

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ**



**СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ**



**SERIES  
OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL**

**5 (285)**

**ҚЫРКҮЙЕК–ҚАЗАН 2012 ж.  
СЕНТЯБРЬ–ОКТЯБРЬ 2012 г.  
SEPTEMBER – OCTOBER 2012**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Бас редактор  
ҚР ҰҒА академигі  
**Б. Т. Жұмағұлов**

Редакция алқасы:

физика-математика ғылымдарының докторы **Н. М. Темірбеков** (бас редактордың орынбасары), ҚР ҰҒА-ның академиктері **Н. Ж. Тәкібаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Калменов, Н. Қ. Блиев, Б. Н. Мұқашев, М. Ө. Өтелбаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Қ. Қ. Қадыржанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Н. Т. Данаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Т. С. Рамазанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Ө. Ө. Өмірбаев**, химия ғылымдарының докторы **Н. Бейсен** (жауапты хатшы)

Главный редактор  
академик НАН РК  
**Б. Т. Жумагулов**

Редакционная коллегия:

доктор физико-математических наук **Н. М. Темірбеков** (заместитель главного редактора), академики НАН РК **Н. Ж. Такибаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кальменов, Н. К. Блиев, Б. Н. Мукашев, М. О. Отелбаев**, доктор физико-математических наук **К. К. Кадыржанов**, доктор физико-математических наук **Н. Т. Данаев**, доктор физико-математических наук **Т. С. Рамазанов**, доктор физико-математических наук **У. У. Умирбаев**, доктор химических наук **Н. Бейсен** (ответственный секретарь)

Editor-in-chief  
academician of the NAS of the RK  
**B. T. Zhumagulov**

Editorial staff:

doctor of physical and mathematical sciences **N.M. Temirbekov** (deputy editor-in-chief), academicians of the NAS of the RK **N. Zh. Takibayev, S. N. Harin, T. Sh. Kalmenov, N. K. Bliiev, B. N. Mukashev, M. O. Otelbaev**, doctor of physical and mathematical sciences **K. K. Kadirzhanov**, doctor of physical and mathematical sciences **N. T. Danaev**, doctor of physical and mathematical sciences **T. S. Ramazanov**, doctor of physical and mathematical sciences **U. U. Umirbaev**, doctor of chemical sciences **N. Beysen** (secretary)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая» I ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 218–220, тел.: 272-13-19, 272-13-18.

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

УДК 536.46:532.517.4

А. С. АСКАРОВА, С. А. БОЛЕГЕНОВА, В. Ю. МАКСИМОВ,  
А. БЕКМУХАМЕТ, М. Т. БЕКЕТАЕВА, Ш. С. ОСПАНОВА

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДИСПЕРСИИ И ГОРЕНИЯ ЖИДКИХ ТОПЛИВ

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

*Исследовано процессов дисперсии и горения впрысков жидких топлив для оптимальных параметров сжигания жидкого топлива при наличии турбулентности и с учетом образования и окисления сажи в камере сгорания методами математического моделирования.*

Моделирование образования дисперсии неизотермических впрысков жидких топлив в развитой турбулентности является актуальным в связи с широким использованием распыленного жидкого топлива (автомобильного, авиационного, дизельного и ракетного) в различных двигателях.

Горение жидких топлив отличается рядом специфических особенностей, обусловленных протеканием химических реакций в условиях динамического и теплового взаимодействия реагентов, интенсивного массопереноса при фазовых превращениях, а также зависимостью параметров процесса, как от термодинамического состояния системы, так и от ее структурных характеристик. Многообразие и сложность указанных факторов создают известные трудности при разработке полноценной теории. Существенные результаты в этом направлении могут быть получены на основе последовательного приложения методов механики гетерогенных систем к описанию процессов горения двухфазных сред.

Ниже приведены результаты численного моделирования по горению впрысков жидких топлив для оптимальных масс и скоростей впрыска и температуры газа в камере сгорания. Рис. 5 показывает дисперсию и распределение температур капель для трех топлив в камере сгорания при оптимальных массах и скоростей впрыска и температурах газа. На рис. 1–4 приведены графики изменения со временем (1,1 мс, 1,8 мс, 3 мс, 4 мс) температуры и концентрации паров топлива в камере сгорания при сжигании бензина. Данные получены для оптимальных параметров этого вида топлива [1, 2].

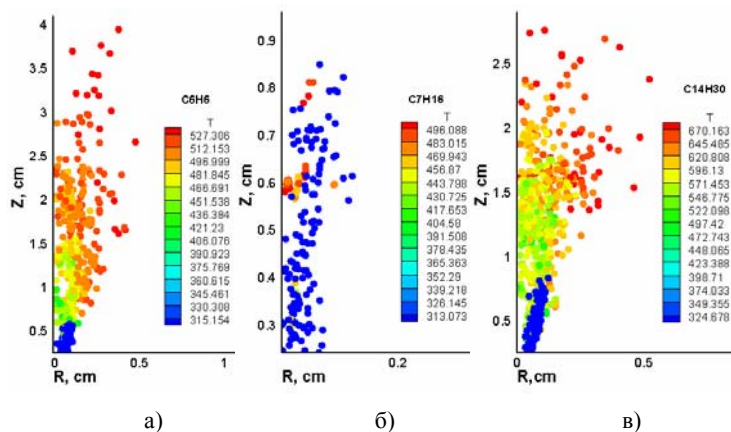


Рис. 1. Капли жидких топлив при оптимальных параметрах:  
а) бензин, б) гептан, в) тетрадекан

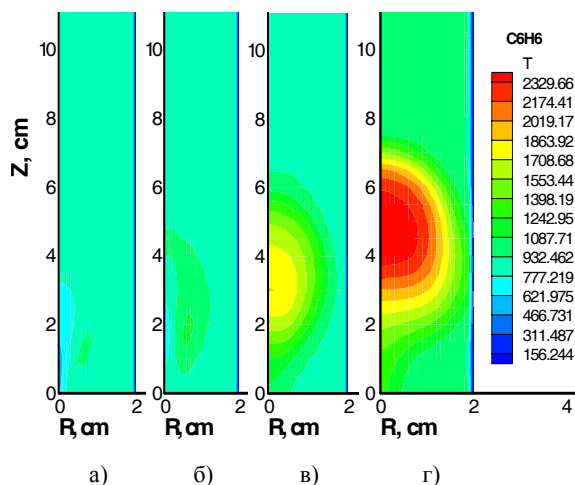


Рис. 2. Температура в камере сгорания при горении бензина в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

Анализ рис. 2 показывает изменение температуры в камере сгорания для бензина. Можно заметить, что область максимальных температур (ядро факела) достигает 6,5 см по высоте камеры сгорания, вся остальная часть камеры разогревается до 1300 К.

