1980
- 11 Holmberg. Modelling of the activated sludge process for microprocessor-based state estimation and control // Water Research 16, 1982.
- 12 Holmberg A. On the Practical Identifiability of Microbial growth models Incorporating Michaelis-Menten Type Nonlinearities // Mathematical Biosciences. 1982. V. 62, N 1. P. 23-43.

Г. Г. Литвиненко, Н. Г. Литвиненко, Н. З. Мұқашев

ОРТАНЫҢ ӨРТҮРЛІ ФАКТОРЫНА БАЙЛАНЫСТЫ МИКРООРГАНИЗМДЕРДІҢ
ҮЛЕСТІК ЖЫЛДАМДЫҒЫНЫҢ ТӘУЕЛДІ ӨСУІН СИПАТТАЙТЫН ТЕНДЕУДІҢ
ПРАКТИКАЛЫҚ ҚҰРЫЛЫМЫ ТУРАЛЫ

Ортаның факторына байланысты микробиологиялық популяцияның үлестік жылдамдығына тәуелді өсуінің математикалық сипаттамасы әдістерінің теориялық талдауының нәтижелері келтірілген.

G. G. Litvinenko, N. G. Litvinenko, N. Z. Mukashev

ABOUT PRACTICAL CONSTRUCTION
OF THE EQUATIONS DESCRIBING DEPENDENCE OF SPECIFIC GROWTH RATE
OF MICROORGANISMS FROM VARIOUS FACTORS OF ENVIRONMENT

In the article results of the theoretical analysis of existing ways of the mathematical description of dependence of specific growth rate of microbiological populations from factors of environment are resulted.

И. Х. ЖАРЕКЕШЕВ

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПРОВОДНИК-ИЗОЛЯТОР, ВЫЗВАННЫЙ РАЗУПОРЯДОЧЕНИЕМ ПРИМЕСНЫХ ЦЕНТРОВ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы

Установлена связь квантовой проводимости электронных неупорядоченных систем со статистикой уровней энергии на переходе металл-диэлектрик. Вычисляется скейлинг электронных уровней при изменении хаотического потенциала. Получено хорошее согласие результатов численного моделирования с экспериментальными данными.

Ключевые слова: неупорядоченные системы, электронный транспорт, квантовая локализация.

Введение. Явление квантовой локализации электронных состояний за счет беспорядка потенциала относится к одной из основных тем современной физики конденсированного состояния. Оно заключается в том, что при увеличении амплитуды флуктуаций случайного примесного потенциала волновые функции электронов преобразуются из распространенных состояний в локализованные состояния. Локализация носителей заряда лежит в основе фазового перехода проводник-изолятор, который характеризуется резким изменением температурного поведения электропроводности от металлического режима к диэлектрическому режиму. Он обладает критическими свойствами, присущими обычным фазовым переходам в термодинамике, и описывается длиной корреляции, параметром порядка и критическими индексами. Влияние неупорядоченности на электронные состояния проявляется во взаимной корреляции соответствующих им дискретных уровней энергии. При этом флуктуации в плотности состояний и статистика уровней энергии электронов становятся чувствительными к переходу проводник-изолятор. Наиболее интересным является промежуточное фазовое состояние, когда твердое тело не относится ни к проводнику, ни к изолятору. В таком критическом состоянии электронная проводимость не зависит от температуры.

Таким образом, представляются весьма актуальными исследования, позволяющие получить достоверную информацию о статистических свойствах перехода проводник-изолятор и выявить общие закономерности флуктуационной природы спектров энергии в твердых телах. Это достигается теоретическим и экспериментальным изучением хаотических флуктуаций в электронных энергетических спектрах неупорядоченных систем на переходе проводник-изолятор. Целью этой работы является установление взаимосвязи между электронной проводимостью и спектральными корреляциями между одноэлектронными состояниями вблизи перехода проводник-изолятор, вызванного хаотичностью примесного потенциала. В результате был проведен сравнительный анализ с точными квантово-механическими подходами в режиме критичности, экспериментальными данными и результатами компьютерного моделирования.

Моделирование. Запишем гамильтониан задачи в представлении вторичного квантования

$$H = I \left[\sum_i \varepsilon_i a_i^+ a_i + \sum_{i \neq j} (a_j^+ a_i + h.c.) \right], \quad (1)$$

где a_i^+ (a_i) – операторы рождения (уничтожения) электрона на узле i (для определенности простой кубической) решетки; j – номера шести ближайших к решетке соседей узла i ; ε_i – случайная энергия; I – интеграл перекрытия ближайших узлов; $h.c.$ – означает эрмитово сопряжение.

При численном моделировании мы будем применять следующую формулу для распределения локальных энергий узлов ε_i :

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} W^{-1}, & |\varepsilon| \leq W/2, \\ 0, & |\varepsilon| > W/2. \end{cases} \quad (2)$$

Как найдено нами в работах [1-3], в этой модели при увеличении степени беспорядка W происходит переход металл-диэлектрик при $W = W_c = 16.5$. Ясно, что при $W \gg W_c$ перекрытием волновых узлов решетки можно пренебречь и волновые функции локализованы на отдельных узлах. В таком случае распределение уровней энергии практически совпадает с распределением затравочных энергий E_i , то есть является абсолютно случайным, пуассоновским.

Модель Андерсона (1) с потенциалом примесных центров (2) применялась нами для вычисления статистических свойств электронного спектра мезоскопических образцов в различных физических случаях, а именно: в присутствии сильного спин-орбитального взаимодействия [4]; для вычисления проводимости [5] и его критического поведения; для исследования нового класса критических ансамблей в [6]; в присутствии магнитного поля [7] и в присутствии магнитных моментов [8].

Для многих из этих ситуаций в настоящий момент имеются экспериментальные измерения, выполненные другими авторами в различных лабораториях. Результаты этих экспериментальных измерений мы сравниваем с нашими теоретическими результатами в тех диапазонах параметров, которые учитываются нашей моделью. Многие из этих результатов хорошо согласуются друг с другом, подтверждая тем самым, что наш подход хорошо объясняет явления в отличие от предыдущих теоретических подходов.

Наиболее яркой и убедительной проверкой предлагаемого в настоящей работе аналитического исследования является отличное согласие экспериментальных данных по статистике дискретных уровней в наноструктурных МОП-транзисторах с результатами вычислений, проведенных нами в условиях сильного спин-орбитального взаимодействия [4, 9]. В работе [4] мы приводим сравнение графиков для функций распределения уровней энергии как для теории, так и для эксперимента. Отметим, что экспериментальная работа [10], результаты которой объясняются нашей теорией, появилась в печати позже нашей оригинальной публикации [4].