На следующем рис. 3 можно наблюдать, как меняется концентрация паров бензина с течением времени: от максимального значения в области до 4 см по высоте камеры сгорания до нуля в конечный момент времени.

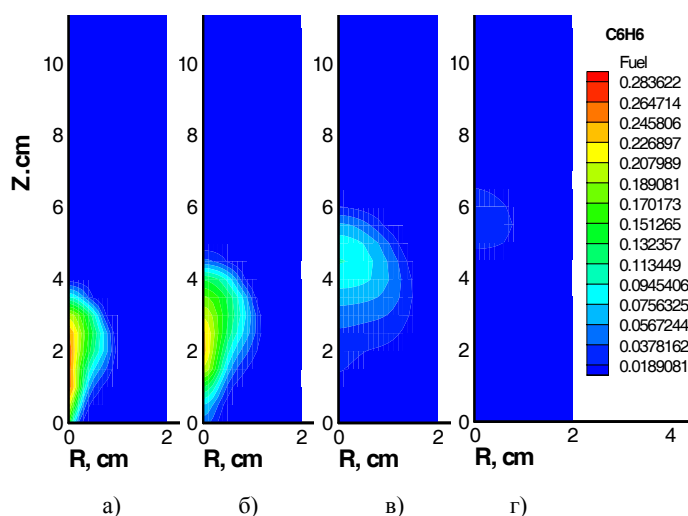


Рис. 3. Распределение паров топлива в камере сгорания при горении бензина в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

На рис. 4–7 приведены результаты численных экспериментов по горению гептана и тетрадекана. Результаты для этих топлив аналогичны результатам для бензина в качественном отношении, различаясь количественно. Анализ рисунка 4 показывает, что максимальная температура в камере сгорания при горении гептана равна 1300 К в момент времени 4 мс. Остальная часть камеры сохраняет первоначальное значение температуры 900 К.

На рис. 5 представлено распределение паров гептана в различные моменты времени. В конечный момент времени для оптимальных параметров концентрация топлива в камере сгорания практически равна нулю.

На рис. 6, 7 представлены результаты численного моделирования горения тетрадекана для оптимальной массы и скорости впрыска тетрадекана и начальной температуры в камере сгорания. Анализ рис. 6 показывает, что наибольшее значение, до которого прогревается камера сгорания, равно 2022 К, при этом температурный факел расположен выше, чем для гептана (рис. 4). В камере температура в конечный момент времени 4 мс равна 1200 К.

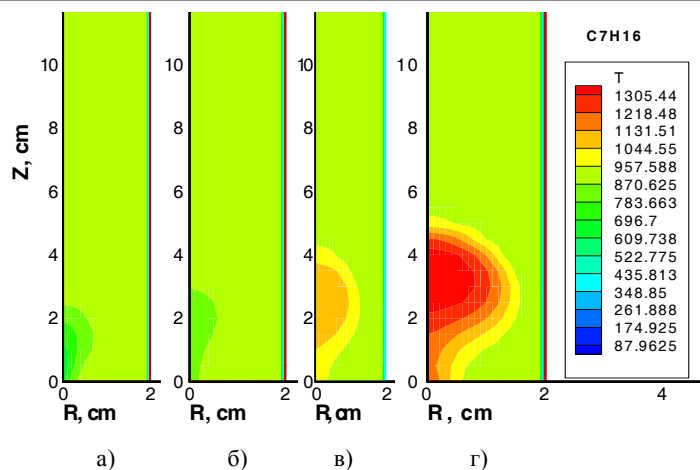


Рис. 4. Температура в камере сгорания при горении гептана в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

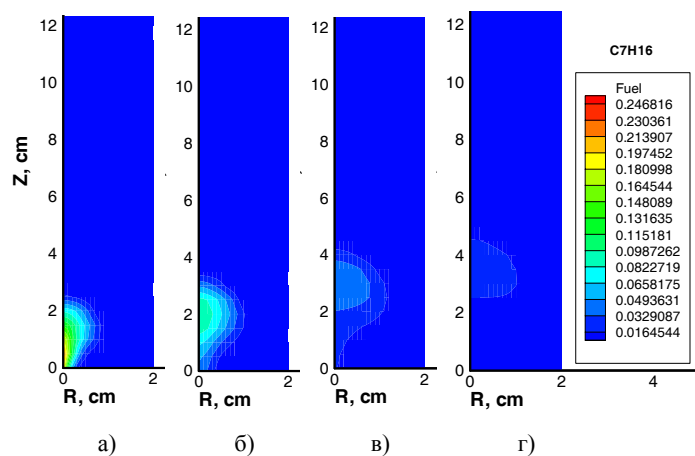


Рис. 5. Распределение паров топлива в камере сгорания при горении гептана в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

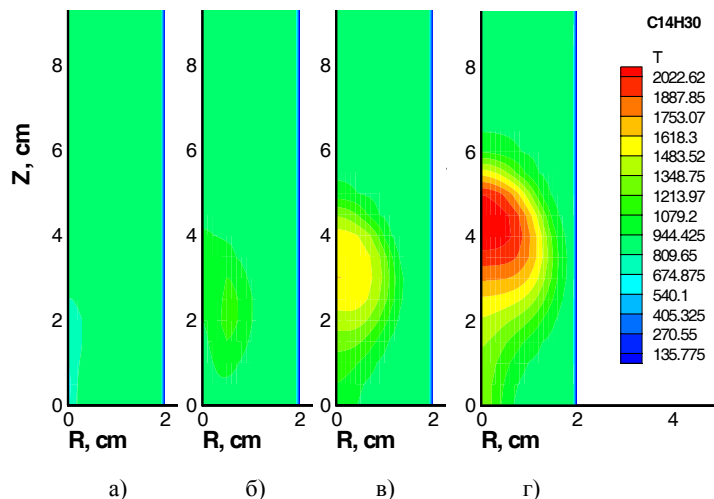


Рис. 6. Температура в камере сгорания при горении тетрадекана в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

Из рис. 7 видно, что в момент времени 4 мс концентрация паров тетрадекана равна нулю, поскольку к этому моменту времени топливо полностью прореагировало с окислителем и в результате этой реакции образовались углекислый газ CO<sub>2</sub> и вода H<sub>2</sub>O.

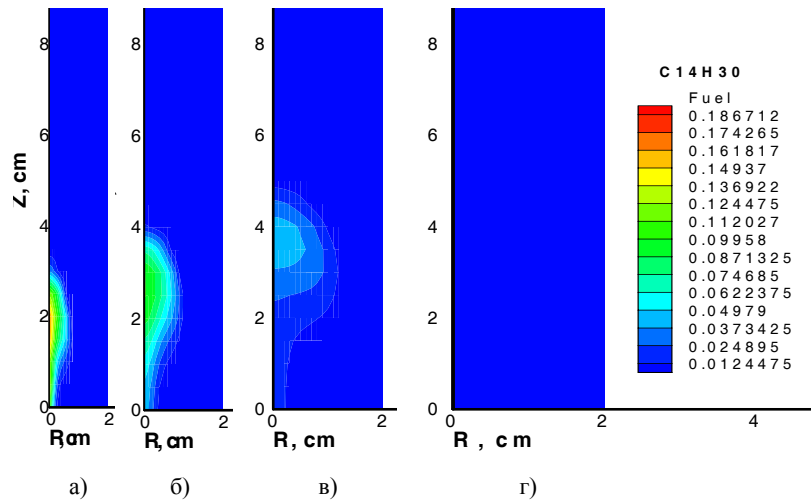


Рис. 7. Распределение паров топлива в камере сгорания при горении тетрадекана в моменты времени: а) 1,1 мс; б) 1,8 мс; в) 3 мс; г) 4 мс

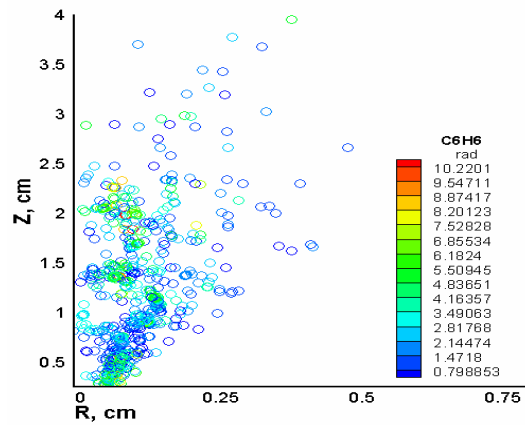


Рис. 8. Распределение капель бензина по радиусам в камере сгорания

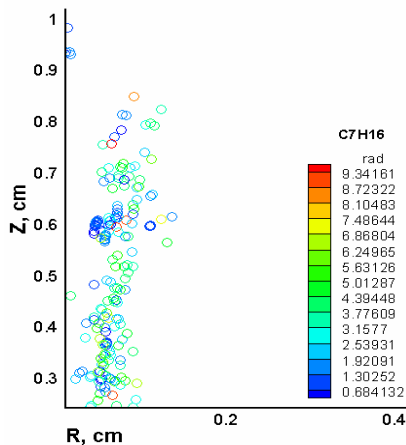


Рис. 9. Распределение капель гептана по радиусам

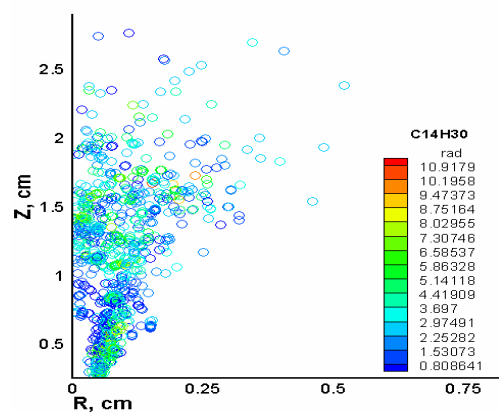


Рис. 10. Распределение капель тетрадекана по радиусам

Результаты численного моделирования, приведенные на рис. 8–10 показывают распределение и значения радиусов капель жидких топлив в камере сгорания. При впрыскивании все капли имеют один радиус, но затем капли испаряются, сталкиваются и сливаются, соответственно, их радиусы принимают различные значения. Значения радиусов показаны в микронах, при впрыскивании капель бензина (рис. 8) и тетрадекана (рис. 10), радиусы жидких частиц достигают 10 микрон, для гептана

максимальный радиус частиц составляет 9,3 микрона (рис. 9). Согласно рисункам 8–10 капель с большим радиусом образуется очень мало, и основная масса капель имеет радиус порядка от 2 до 6 микрон.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ярин, Л.П., Сухов, Г.С. Основы теории горения двухфазных сред. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 240 с.
2. Аскарлова, А.С., Гороховски, М.А., Локтионова, И.В., Рыспаева, М.Ж. Горение жидких топлив в камере сгорания // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2006. – № 3. – С. 15-20.

*А. С. Аскарлова, С. А. Бөлегенова, В. Ю. Максимов,  
А. Бекмұхамет, М. Т. Бекетаева, Ш. С. Оспанова*

#### САНДЫҚ ЗЕРТТЕУ ҮДЕРІСТЕРІНІҢ ДИСПЕРСИЯСЫ ЖӘНЕ СҰЙЫҚ ОТЫННЫҢ ЖАНУЫ

Сұйық отын бұрқулерінің дисперсиясын және жану үдерістерінің ең жақсы параметрлер үшін турбуленттіліктің және күйенің пайда болуын жану камерасында математикалық үлгілеу әдісімен зерттелген.

*A. S. Askarova, S. A. Bolegenova, V. Yu. Maximov,  
A. Bekmukhamet, M. T. Beketaeva, Sh. S. Ospanova*

#### NUMERICAL STUDY OF DISPERSION AND BURNING OF LIQUID FUEL

Of soot in the burner chamber by means of the methods of mathematical modeling The research of the processes of dispersion and combustion of liquid fuel sprays at optimal conditions of the liquid fuel combustion at the presence of turbulence and with the account of the formation and oxidation.