Модель сильной связи с беспорядком была нами обобщена также на случай приложения внешнего магнитного поля путем добавления фактора Пайерлса [11], который ранее не был учтен в задачах электронной локализации. С помощью него мы впервые получили хорошее совпадение с экспериментальной зависимостью положений дискретных уровней от магнитного потока, новую фазовую диаграмму перехода проводник-изолятор и вычислили критический показатель длины локализации [12]. В конце работы проводится сравнение вычисленной нами скейлинговой функции для спектрального отклика с экспериментальными данными по проводимости, полученными для кремния легированным фосфором.

Цель численного моделирования состояла в том, чтобы проверить скейлинговую теорию на конкретной модели неупорядоченной системы и сравнить с возможными экспериментальными ситуациями. Изучалась модель Андерсона (1) в кубе $20 \times 20 \times 20$ с периодическими граничными условиями, то есть, иначе говоря, бесконечная простая кубическая решетка, в которой хаотические энергии ε_i периодичны с периодом 20 постоянных решетки по каждой координате. В этой задаче уровни дискретны, так что не возникает вопроса, как подсчитывать размытые уровни.

Блок-схема численного метода, основанного на модифицированном методе диагонализации Ланцоша, приведена на рис. 1. Детали численного алгоритма, последовательность и построение операций приведены в работе автора [13]. Здесь мы только ограничимся коротким описанием



Рис 1. Блок-схема модифицированного алгоритма Ланцоша для компьютерного моделирования электронной проводимости неупорядоченных систем

процедуры. Она состоит в следующем. Случайный датчик создавал значения ε_i в количестве $20^3 \times 20^3$ в интервале $[-W/2, W/2]$. Матрица гамильтониана размером 8000×8000 диагонализировалась, и подсчитывалось число уровней, попавших в центрированную вокруг нуля полосу энергий шириной W и в более узкие полосы с шириной $E_i = E_0/2^{i/2}$, где $i=1,2,3,\dots$. Затем каждая из полос делилась на 2^k полоски, равные ширине $E_{ik} = E_i/2^k = E_0/2^{k+i/2}$, $k=1,2,3,4,\dots$. Вычислялось число уровней N в исходных полосах и в каждой полоске и производилось усреднение N и N^2 по 2^k полосок каждой ширины. Затем все результаты усреднялись по большому количеству реализаций энергий ε_i . Ширина полосы E_0 была так мала, что существенные изменения плотности состояний от полоски к полоске не наблюдались. Этим подтверждается эргодичность усреднения по плотности электронных состояний.

Сравнение с экспериментом. Экспериментальные результаты по измерению положения дискретных уровней энергии были выполнены в Корнельском университете на одноэлектронных полевых транзисторах, активный слой которых был синтезирован из частиц золота и составлял 5-15 нм в диаметре [10]. Измерения проводились по положению пиков напряжения сток-исток V_{SD} при постоянном напряжении на затворе V_G . Величина магнитного поля изменялась от 0Т до 4Т. Температура электронной подсистемы составляла 90 мК.

На рис. 2 показана зависимость положения дискретных уровней от магнитного поля, измеренная по пикам туннельных резонансов для переходов $N+2 \rightarrow N+1$ и $N+1 \rightarrow N$. Чтобы сравнить результаты нашей теории с данным экспериментом, мы выбрали диапазоны параметров, наиболее близкие к измеренным величинам [14]. Как видно из рис. 2, наблюдается хорошее согласие в характере и амплитуде хаотических изменений дискретных уровней по отношению к магнитному полю.

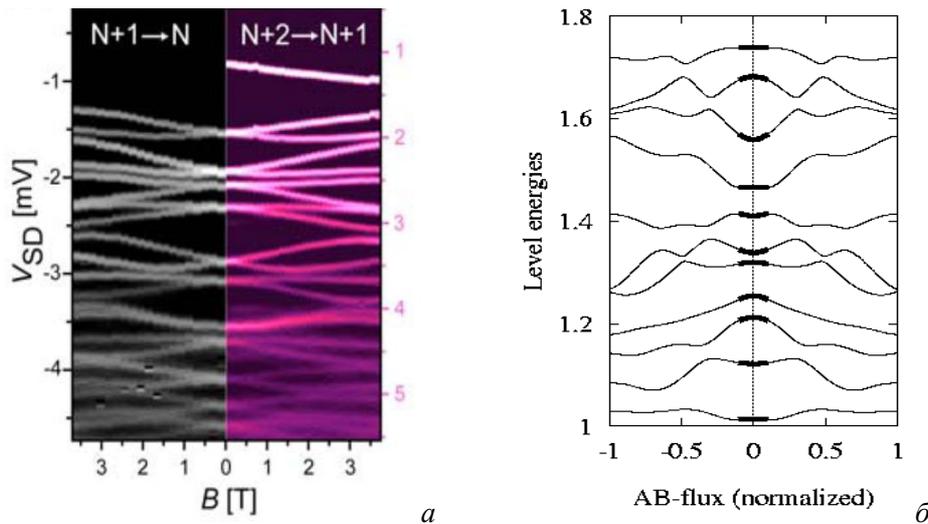


Рис. 2. Зависимость расположения пиков уровней энергии электронов от магнитного поля.

a – эксперимент: Положение дискретных уровней по напряжению между стоком и истоком V_{SD} при постоянном напряжении на затворе $V_G = -7.1V$ одноэлектронного транзистора, синтезированного из наночастиц золота [10];
б – теория: Типичное расположение последовательности уровней энергии при изменении фазы магнитного потока ϕ/π со степенью беспорядка $W = 5$, полученное нами с помощью численного моделирования [5,16];
 толстые линии – кривизны уровней при нулевом потоке

Приведем сравнение с результатами экспериментальной работы для образцов Si:P, выполненной исследовательской группой университета г. Карлсруэ [15]. Ими была измерена проводимость при низких температурах в условиях мощного одноосного сжатия $S = 1.75$ kbar. График зависимости приведен на рис. 3. Он состоит из двух ветвей, что является прямой экспериментальной демонстрацией перехода проводник-изолятор. Как показано в [5], проводимость связана с откликом неупорядоченной системы на внешнее возбуждение.