А. С. АСКАРОВА, И. Э. БЕРЕЗОВСКАЯ, С. А. БОЛЕГЕНОВА, В. Ю. МАКСИМОВ

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ НАЛИЧИИ ГОРЕНИЯ В ОБЛАСТЯХ РЕАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Исследовано процессы тепломассопереноса в высокотемпературных и термохимически активированных реагирующих потоках в реальной физико-химической системе (турбулентные течения с физико-химическими превращениями в камерах сгорания) в трехмерной геометрии с применением численных методов.

Источником кислорода для камеры сгорания является атмосферный воздух. Для осуществления реакции горючих компонентов топлива с кислородом необходима достаточно высокая температура для воспламенения, тщательное перемешивание топлива или турбулентность, обеспечивающая такое перемешивание, а также время, достаточное для полного сгорания. Анализ скоростных и температурных полей показал, что в центре топочной камеры создаются благоприятные условия для интенсивного протекания реакций горения. Изменение концентрации окислителя по высоте топочной камеры представлено на рис. 1 в виде кривых изменения концентрации кислорода. Максимальные изменения концентрации кислорода имеют место в области горелок, через которые подается топливо и окислитель. В этой области химические реакции идут наиболее интенсивно и неоднородно. По мере приближения к выходу отклонения максимальных и минимальных значений от среднего сокращаются.

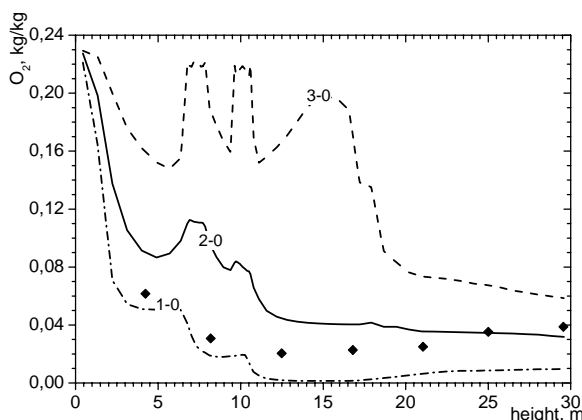


Рис. 1. Распределение концентрации  $O_2$  по высоте топочной камеры.  
1-0 – минимальные; 2-0 – средние; 3-0 – максимальные в сечении значения  
Линии 1-0, 2-0, 3-0 – расчет; ♦ – эксперимент

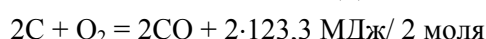
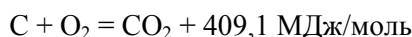
Картина образования оксидов углерода ( $CO$ ,  $CO_2$ ) представлена на рис. 1–3. Процесс этот неоднозначен. В процессе горения углерода вторичные реакции догорания  $CO$  в газовом объеме и восстановления  $CO_2$  на поверхности углерода, переплетающиеся с первичными реакциями, позволяют судить о нелинейности истинного химического механизма горения углерода. Кроме того, гетерогенный процесс горения углерода, связанный с наложением диффузионных явлений на химические процессы, вместе с внутренним реагированием еще более искажает основной химический процесс. Механизм реагирования углерода с кислородом представляется следующим образом. Из газового объема кислород адсорбируется на поверхности углерода, где атомы кислорода вступают в химическое соединение с углеродом, образуя сложные углеродно-кислородные комплексы  $C_xO_y$ . Последние распадаются с образованием  $CO_2$  и  $CO$ . Скорость распада сильно увеличивается с увеличением температуры. Углерод при определенных температурных условиях реагирует с кислородом и углекислотой. В результате реагирования углерода с кислородом



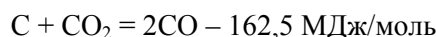
одновременно образуется оба окисла углерода –  $\text{CO}_2$  и  $\text{CO}$ , а в результате реагирования с углекислотой – окись углерода. Совместное нахождение окиси углерода и кислорода, способных реагировать друг с другом, дает третью реакцию – горение окиси углерода. В местах расположения горелок происходит как подача пылеугольной пыли с определенной концентрацией углерода, так и воздуха с определенным значением концентрации углерода. В этой области происходят основные реакции реагирования углерода, о чем свидетельствуют максимумы на кривых распределения  $\text{CO}$  (рис. 2).

Таким образом, можно выделить три основных процесса, преобладающих при реагировании углерода топлива:

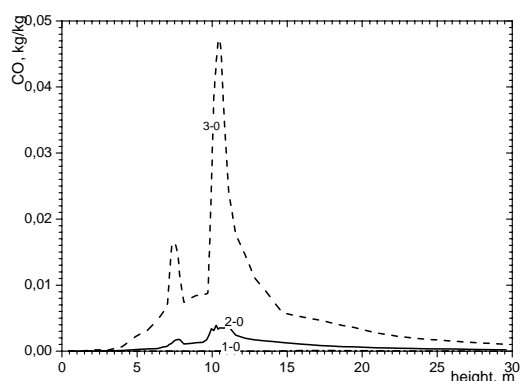
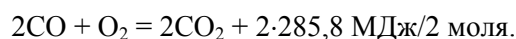
- реагирование углерода с кислородом, связанное с одновременным образованием  $\text{CO}_2$  и  $\text{CO}$ :



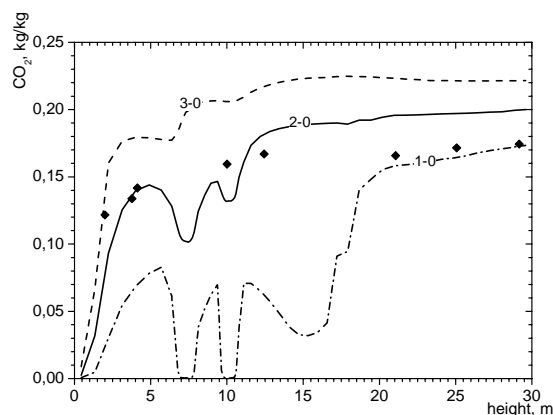
- взаимодействие углекислоты с углеродом