В качестве отклика нами выбиралась вторая производная Гаулессовского сдвига уровня энергии по отношению к слабому магнитному потоку $K = \partial^2 E / \partial \phi^2$. Чтобы связать температуру с

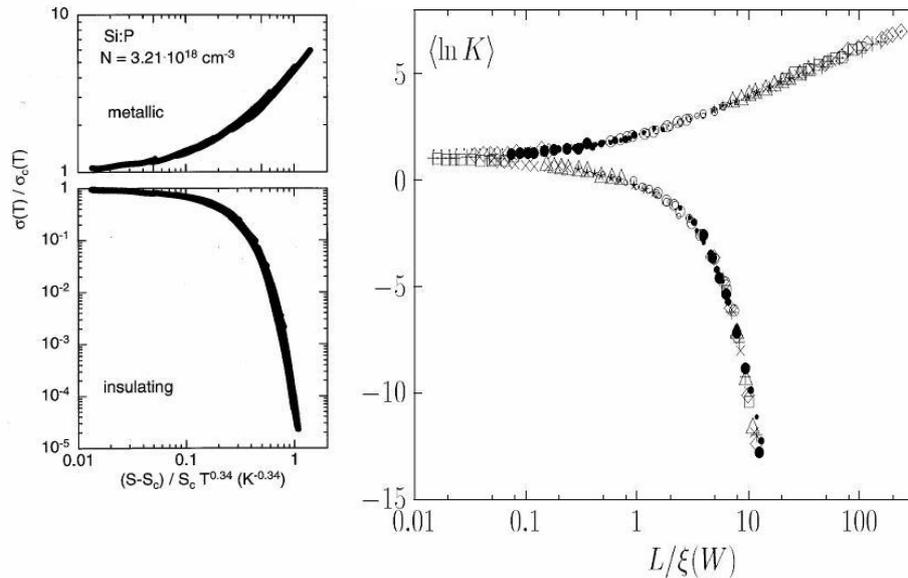


Рис. 3. Скейлинговая кривая проводимости для перехода проводник-изолятор. Слева – зависимость относительной проводимости для Si:P от приведенной температуры, взятая из экспериментальной работы [15]. Справа – зависимость проводимости по Таулессу от скейлингового параметра, определяемого от температуры, полученной в настоящей работе

нашим скейлинговым параметром, длина образца L в численном моделировании измерялась в единицах длины локализации $\xi(W(T))$. Данные для построения графика были взяты из работы автора [16].

На рис. 3 видно хорошее согласие между экспериментом и нашего теоретического подхода. Причем согласие наблюдается как на изолирующей стороне (нижняя ветвь), так и на металлической стороне (верхняя ветвь) перехода проводник-изолятор. Поскольку данные по осям откладывались в логарифмическом масштабе, ясно, что речь идет о совпадении с точностью до неизвестного коэффициента, который не учитывается в нашем теоретическом подходе.

Хорошее совпадение обнаружено также и для критического индекса длины локализации $\nu=1.43$, вычисленного нами [17], со значением $\nu_{\text{эксп}}=1.3$, измеренным на основе экспериментальных данных [15]. Хотя расхождение с теорией составляет около 10-12%, можно сделать заключение, что предложенная нами феноменологическая модель вполне приемлема для объяснения критического поведения проводимости на переходе металл-изолятор. При этом заданная область параметров в наших расчетах должна совпадать с условиями, при которых проводился эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Zharekeshev I.Kh., Kramer B. Scaling of level statistics at the disorder-induced metal-insulator transition // Phys. Rev. B. – 1995. – Vol. 51. – P. 17239-17242.
- 2 Zharekeshev I.Kh., Kramer B. Universal fluctuations in spectra of disordered systems at the Anderson transition // Japanese Journal of Applied Physics. – 1995. – Vol. 34 (8B). – P. 78-81.
- 3 Zharekeshev I.Kh., Kramer B. Scaling of level statistics at the metal-insulator transition // in book: Quantum Dynamics of Submicron Structures: NATO ASI Series. – Kluwer Academic Publishers, 1995. – P. 93-98.
- 4 Schweitzer L., Zharekeshev I.Kh. Critical level spacing distribution of two-dimensional disordered systems with spin-orbit coupling // J. Phys.: Condens. Matter. – 1995. – Vol. 7. – P. L377-L382.
- 5 Жарекешев И.Х. Электронная проводимость как отклик энергетического спектра на внешнее воздействие // Вестник КазНТУ им. К.И. Сатпаева. – 2010. – №4. – С. 208-213.
- 6 Zharekeshev I.Kh. Critical statistical ensembles in quantum nanosystems at the localization transition // Журнал проблем эволюции открытых систем. – 2010. – Т. 1, вып. 12. – С. 8-13.
- 7 Batsch M., Schweitzer L., Zharekeshev I. Kh., Kramer B. Kritische Level Statistik am Anderson-Uebergang fuer Systemen mit gebrochener Zeitumkehr-invarianz // Abstr. Tagung der DPG. – Regensburg, Germany 1996. – P. 2069.
- 8 Жарекешев И.Х. Непертурбативный подход к скейлингу конечного размера в эффекте Кондо // Вестник КазНУ. Серия физическая. – 2009. – Т. 31, № 4. – С. 51-55.

- 9 Schweitzer L., Zharekeshev I. Kh. Elektronische Eigenschaften am kritischen Punkt von zweidimensionalen ungeordneten Systemen mit symplektischer Symmetrie // Abstr. Tagung der DPG. – Regensburg, Germany 1996. – P. 1270-1271.
- 10 Kueemmeth F., Bolotin K.I., Shi S.-F., Ralph D.C. Measurement of discrete energy-level spectra in individual chemically-synthesized gold nanoparticles // Nano Lett. – 2008. – Vol. 8, N 12. – P. 4506–4512.
- 11 Пайерлс Р. Квантовая теория твердых тел: пер. с англ. – М.: ИЛ, 1956. – 476 с.
- 12 Zharekeshev I.Kh. Localization trajectory and critical index // Вестник КазНУ. Серия физическая. – 2010. – Т. 32, №1. – С. 51–55.
- 13 Жарекешев И.Х. Алгоритм деления для спектральных корреляций // Вестник КарГУ. Серия Физика. – 2010. – Т. 57, № 1. – С. 9-13.
- 14 Zharekeshev I.Kh. Parametric dynamics of spectra in the integer quantum hall effect // Abstr. Meeting of the American Physical Society. – Indianapolis, 2002. – P. B18.011.
- 15 Waffenschmidt S., Pfleiderer C., Loehneysen H.V. Critical behavior of the conductivity of Si:P at the metal-insulator transition under uniaxial stress // Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 83. – P. 3005-3008.
- 16 Zharekeshev I.Kh., Kramer B. Parametric motion of energy levels in quantum disordered systems // Physica A. – 1999. – Vol. 266. – P. 450-455.
- 17 Zharekeshev I.Kh., Kramer B. Asymptotics of Universal Probability of Neighboring Level Spacings at the Anderson Transition // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79. – P. 717-720.

И. Х. Жарекешев

РЕТТЕЛМЕГЕН ҚОСЫМША ЦЕНТР АРҚЫЛЫ ӨТКІЗГІШ-ИЗОЛЯТОРДЫҢ ФАЗАЛЫҚ АУЫСУЫ

Реттелмеген жүйе өткізгіштігі және энергия деңгейлерінің статистикасы айқындалған. Қосымша әлеует өзгерген кездегі электрондық деңгейлердің скэйлинг саны есептеледі. Реттелмеген қосымша центрден өткізгіш-изоляциярдың фазалық ауысуы зерттелген.

I. Kh. Zharekeshev

PHASE TRANSITION CONDUCTOR-INSULATOR INDUCED BY DISORDER OF IMPURITY CENTERS

A direct link between the electronic conductivity of disordered systems with the statistics of the energy levels at the metal-insulator transition is established. The scaling of the electron energy levels is calculated by changing the impurity potential. A good coincidence of our numerical simulation with experimental data has been obtained.

Key words: disordered systems, electronic transport, quantum localization.

*КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы*

Поступила 29.11.2011г.

А. Е. БЕКАЕВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МНОГОСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

Международный Казахско-Турецкий университет им. А. Ясави, Казахстан

Рассматривается цилиндр конечной длины, находящийся в осесимметричном напряженном состоянии. Получено аналитическое решение задачи напряженности цилиндра, которое можно использовать при решении задачи напряженно-деформированного состояния многослойных цилиндрических тел.

Использование многослойных конструкций из композиционных материалов открывает важный резерв прочности и оптимизации конструкций. При этом возникают новые задачи, обусловленные неоднородностью структуры конструкций. Поведение таких конструкций зависит от параметров (геометрических, физико-механических и др.) слоев, образующих их. Конструкции, имеющие форму слоистого цилиндра, находят широкое применение в авиационной, нефтяной и газовой промышленности [1-10] и др. Использование соотношений пространственной теории упругости к изучению таких конструкций позволяет получить более реальную картину напряженно-деформированного состояния. Ниже рассматривается цилиндр, находящийся в осесимметричном напряженном состоянии, который можно рассмотреть как один из слоев цилиндрической конструкции.

Рассматривается полый цилиндр конечной длины ℓ с внутренним $r = a$, внешним $r = b$ радиусами. Материал цилиндра изотропный и упругий.

На внутренней и внешней поверхностях заданы

$$\begin{aligned} \sigma_r = q(z), \quad \sigma_{rz} = t(z) \quad \text{при } r = a, \\ u = u(z), \quad w = w(z) \quad \text{при } r = b. \end{aligned} \quad (1)$$

На торцах цилиндра рассматриваются следующие граничные условия

$$U = w = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad z = \ell. \quad (2)$$

Уравнение равновесия [11] сводится к уравнению относительно u_1

$$\Delta \Delta u_1 + 2\Delta \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial \eta^4} = 0, \quad (3)$$

где

$$\Delta(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2}. \quad (4)$$

При этом функция u_3 определяется двумя квадратурами

$$u_3 = - \iint \left[2(1-\nu) \Delta u_1 + (1-2\nu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \right] d\xi d\eta + f_1^*(\eta) + f_2^*(\xi), \quad (5)$$

где $f_1^*(\eta)$, $f_2^*(\xi)$ – произвольные функции интегрирования.

Здесь введены следующие безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{r}{b}, \quad \eta = \frac{z}{\ell}, \quad u_1 = \frac{u}{b}, \quad u_3 = \frac{w}{b}. \quad (6)$$

Решение уравнения (3) отыскивается в виде суммы четырех решений

$$u_1 = f^{(1)}(\xi) e^{\lambda \eta} + f^{(2)}(\xi) e^{-\lambda \eta} + f^{(3)}(\xi) \cos \lambda \eta + f^{(4)}(\xi) \sin \lambda \eta, \quad (7)$$

в котором $f^{(i)}(\xi)$ – неизвестные функции; λ – некоторое действительное число.

Для определения функций $f^{(i)}(\xi)$ получается

$$\Delta \Delta f^{(i)} + 2k_i \lambda^2 \Delta f^{(i)} + \lambda^4 f^{(i)} = 0, \quad (8)$$

в которых $k_i = 1$ при $i = 1, 2$, и $k_i = -1$ при $i = 3, 4$.

Если учесть (4), то уравнение (8) можно привести к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} + \kappa_i \lambda^2\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} + \kappa_i \lambda^2\right) f^{(i)} = 0. \quad (9)$$

Если провести замену

$$x = \lambda \xi, \quad (10)$$

то при условии, что λ отлично от нуля, уравнение (9) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + \kappa_i\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + \kappa_i\right) f^{(i)}(x) = 0. \quad (11)$$

Линейно-независимые решения уравнения Бесселя ($\kappa_i=1$) и модифицированного уравнения Бесселя ($\kappa_i=-1$) первого рода

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + \kappa_i\right) f^{(i)}(x) = 0 \quad (12)$$

даются функциями Бесселя действительного (I_1, Y_1 при $\kappa_i = 1$) и мнимого (\dot{I}_1, K_1 при $\kappa_i = -1$) аргументов [12].

Два других решения (11) при определенном κ_i следует искать как частные решения уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + 1\right) \tilde{f}^{(i)}(x) = C_1 I_1(x) + C_2 Y_1(x), \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} - 1\right) \tilde{f}^{(i)}(x) = C_3 \dot{I}_1(x) + C_4 K_1(x). \quad (14)$$

Методом вариации произвольных постоянных [13] можно получить, что

$$f^{(i)}(x) = C_1^i I_1 + C_2^i Y_1 + C_3^i \left(-I_1 \int_{x_1}^x x I_1 Y_1 dx + Y_1 \int_{x_1}^x x I_1^2 dx\right) + C_4^i \left(-I_1 \int_{x_1}^x x Y_1^2 dx + Y_1 \int_{x_1}^x x I_1 Y_1 dx\right) \quad (15)$$

при $i = 1, 2$.

$$f^{(i)}(x) = C_1^i \dot{I}_1 + C_2^i K_1 + C_3^i \left(\dot{I}_1 \int_{x_1}^x x \dot{I}_1 K_1 dx - K_1 \int_{x_1}^x x \dot{I}_1^2 dx\right) + C_4^i \left(\dot{I}_1 \int_{x_1}^x x K_1^2 dx - K_1 \int_{x_1}^x x \dot{I}_1 K_1 dx\right) \quad (16)$$

при $i = 3, 4$.