- соединение кислорода с окисью углерода



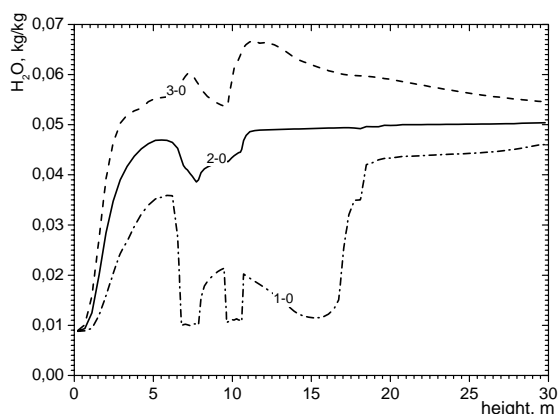
**Рис. 2.** Распределение концентрации  $\text{CO}$  по высоте топочной камеры.  
**1-0** – минимальные; **2-0** – средние;  
**3-0** – максимальные в сечении значения



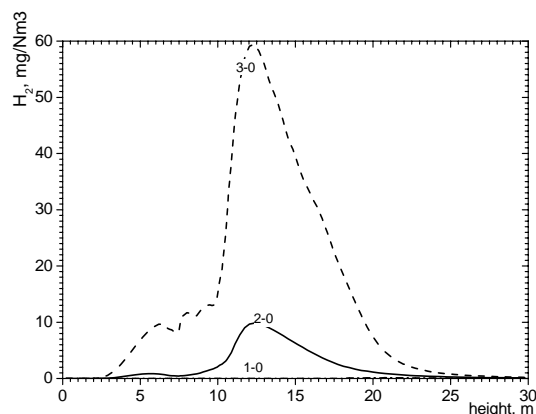
**Рис. 3.** Распределение концентрации  $\text{CO}_2$  по высоте топочной камеры. **1-0** – минимальные; **2-0** – средние; **3-0** – максимальные в сечении значения.  
 Линии **1-0, 2-0, 3-0** – расчет;  $\blacklozenge$  – эксперимент

Как видно из рис. 2 и 3 картина распределения  $\text{CO}$  не соответствует полю  $\text{CO}_2$ , что говорит об отличиях в процессе образования  $\text{CO}_2$  и  $\text{CO}$ . Видно, что основное образование диоксида углерода  $\text{CO}_2$  происходит по мере удаления от центра топки, т.е. области столкновения струй топлива и окислителя из противогорелок. Таким образом, можно сделать вывод о том что, процесс образования оксидов углерода зависит не только от явлений переноса, но и от кинетики процесса. Тот факт, что углерод может реагировать с кислородом разными способами, чрезвычайно важен при проектировании топочных камер. Любые технологии сжигания должны обеспечивать полное смешивание топлива с кислородом до полного сгорания с образованием  $\text{CO}_2$ , а не  $\text{CO}$ . В противном случае тепловыделение резко снизится, поскольку при образовании  $\text{CO}$  выделяется лишь 28% той энергии, которая выделяется при образовании  $\text{CO}_2$ .

Кроме углерода, в топливе содержится определенное количество водорода, что тоже вносит свой вклад в процесс горения  $2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$ . В процессе реакции горения вода, содержащаяся в топливе, испаряется. Поскольку экибастузский уголь имеет высокую влажность при высоких температурах процесс испарения идет интенсивно, с чем связано наличие минимумов на кривых распределения концентрации  $\text{H}_2\text{O}$  (рис. 4). Образование воды в газообразном состоянии наиболее интенсивно происходит на некотором расстоянии от зоны горелок и имеет равномерный характер по мере приближения к выходу из топочного пространства. Распределение концентрации водорода



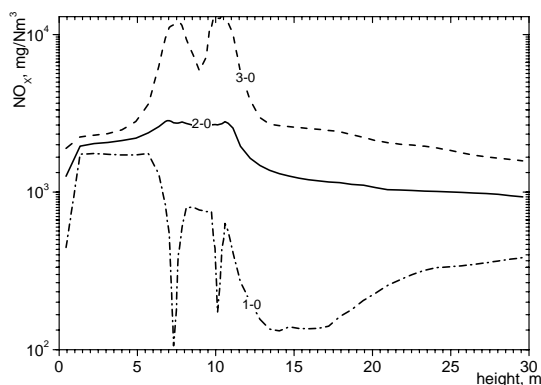
**Рис. 4.** Распределение концентрации  $H_2O$  по высоте топочной камеры.  
**1-0** – минимальные; **2-0** – средние;  
**3-0** – максимальные в сечении значения



**Рис. 5.** Распределение концентрации  $H_2$  по высоте топочной камеры.  
**1-0** – минимальные; **2-0** – средние;  
**3-0** – максимальные в сечении значения

(рис. 5) говорит об отличии в формировании этого вещества в процессе горения. Видно, что основное выделение водорода происходит выше основной области горения, где расположены горелочные устройства.

При организации процесса горения, необходимо особое внимание уделять процессу формирования оксидов азота, поскольку в настоящее время данные соединения признаны одними из наиболее опасных веществ, выбрасываемых в атмосферу. В общем случае азот образует с кислородом шесть оксидов:  $N_2O$ ,  $NO$ ,  $N_2O_3$ ,  $NO_2$ ,  $N_2O_4$  и  $N_2O_5$ . Наибольшее количество оксидов азота, образующихся при горении пылеугольной пыли и их последующей трансформации в атмосфере, представлено оксидом ( $NO$ ) и диоксидом азота ( $NO_2$ ). Исследования [2] показали, в основном можно указать два основных источника образования оксидов азота: окисление азота воздуха и переход азота угля в оксиды. При горении пылеугольной пыли, при умеренных температурах ядра факела ( $\sim 1500$  °С) основным источником оксидов азота является азот топлива. При более высоких температурах значительную роль играют воздушные оксиды азота.



**Рис. 6.** Распределение концентрации  $NO_x$  по высоте топочной камеры.  
**1-0** – минимальные; **2-0** – средние; **3-0** – максимальные в сечении значения

Картина распределения максимальных, минимальных и средних значений  $NO_x$  по всему топочному пространству представлена на рис. 6. Видно, что зоной основного газообразования  $NO_x$  является область расположения горелок, т.е. там, где в максимальном количестве присутствуют топливо и окислитель и уровень температур достаточно высок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мессерле В.Е., Сакипов З.Б., Устименко А.Б., Калинин Р.А. и др. Математическое моделирование электротермохимической подготовки энергетических углей к сжиганию с учетом образования оксидов азота // Мат-лы Всесоюз. научно-технич. конф. «Математическое моделирование в энергетике». – Киев, 1990. – Т. 3. – С. 137–140.