Таким образом, решение уравнения (9) может быть записано в виде

$$f^{(i)}(\xi) = f^{(i)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=1}^4 C_k^i \psi^k(x), \quad (17)$$

в котором

$$\begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & -I_1 \int_{x_1}^x x I_1 Y_1 dx + Y_1 \int_{x_1}^x x I_1^2 dx \\ Y_1 & -I_1 \int_{x_1}^x x Y_1^2 dx + Y_1 \int_{x_1}^x x I_1 Y_1 dx \end{bmatrix} \quad (18)$$

при $i = 1, 2$ и

$$\begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & I_1 \int_{x_1}^x x I_1 K_1 dx - K_1 \int_{x_1}^x x I_1^2 dx \\ K_1 & I_1 \int_{x_1}^x x K_1^2 dx - K_1 \int_{x_1}^x x I_1 K_1 dx \end{bmatrix} \quad (19)$$

при $i = 3, 4$.

Тогда

$$u_1 = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_k^i \varphi_i(\lambda \eta) \psi^k(x), \quad (20)$$

где $\varphi_i(\lambda \eta)$ – базисные функции

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (e^{\lambda \eta}, e^{-\lambda \eta}, \cos \lambda \eta, \sin \lambda \eta). \quad (21)$$

При этом продольная компонента перемещения u_3 записывается в виде

$$u_3 = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_k^i k_i \dot{\varphi}_i(\lambda \eta) g^k(x) + f_1^*(\eta) + f_2^*\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad (22)$$

где под $\dot{\varphi}(\lambda \eta)$ подразумевается производная этой функции по η .

Для реализации единственности решения задачи с однородными граничными условиями на торцах $z = 0, z = \ell$ ($\eta = 0, \eta = \eta_1$) необходимо наложить на функцию $f_1^*(\eta)$ условие

$$f_1^*(\eta) \equiv 0. \quad (23)$$

Вторую произвольную функцию интегрирования $f_2^*(x)$ удобно отыскивать в виде

$$f_2^*(x) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 k_i A_k^i g^k(x), \quad (24)$$

где A_k^i – постоянные числа, подлежащие определению.

При условиях (23), (24) продольная компонента перемещения u_3 записывается в виде

$$u_3 = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 k_i [C_k^i \dot{\varphi}_i(\lambda \eta) - A_k^i] g^k(x). \quad (25)$$

В полученные соотношения входят неизвестные постоянные C_k^i , которые должны быть определены из граничных условий на боковых поверхностях цилиндра. Граничные условия на торцах цилиндра позволяют конкретизировать неизвестный параметр λ .

При условиях (2) полученные решения должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_k^i \varphi_i(\lambda * 0) \psi^k(x) = 0, \quad (26)$$

$$\sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_k^i \varphi_i(\lambda \eta_1) \psi^k(x) = 0,$$

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 k_i [C_k^i \dot{\varphi}_i(\lambda * 0) - A_k^i] g^k(x) = 0, \quad (27)$$

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 k_i [C_k^i \dot{\varphi}_i(\lambda \eta_1) - A_k^i] g^k(x) = 0.$$

Так как функции $\psi^k(x)$, $g^k(x)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) являются линейно независимыми, а системы уравнений (26), (27) должны удовлетворяться в произвольной точке x по радиусу торцевого сечения цилиндра, то для выполнения указанных условий необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при каждой из указанных функций обращались в нуль. Если кроме указанного обстоятельства учитывать, что функции $\psi^k(x)$, $g^k(x)$ попарно равны при $i = 1, 2$ и $i = 3, 4$, то можно получить системы уравнений относительно неизвестных постоянных C_k^i

$$C_k^1 + C_k^2 = 0,$$

$$C_k^1 e^{\lambda \eta_1} + C_k^2 e^{-\lambda \eta_1} = 0, \quad (28)$$

$$\lambda(C_k^1 - C_k^2) - A_k^1 - A_k^2 = 0.$$

$$\lambda(C_k^1 e^{\lambda \eta_1} - C_k^2 e^{-\lambda \eta_1}) - A_k^1 - A_k^2 = 0,$$

$k = 1, 2, 3, 4$ при $i = 1, 2$ и

$$\begin{aligned} C_k^3 &= 0, \\ C_k^3 \cos \lambda \eta_1 + C_k^4 \sin \lambda \eta_1 &= 0, \\ \lambda C_k^4 - A_k^3 - A_k^4 &= 0, \\ -\lambda(C_k^3 \sin \lambda \eta_1 - C_k^4 \cos \lambda \eta_1) - A_k^3 - A_k^4 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$k = 1, 2, 3, 4$ при $i = 3, 4$.

Однородная система уравнений (28) имеет только нулевое решение

$$C_k^1 = C_k^2 = A_k^1 = A_k^2 = 0. \quad (30)$$

Система уравнений (29) может иметь ненулевое решение, если

$$\sin \lambda \eta_1 = 0, \quad (31)$$

то есть при значениях параметра λ , равных

$$\lambda = \lambda_j = \frac{j\pi}{\eta_1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (32)$$

При указанных условиях последние два уравнения (29) совпадают, если только

$$\cos \lambda \eta_1 = 1. \quad (33)$$

Откуда следует, что значения j в (30) должны быть только четными. Таким образом,

$$\lambda = \lambda_j = \frac{2j\pi}{\eta_1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (34)$$

Если λ выбрано из соотношения (34), то, полагая постоянные A_k^3 , A_k^4 равными, можно получить

$$A_k^3 = A_k^4 = \frac{1}{2} \lambda C_k^4. \quad (35)$$

Таким образом, при однородных в смысле перемещения условиях на торцах цилиндра частное решение для радиального перемещения получается в виде

$$u_1 = \sum_{k=1}^4 C_k^4 \sin(\lambda_j \eta) \psi^k(x). \quad (36)$$

Общее решение найдется как суперпозиция решений вида (36), то есть

$$u_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_k^j \psi^k(x) \sin(\lambda_j \eta). \quad (37)$$

Если радиальная компонента перемещения u_1 определяется из (37), то продольная компонента перемещения u_3 в силу (35) принимает вид

$$u_3 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_k^j (\cos \lambda_j \eta - 1) g^k(x). \quad (38)$$

Компоненты деформации и напряжений определяются

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_k^j \lambda_j \begin{bmatrix} \frac{d\psi^k}{dx} \\ \frac{\psi^k}{x} \\ -g^k \end{bmatrix} \sin \lambda_j \eta, \\ \varepsilon_{rz} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 [C_k^{*j}(\lambda_j \cos(\lambda_j \eta) - 1) + C_k^j] \psi^k, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$C_k^{*j} = 2 \left[C_k^j + (1-\nu) C_{k+2}^j (\delta_3^{k+2} + \delta_4^{k+2}) \right], \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \tilde{\sigma}_\varphi \\ \sigma_\eta \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 C_k^j \lambda_j \begin{bmatrix} S_\xi^k \\ S_\varphi^k \\ S_\eta^k \end{bmatrix} \sin(\lambda_j \eta), \quad (41)$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^4 [C_k^{*j} (\lambda_j \cos(\lambda_j \eta) - 1) + C_k^j] \nu^k.$$

σ_i^j – символ Кронекера. Построенное решение для цилиндра конечной длины предполагает, что на наружной радиальной поверхности в качестве граничных условий используются перемещения (см. условие (1)). Этими перемещениями могут быть перемещения другого цилиндра, окружающего исследуемый цилиндр. Поэтому полученные решения можно использовать в контексте с изучением поведения других слоев слоистого цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. – Новосибирск, Наука, 2001. – 287 с.
- 2 Галеркин Б.Г. Упругое равновесие полого кругового цилиндра и части цилиндра // Изв. НИГИ. – 1933. – Т. 10. – С. 5-9.
- 3 Бухаринов Г.Н. Осесимметричная деформация цилиндра конечной длины // Вестник ЛГУ. – 1956. – № 7. – С. 77-87.
- 4 Байда Э.Н. Общее решение задачи об упруго-деформируемом состоянии слоистого и полого цилиндра // Научные доклады высшей школы. – 1959. – № 2. – С. 37-41.
- 5 Гринченко В.Г. Осесимметричная теория упругости для толстого цилиндра конечной длины // Прикладная механика. – 1967. – Т. 3, № 8. – С. 98-102.
- 6 Васильев Ю.Н. Приближенное решение осесимметричной задачи теории упругости для полого конечного цилиндра // Вестник МГУ. – 1970. – № 1. – С. 90-97.
- 7 Григоренко Я.М., Крюков Н.И. Исследование несимметричного НДС трансверсально-изотропных цилиндров при различных граничных условиях // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 7. – С. 3-10.
- 8 Олегин И.П. Определение напряженного состояния в трансверсально-изотропных цилиндрических телах // Научный вестник НГТУ. – 2001. – № 2. – С. 95-104.
- 9 Абрамян Б.Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра // Докл. АН АрмССР. – 1958. – Т. 26, № 2. – С. 61-70.
- 10 Васильев В.В., Лурье С.А. Осесимметричная задача теории упругости для ортотропного цилиндра конечной длины // Механика и научно-технический прогресс. МДТТ. – Т. 3. – М.: Наука, 1988. – С. 181-196.
- 11 Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
- 12 Кузмин Р.О. Бесселевы функции. – Л.-М.: ГРОЛ, 1935. – 249 с.
- 13 Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Вш, 1963.

А. Е. Бекаев

КӨП ҚАБАТТЫ ЦИЛИНДРДІҢ БІР ЕСЕБІ ТУРАЛЫ

Осесимметриялық күйде орналасқан шекті ұзындықты цилиндр қарастырылған. Бұл мақалада көп қабатты цилиндрдің кернеу күйінің аналитикалық шешімі алынған.

А. Е. Bekayev

ABOUT ONE PROBLEM OF THE MULTILAYERED CYLINDER

A cylinder of finite length in axial symmetric tension is considered. Analytical solution of the problem about intensity of the cylinder is received; this solution can be used when solving the problem about deformation tension of multilayered cylindrical body.

Д. С. ДЖУМАБАЕВ, Е. БОЛГАНИСОВ

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Институт математики МОН РК, г. Алматы,
колледж при Казахском университете путей сообщения, г. Алматы

Построен алгоритм нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений с параметрами при импульсных воздействиях. Установлены условия сходимости алгоритма и критерий однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями часто встречаются в задачах приложения. При этом, как правило, дифференциальные уравнения содержат неизвестные параметры, характеризующие определенные свойства, описываемого процесса.

В работе рассматривается линейная двухточечная краевая задача с параметром для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых в фиксированные моменты подвержены импульсным воздействиям:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\mu + f(t), \quad t \in [0, T] \setminus \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}, \quad (1)$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m < \theta_{m+1} = T, \quad x, \mu \in R^n, \\ x(0) = x^0, \quad x(T) = x^1, \quad (2)$$

$$B_i x(\theta_i - 0) - C_i x(\theta_i + 0) = p_i, \quad p_i \in R^n, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где $A(t), B(t), f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, $\|x\| = \max_{i=1, n} |x_i|$, $\|A(t)\| = \max_{i=1, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)|$.

Решением задачи (1)–(3) является пара $(\mu^*, x^*(t))$. Задачу (1)–(3) можно также рассматривать как задачу управления для системы дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями.

Краевая задача с параметром (1), (2) при отсутствии импульсных воздействий различными методами исследованы многими авторами [1–6].

Целью настоящей работы является нахождение коэффициентных признаков однозначной разрешимости задачи (1)–(3) и построение алгоритмов нахождения ее решения. С этой целью к задаче (1)–(3) применяется метод параметризации [7].

Интервал $\{0, T\}$ разобьем на части с точками, где решения подвергаются импульсным воздействиям: $[0, T] = \bigcup_{r=1}^{m+1} [\theta_{r-1}, \theta_r)$. Сужение вектор-функции $x(t)$ на r -ый интервал $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t) = x(t)$, $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$. Введем дополнительные параметры $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = x_2(\theta_1)$, ..., $\lambda_{m+1} = x_{m+1}(\theta_m)$ и на каждом интервале $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ производим замену функции: $u_1(t) = x_1(t) - x^0$, $t \in [\theta_0, \theta_1)$, $u_2(t) = x_2(t) - \lambda_2$, $t \in [\theta_1, \theta_2)$, ..., $u_{m+1}(t) = x_{m+1}(t) - \lambda_{m+1}$, $t \in [\theta_m, \theta_{m+1})$.

Тогда исходная задача (1)–(3) перейдет к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_1}{dt} = A(t)u_1 + A(t)x^0 + B(t)\lambda_1 + f(t), \quad t \in [\theta_0, \theta_1), \quad (4)$$

$$u_1(0) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{du_s}{dt} = A(t)(u_s + \lambda_s) + B(t)\lambda_1 + f(t), \quad t \in [\theta_{s-1}, \theta_s), \quad (6)$$

$$u_s(\theta_{s-1}) = 0 \quad s = \overline{2, m+1}, \quad (7)$$

$$\lambda_{m+1} + \lim_{t \rightarrow T-0} u_{m+1}(t) = x^1, \quad (8)$$

$$B_1 \left[x^0 + \lim_{t \rightarrow \theta_1-0} u_1(t) \right] - C_1 \lambda_2 = p_1, \quad (9)$$

$$B_s \left[\lambda_s + \lim_{t \rightarrow \theta_s-0} u_s(t) \right] - C_s \lambda_{s+1} = p_s, \quad s = \overline{2, m}. \quad (10)$$

Пусть система пар $(\lambda_r^*, u_r^*(t))$, $r = \overline{1, m+1}$ – решение задачи (4)–(10). Функцию $x^*(t)$ определим равенствами: $x^*(t) = u_1^*(t) + x^0$, $t \in [\theta_0, \theta_1)$, $x^*(t) = u_s^*(t) + \lambda_s^*$, $t \in [\theta_{s-1}, \theta_s)$, $s = \overline{2, m+1}$, $x^*(T) = \lambda_{m+1}^* + \lim_{t \rightarrow T-0} u_{m+1}^*(t)$. Тогда пара $(\mu^*, x^*(t))$, где $\mu^* = \lambda_1^*$, будет решением исходной краевой задачи (1)–(3).