2. Аскарова А.С., Болегенова С.А., Лаврищева Е.И., Локтионова И.В. Численное исследование конвективного тепло-массопереноса при сжигании пылеугольного топлива // Тезисы V Минского междуна. форума по тепло- и массообмену. – Минск, 2004. – С. 264-265.

*A. S. Askarova, I. E. Berezovskaya, S. A. Bolegenova, V. Yu. Maximov*

НАҚТЫ ГЕОМЕТРИЯ АЙМАҒЫНДА ЖАНУ КЕЗІНДЕГІ  
ЖЫЛУМАССАТАСЫМАЛДАНУ ҮДЕРІСТЕРІН ЗЕРТТЕУ

Сандық әдістерді қолдана отырып үшөлшемді геометрияда нақты физика-химиялық жүйеде (жану камераларындағы физика-химиялық түрлендірулері бар турбуленттік ағындар) жоғары температуралық және термохимиялық белсенденген реакцияға түсуші ағындардағы жылу-массатасымалдану үдерістері зерттелген.

*A. S. Askarova, I. E. Berezovskaya, S. A. Bolegenova, V. Yu. Maximov*

INVESTIGATION OF HEAT AND MASS TRANSFER IN THE PRESENCE OF BURNING  
IN THE FIELDS OF REAL GEOMETRY

Investigation of the heat and mass transfer processes in high-temperature and thermal-chemical activated reacting streams in real physical and chemical system (turbulent flows with physical and chemical transformations) in three-dimensional geometry with application of numerical methods.

Л. Т. ЕРИМБЕТОВА, А. Е. ДАВЛЕТОВ, Е. С. МУХАМЕТКАРИМОВ, Ж. А. КУДЫШЕВ

## РАДИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОВОДЯЩИХ МАКРОЧАСТИЦ В ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ

Казахский Национальный университет им аль-Фараби, г. Алматы

Предлагается псевдопотенциальная модель взаимодействия пылевых частиц в плазме, в которой учитываются как электростатическая поляризация, так и эффекты экранировки. Вывод потенциала основан на теории перенормировки взаимодействия частиц в плазме, разработанной ранее. Пылевые частицы считаются проводящими, так что поляризационные явления рассматриваются строго в рамках метода электростатических изображений. Такое приближение не накладывает никаких ограничений на общность рассмотрения, поскольку поляризационные эффекты имеют важное значение для точного описания потенциала взаимодействия пылевых частиц. Псевдопотенциальная модель использовалась для нахождения радиальной функции распределения путем решения уравнения Орнштейна-Цернике в гиперцепном приближении. Обнаружено немонотонное поведение радиальной функции распределения пылевых частиц при достаточно больших значениях параметра связи пылевой компоненты, что свидетельствует о формировании ближнего или даже дальнего порядка.

**Введение.** Пылевая плазма появляется при помещении макрочастиц в плазму, состоящую из электронов, ионов и пылевых частиц. Она является очень удобным объектом для экспериментальных исследований [1], так как макрочастицы, называемые пылевыми, являются видимыми, что позволяет легко изучать их поведение в различных внешних условиях. Будучи помещенными в буферную плазму, пылевые частицы приобретают большой электрический заряд, [2], тем самым формируя классический аналог неидеальной системы, в которой, по определению, существенную роль играет взаимодействие между частицами. Поэтому, представляют большой интерес исследования, позволяющие получать информацию о характере взаимодействия пылевых частиц в плазме [3, 4].

**1. Параметры плазмы.** В данной работе рассматривается взаимодействие двух пылевых частиц, помещенных в двухкомпонентную водородную плазму, состоящую из свободных электронов с электрическим зарядом  $-e$  и концентрацией  $n_e$  и свободных протонов с электрическим зарядом  $e$  и концентрацией  $n_p = n_e = n$ . Пылевые частицы предполагаются изготовленными из проводящего материала, поэтому существенную роль должна играть электростатическая индукция, приводящая к наличию дополнительного механизма притяжения пылевых частиц. Данное предположение не ограничивает общности рассмотрения, так как в случае диэлектрического материала поляризационные эффекты также приведут к появлению притяжения между пылевыми частицами. Отличие состоит лишь в том, что для проводящих частиц проще найти выражение для потенциальной энергии взаимодействия.

Будем считать, что пылевые частицы представляют собой проводящие шары радиуса  $R$  и имеют заряд зарядом  $-Z_d e$ , где  $z_d$  – зарядовое число, а  $e$  – элементарный заряд.

Для описания состояния буферной плазмы введем эффективный параметр неидеальности, определяемый выражением

$$\Gamma_R = \frac{e^2}{R k_B T}, \quad (1)$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура среды.

Параметр неидеальности (1) представляет собой отношение кулоновской энергии взаимодействия электронов, расположенных на расстоянии  $R$  друг от друга, к их средней энергии хаотического теплового движения.

Также необходимо определить безразмерный параметр экранирования

$$\kappa = \frac{R}{\lambda_D}, \quad (2)$$

где  $\lambda_D = \sqrt{k_B T / 8\pi n e^2}$  – дебаевский радиус экранирования.

Параметр неидеальности пылевых частиц в плазме связан с эффективным параметром неидеальности буферной плазмы соотношением

$$\Gamma_d = \frac{z_d^2 \Gamma_R}{D}, \quad (3)$$

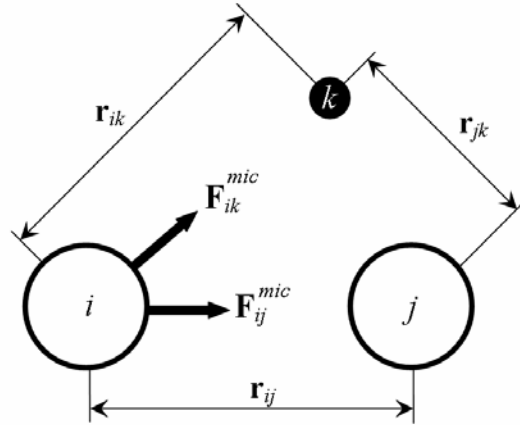
где  $D = a_d/R$ , а  $a_d = (3/4\pi n_d)^{1/3}$  – среднее расстояние между пылевыми частицами;  $d_d$  – концентрация пылевых частиц.