Здесь введение дополнительных параметров и замена функции на каждом интервале позволили получить начальные данные (5), (7).

При фиксированных значениях параметров λ_r , $r = \overline{1, m+1}$ задачи Коши (4)–(7) эквивалентны интегральным уравнениям

$$u_1(t) = \int_0^t A(\tau)u_1(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)d\tau \cdot x^0 + \int_0^t B(\tau)d\tau \cdot \lambda_1 + \int_0^t f(\tau)d\tau, \quad t \in [0, \theta_1), \quad (11)$$

$$u_s(t) = \int_{\theta_{s-1}}^t A(\tau)u_1(\tau)d\tau + \int_{\theta_{s-1}}^t A(\tau)d\tau \cdot \lambda_s + \int_{\theta_{s-1}}^t B(\tau)d\tau \cdot \lambda_1 + \int_{\theta_{s-1}}^t f(\tau)d\tau, \quad t \in [\theta_{s-1}, \theta_s), \quad s = \overline{2, m+1}, \quad (12)$$

Подставив вместо $u_r(\tau)$ соответствующую правую часть и повторив этот процесс ν раз получим следующие представления функции $u_r(t)$, $r = \overline{1, m+1}$:

$$u_1(t) = G_{\nu,1}(u, t) + \tilde{B}_{\nu,1}(t) \cdot \lambda_1 + \tilde{f}_{\nu,1}(t), \quad t \in [0, \theta_1), \quad (13)$$

$$u_s(t) = G_{\nu,s}(u, t) + \tilde{B}_{\nu,s}(t) \cdot \lambda_1 + \tilde{A}_{\nu,s}(t) \cdot \lambda_s + \tilde{f}_{\nu,s}(t), \quad t \in [\theta_{s-1}, \theta_s), \quad s = \overline{2, m+1}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{\nu,r}(t) &= \int_{\theta_{r-1}}^t B(\tau_1)d\tau_1 + \int_{\theta_{r-1}}^t A(\tau_1) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_1} B(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \\ &+ \int_{\theta_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} B(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1, \quad r = \overline{1, m+1}, \\ \tilde{A}_{\nu,s}(t) &= \int_{\theta_{s-1}}^t A(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int_{\theta_{s-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{\theta_{s-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{\theta_{s-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1, \quad s = \overline{2, m+1}, \\ \tilde{f}_{\nu,1}(t) &= \int_0^t [A(\tau_1)x^0 + f(\tau_1)]d\tau_1 + \int_0^t A(\tau_1) \int_0^{\tau_1} [A(\tau_2)x^0 + f(\tau_2)]d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \\ &+ \int_0^t A(\tau_1) \dots \int_0^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_0^{\tau_{\nu-1}} [A(\tau_\nu)x^0 + f(\tau_\nu)]d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{v,s}(t) &= \int_{\theta_{s-1}}^t f(\tau_1) d\tau_1 + \int_{\theta_{s-1}}^t A(\tau_1) \int_{\theta_{s-1}}^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \dots + \\ &+ \int_{\theta_{s-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{\theta_{s-1}}^{\tau_{v-2}} A(\tau_{v-1}) \int_{\theta_{s-1}}^{\tau_{v-1}} f(\tau_v) d\tau_v d\tau_{v-1} \dots d\tau_1, \\ G_{v,r}(u, t) &= \int_{\theta_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{\theta_{r-1}}^{\tau_{v-1}} A(\tau_v) u_r(\tau_v) d\tau_v d\tau_{v-1} \dots d\tau_1, \quad r = \overline{1, m+1}. \end{aligned}$$

Из (13), (14) определим $\lim_{t \rightarrow T-0} u_{m+1}(t)$, $\lim_{t \rightarrow \theta_s-0} u_s(t)$, $s = \overline{1, m}$. Подставим им соответствующие выражения в краевое условие (8) и условия импульсных воздействий (9), (10). Тогда относительно параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}$ получим систему линейных уравнений

$$Q_v(\theta)\lambda = -F_v(\theta) - G_v(u, \theta), \quad \lambda \in R^{n(m+1)} \quad (15)$$

с $n(m+1) \times n(m+1)$ матрицей

$$Q_v(\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{v,m+1}(\theta_{m+1}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I + \tilde{A}_{v,m+1}(\theta_{m+1}) \\ B_1 \tilde{B}_{v,1}(\theta_1) & -C_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ B_2 \tilde{B}_{v,2}(\theta_2) & B_2 [I + \tilde{A}_{v,2}(\theta_2)] & -C_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_m \tilde{B}_{v,m}(\theta_m) & 0 & 0 & \dots & 0 & B_m [I + \tilde{A}_{v,m}(\theta_m)] & -C_m \end{pmatrix},$$

и правой частью

$$\begin{aligned} F_v(\theta) &= (-x^1 + \tilde{f}_{v,m+1}(\theta_{m+1}), B_1 \tilde{f}_{v,1}(\theta_1), B_2 \tilde{f}_{v,2}(\theta_2), \dots, B_m \tilde{f}_{v,m}(\theta_m)), \\ G_v(u, \theta) &= (G_{v,m+1}(u, \theta_{m+1}), B_1 G_{v,1}(u, \theta_1), B_2 G_{v,2}(u, \theta_2), \dots, B_m G_{v,m}(u, \theta_m)). \end{aligned}$$

Систему пар $(\lambda_r, u_r(t))$, $r = \overline{1, m+1}$ – решение краевой задачи с параметрами (4)–(10) определим с помощью следующего алгоритма:

0-шаг. а) Предполагая, что матрица $Q_v(\theta): R^{n(m+1)} \rightarrow R^{n(m+1)}$ обратима, начальное приближение по параметру – $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_{m+1}^{(0)})$ найдем как решение систем линейных уравнений $Q_v(\theta)\lambda = -F_v(\theta)$, $\lambda \in R^{n(m+1)}$. б) При найденных значениях параметров $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r = \overline{1, m+1}$ решая задачи Коши (4)–(7) определим систему функций $u_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1, m+1}$.

1-шаг. а) Подставив $u_r^{(0)}(t)$ в правую часть (15) следующее приближение по параметру – $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_{m+1}^{(1)})$ найдем из систем линейных уравнений $Q_v(\theta)\lambda = -F_v(\theta) - G_v(u^{(0)}, \theta)$, $\lambda \in R^{n(m+1)}$. б) Решая задачи Коши (4)–(7) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, $r = \overline{1, m+1}$ определим систему функций $u_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1, m+1}$.

Продолжая этот процесс на k -ом шаге алгоритма найдем систему пар $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$, $r = \overline{1, m+1}$.

Обратимость матрицы $Q_v(\theta)$ при выбранном $v \in N$ обеспечивает осуществимость предлагаемого алгоритма. Достаточные условия сходимости алгоритма устанавливает

Теорема 1. Если при некотором $v \in N$ матрица $Q_v(\theta): R^{n(m+1)} \rightarrow R^{n(m+1)}$ обратима и выполняется неравенство

$$q_\nu(\theta) = \left\| [Q_\nu(\theta)]^{-1} \right\| \max \left(1, \max_{s=1, m} \|B_s\| \right) \times \\ \times \max_{r=1, m+1} \left\{ e^{\alpha(\theta_r - \theta_{r-1})} - 1 - \alpha(\theta_r - \theta_{r-1}) - \dots - \frac{[\alpha(\theta_r - \theta_{r-1})]^\nu}{\nu!} \right\} < 1, \quad (16)$$

где $\alpha = \max_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$.

Тогда последовательность систем пар $(\lambda_r^{(k)}, u_r^{(k)}(t))$, $r = \overline{1, m+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, определяемая алгоритмом сходится к системе пар $(\lambda_r^*, u_r^*(t))$, $r = \overline{1, m+1}$ – единственному решению краевой задачи с параметрами (4)–(10).

Определение. Краевая задача с параметром (1) – (3) называется однозначно разрешимой, если для любой непрерывной на $[0, T]$ функций $f(t)$, любых x^0, x^1, p_i , $i = \overline{1, m}$, она имеет единственное решение $(\mu^*, x^*(t))$.

Так как задача (1)–(3) и (4)–(10) эквивалентны, то условие теоремы 1 обеспечивает однозначную разрешимость исходной краевой задачи с параметром (1)–(3).

Следующее утверждение устанавливает необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3).

Теорема 2. Задача (1)–(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда найдется $\nu \in N$ такое, что матрица $Q_\nu(\theta) : R^{n(m+1)} \rightarrow R^{n(m+1)}$ обратима и выполняется неравенство (16).

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Kibenko A.V., Perov A.I. O dvukhtocheynoi kraevoi zadache s parametrom // Uchenye zapiski AGU im. S.M. Kirova. Ser. fiz.-mat. i khim. nauk. – 1961. – № 3. – С. 21-30.
- 2 Kibenko A.V., Perov A.I. Nekotorye teoremy sushchestvovaniya dlia dvukhtocheynoi kraevoi zadachi s parametrom // Trudi seminarov po funktsionalnomu analizu. – 1963. – Вып. 7. – С. 52-58.
- 3 Kibenko A.V. Metod posledovatel'nykh priblizhenii v dvukhtocheynoi kraevoi zadache dlia uravneniya s parametrom // Uchenye zapiski AGU im. S. M. Kirova. Ser. fiz.-mat. i khim. nauk. – 1961. – № 6. – С. 13-21.
- 4 Goma I.A. Metod posledovatel'nykh priblizhenii v dvukhtocheynoi kraevoi zadache dlia uravneniya s parametrom // Ukr. matem. zhurn. – 1977. – Т. 29, № 6. – С. 800-807.
- 5 Eidel'man Yu.S. Kraevaya zadacha dlia differentsial'nogo uravneniya s parametrom // Dif.uravn. – 1978. – Т. 14, № 7. – С. 1335-1337.
- 6 Dzhumabaev D.S. Neobkhodimye i dostatochnye uslovia sushchestvovaniya reshenii kraevykh zadach s parametrom // Izv. AN KazSSR. Ser. fiz.-mat. – 1979. – № 3. – С. 5-12.
- 7 Dzhumabaev D.S. Priznaki odnoznachnoi razreshimosti lineinoi kraevoi zadachi dlia obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya // Zhurnal vych. matem. i matem. fiziki. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.

Д. С. Жұмбаев, Е. Болганысов

ПАРАМЕТРЛЕРІ БАР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ИМПУЛЬСТІК ӘСЕРЛЕРІ БОЛҒАНДАҒЫ БІРМӘНДІ ШЕШІЛІМДІЛІГІ

Параметрлері бар дифференциалдық тендеулер жүйесі үшін шеттік есептің импульстік әсерлері болғандағы шешімін табудың алгоритмі құрылған. Алгоритмнің жинақтылығы шарттары мен қарастырылып отырған есептің бірімәнді шешілімділігінің критеріі тағайындалған.

D. S. Dzhumabaev, E. Bolganisov

UNIQUE SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PARAMETERS UNDER IMPULSE EFFECTS

The algorithm of finding a solution of linear two point boundary value problem for the system of differential equations with parameters under impulse effects is constructed. The conditions of converge for the algorithm and criterion of unique solvability for considering problem are established.

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

<i>Даирбаева Г., Темирбекова Л. Н.</i> Численное решение уравнения Гельфанда-Левитана на основе метода сингулярного разложения и оптимизации.....	3
<i>Хаджиева Л.А., Умбеткулова А.Б.</i> Об анализе нелинейных колебаний буровых штанг с конечными деформациями.....	10

Математическая физика

<i>Динейхан М., Сайдуллаева Г.Г., Хабыл Н.</i> Определение свойств экзотических мезонов с учетом релятивистического характера взаимодействия.....	15
<i>Dineyghan M., Sangaa D., Belushkin A.V., Aznabayev D.T., Mukhametuly B.</i> Neutron scattering for condensed matter Science.....	21

Теоретические и экспериментальные исследования

<i>Литвиненко Г.Г., Литвиненко Н.Г., Мукашев Н.З.</i> О практическом построении уравнений, описывающих зависимость удельной скорости роста микроорганизмов от различных факторов среды.....	26
<i>Жарекешев И.Х.</i> Фазовый переход проводник-изолятор, вызванный разупорядочением примесных центров.....	34
<i>Бекаев А.Е.</i> Об одной задаче многослойного цилиндра.....	39
<i>Джумабаев Д.С., Болганисов Е.</i> Однозначная разрешимость краевой задачи для систем дифференциальных уравнений с параметрами при импульсных воздействиях.....	44

Редакторы *М. С. Ахметова, Ж. М. Нургожина*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 27.02.2012.
Формат 60x88¹/₈. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
3,0 п.л. Тираж 300. Заказ 1.