**2. Перенормировка взаимодействия пылевых частиц.** Учет коллективные эффекты в парном потенциале рассмотрим взаимодействия двух частиц в присутствии третьей (см. рис. 1). Полная сила  $\mathbf{F}_{ij}^{mac}$ , действующая на  $i$ -ую частицу со стороны всей системы и называемая макроскопической, может быть записана в виде

$$\mathbf{F}_{ij}^{mac} = \mathbf{F}_{ij}^{mic} + \sum_k \int \mathbf{F}_{ik}^{mic} P(\mathbf{r}_{ik}, \mathbf{r}_{jk}) d\mathbf{r}_k. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{F}_{ij}^{mic}$  – микроскопическая сила, действующая между  $i$ -ой и  $j$ -ой частицами;  $\mathbf{F}_{ik}^{mic}$  – микроскопическая сила, действующая между  $i$ -ой и  $k$ -ой частицами;  $P(\mathbf{r}_{ik}, \mathbf{r}_{jk})$  – плотность вероятности нахождения  $k$ -ой частицы на определенном расстоянии от  $i$ -ой и  $j$ -ой частиц. Суммирование в выражении (4) подразумевается по всем частицам, кроме  $i$ -ой и  $j$ -ой, а после этого производится усреднение по всем возможным положениям  $k$ -ой частицы путем интегрирования по  $\mathbf{r}_k$ .

**Рис. 1.**  
 Диаграмма перенормировки взаимодействия двух частиц в присутствии третьей частицы



Известно, что микроскопическая сила  $\mathbf{F}_{ij}^{mic}$ , действующая на  $i$ -ую частицу со стороны  $j$ -ой, выражается через микроскопический потенциал  $\varphi_{ij}$  с помощью оператора набла  $\nabla_i$ :  $\mathbf{F}_{ij}^{mic} = -\nabla_i \varphi_{ij}$ . Аналогичное соотношение справедливо и для взаимодействия  $i$ -ой и  $k$ -ой частиц. Предположим, что макроскопическая сила может быть найдена из неизвестного пока макроскопического потенциала  $\Phi_{ij}$  с помощью оператора набла  $\nabla_i$ :  $\mathbf{F}_{ij}^{mac} = -\nabla_i \Phi_{ij}$ . Для замыкания уравнения (4) остается сделать некоторое предположение о виде плотности вероятности  $P(\mathbf{r}_{ik}, \mathbf{r}_{jk})$ , которая в общем случае должна быть получена из более последовательной теории. Тем не менее, вполне естественно предположить, что распределение плотности вероятности носит больцмановский характер

$$P(\mathbf{r}_{ik}, \mathbf{r}_{jk}) = \frac{1}{V} \exp\left(-\frac{\Phi_{ik} + \Phi_{jk}}{k_B T}\right) \quad (5)$$

с нормировкой на объем системы  $V$ .

Подставляя (5) в (4) и линеаризуя экспоненциальный член, а затем переходя от суммирования по номерам частиц  $k$  к суммированию по сортам  $c$ , получаем следующее обобщенное уравнение Больцмана-Пуассона [5]

$$\Delta_i \Phi_{ij}(\mathbf{r}_i^a, \mathbf{r}_j^b) = \Delta_i \varphi_{ij}(\mathbf{r}_i^a, \mathbf{r}_j^b) - \sum_{c=e,p} \frac{n_c}{k_B T} \int \Delta_i \varphi_{ik}(\mathbf{r}_i^a, \mathbf{r}_k^c) \Phi_{jk}(\mathbf{r}_j^b, \mathbf{r}_k^c) d\mathbf{r}_k^c, \quad (6)$$

где  $n_c$  – концентрация частиц сорта  $c$ . Заметим, что в формуле (6) суммирование производится только по электронам и протонам буферной плазмы  $c = e, p$ , концентрация пылинок считается равной нулю, так как нас интересует взаимодействие двух изолированных пылевых частиц.

Следует отметить, что обобщенное уравнение Больцмана-Пуассона может быть строго получено из цепочки уравнений Боголюбова для равновесных функций распределения в приближении парных корреляций [6]. Оно было успешно применено к самым различным видам плазмы, таким как квазиклассическая [7, 8], частично ионизованная [9,10] и даже пылевая плазма в дебаевском приближении [11].

Уравнение (6) представляет собой соотношение для определения макроскопического потенциала  $\Phi_{ij}$  через микроскопический потенциал  $\varphi_{ij}$ . Видно, что макропотенциал учитывает коллективные эффекты, так как в него неизбежно входят концентрации частиц разных сортов.

В Фурье-пространстве система уравнений (6) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, решение которых легко находится и имеет вид

$$\tilde{\Phi}_{ee}(k) = \frac{1}{\Delta} \left[ \tilde{\varphi}_{ee}(k) + A_p \left( \tilde{\varphi}_{ee}(k) \tilde{\varphi}_{pp}(k) - \tilde{\varphi}_{ep}^2(k) \right) \right], \quad (7)$$

$$\tilde{\Phi}_{pp}(k) = \frac{1}{\Delta} \left[ \tilde{\varphi}_{pp}(k) + A_e \left( \tilde{\varphi}_{ee}(k) \tilde{\varphi}_{pp}(k) - \tilde{\varphi}_{ep}^2(k) \right) \right], \quad (8)$$

$$\tilde{\Phi}_{ep}(k) = \frac{\tilde{\varphi}_{ep}(k)}{\Delta}, \quad (9)$$

$$\tilde{\Phi}_{ed}(k) = \frac{1}{\Delta} \left[ \tilde{\varphi}_{ed}(k) + A_p \left( \tilde{\varphi}_{ed}(k) \tilde{\varphi}_{pp}(k) - \tilde{\varphi}_{pd}(k) \tilde{\varphi}_{ep}(k) \right) \right], \quad (10)$$

$$\tilde{\Phi}_{pd}(k) = \frac{1}{\Delta} \left[ \tilde{\varphi}_{pd}(k) + A_e \left( \tilde{\varphi}_{pd}(k) \tilde{\varphi}_{ee}(k) - \tilde{\varphi}_{ed}(k) \tilde{\varphi}_{ep}(k) \right) \right], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{dd}(k) = & \frac{1}{\Delta} \left[ \tilde{\varphi}_{dd}(k) + A_e \left( \tilde{\varphi}_{dd}(k) \tilde{\varphi}_{ee}(k) - \tilde{\varphi}_{ed}^2(k) \right) + A_p \left( \tilde{\varphi}_{dd}(k) \tilde{\varphi}_{pp}(k) - \tilde{\varphi}_{pd}^2(k) \right) \right. \\ & + A_e A_p \left( 2\tilde{\varphi}_{ed}(k) \tilde{\varphi}_{pd}(k) \tilde{\varphi}_{ep}(k) + \tilde{\varphi}_{dd}(k) \tilde{\varphi}_{ee}(k) \tilde{\varphi}_{pp}(k) \right. \\ & \left. \left. - \tilde{\varphi}_{dd}(k) \tilde{\varphi}_{ep}^2(k) - \tilde{\varphi}_{ee}(k) \tilde{\varphi}_{pd}^2(k) - \tilde{\varphi}_{pp}(k) \tilde{\varphi}_{ed}^2(k) \right) \right], \quad (12) \end{aligned}$$

$$\Delta = 1 + A_e \tilde{\varphi}_{ee}(k) + A_p \tilde{\varphi}_{pp}(k) + A_e A_p \left( \tilde{\varphi}_{pp}(k) \tilde{\varphi}_{ee}(k) - \tilde{\varphi}_{ep}^2(k) \right). \quad (13)$$

Здесь индекс  $d$  отвечает пылевой компоненте плазмы, а  $A_{e,p,d} = \frac{n_{e,p,d}}{k_b T}$ .

Макропотенциалы взаимодействия частиц сортов  $a$  и  $b$  в конфигурационном пространстве получаются из выражений (7)-(13) обратным преобразованием Фурье

$$\Phi_{ab}(\mathbf{r}) = \int \tilde{\Phi}_{ab}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (14)$$

Из выражений (7)-(13) заключаем, что на взаимодействие частиц буферной плазмы (электроны и протоны) пылевые частицы не оказывают никакого влияния.

**3. Пылевая плазма с точечными частицами.** Для начала будем полностью пренебрегать конечностью размеров пылинок, то есть рассмотрим пылевую плазму, состоящую из точечных частиц.

В качестве микропотенциала взаимодействия заряженных частиц буферной плазмы возьмем потенциал Кулона

$$\varphi_{ee}(r) = \varphi_{pp}(r) = -\varphi_{ep}(r) = \frac{e^2}{r}. \quad (15)$$

Аналогично поступаем для микропотенциалов взаимодействия пылевой компоненты

$$\varphi_{ed}(r) = -\varphi_{pd}(r) = \frac{Z_d e^2}{r}, \quad \varphi_{dd}(r) = \frac{Z_d^2 e^2}{r}. \quad (16)$$

В этом случае Фурье-образы микропотенциалов хорошо известны, а Фурье-образы макропотенциалов легко находятся из выражений (7)-(13). Например, для взаимодействия пылевых частиц получается хорошо апробированный потенциал Юкавы

$$\Phi_{dd}(r) = \frac{Z_d^2 e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right), \quad (17)$$

где  $\lambda_D = \sqrt{k_B T / 8\pi n e^2}$  – дебаевский радиус экранирования.

Потенциал вида (17) широко применяется при теоретических расчетах и компьютерном моделировании. Из приведенного вывода следует, что при использовании формулы (17) полностью пренебрегают конечностью размеров пылинок и их поляризацией. Очевидно, что это возможно только в том случае, когда среднее расстояние между пылинками много больше их размеров, что не всегда выполняется на практике.

**4. Учет конечности размеров пылинок.** Для учета конечности размеров макрочастиц сделаем замены  $\varphi_{d(p,e)}(r) \rightarrow \varphi_{d(p,e)}(r + R)$ ,  $\varphi_{dd}(r) \rightarrow \varphi_{dd}(r + 2R)$  в микропотенциалах (16), (17), тогда получим:

$$\varphi_{ee}(r) = \varphi_{pp}(r) = -\varphi_{ep}(r) = \frac{e^2}{r}, \quad (18)$$

$$\varphi_{de}(r) = \frac{Z_d e^2}{r + R}, \quad \varphi_{dp}(r) = -\frac{Z_d e^2}{r + R}, \quad (19)$$

$$\varphi_{dd}(r) = \frac{Z_d^2 e^2}{r + 2R}. \quad (20)$$

Фурье образ Кулоновского микропотенциала (18) имеет следующий вид:

$$\varphi_{ii}(k) = \varphi_{ii}(k) = -\varphi_{ei}(k) = \frac{4\pi\Gamma_R}{k^2}. \quad (21)$$

Фурье-образы микропотенциалов взаимодействия заряженных частиц плазмы с пылевой компонентой (электроны и протоны) и последних между собой (19),(20) приведены ниже:

$$\varphi_{pd}(k) = -\frac{4\pi z_d \Gamma_R}{k^2} + \frac{4\pi z_d \Gamma_R}{k} [Ci(k) \sin(k) + \frac{1}{2} \cos(k)(\pi - 2Si(k))], \quad (22)$$

$$\varphi_{ed}(k) = \frac{4\pi z_d \Gamma_R}{k^2} - \frac{4\pi z_d \Gamma_R}{k} [Ci(k) \sin(k) + \frac{1}{2} \cos(k)(\pi - 2Si(k))], \quad (23)$$

$$\varphi_{dd}(k) = \frac{4\pi z_d^2 \Gamma_R}{k^2} - \frac{8\pi z_d^2 \Gamma_R}{k} [Ci(2k) \sin(2k) + \frac{1}{2} \cos(2k)(\pi - 2Si(2k))], \quad (24)$$

где  $Ci$  и  $Si$  интегральный косинус и синус, а  $f(k)$  – некоторая интерполяционная функция.

**5. Учет индуцированных зарядов на проводящих пылевых частицах.** Микропотенциалы взаимодействия пылевых частиц с заряженными частицами (электрон и протон) и между собой вычисляются в рамках метода электростатических изображений в предположении, что пылевые частицы являются заряженными проводящими шарами [12].

$$\varphi_{ee}(r) = \varphi_{pp}(r) = -\varphi_{ep}(r) = \frac{e^2}{r}, \quad (25)$$

$$\varphi_{de}(r) = \frac{Z_d e^2}{r} - \frac{e^2 R^3}{2r^2(r^2 - R^2)}, \quad \varphi_{dp}(r) = -\frac{Z_d e^2}{r} - \frac{e^2 R^3}{2r^2(r^2 - R^2)}, \quad (26)$$

$$\varphi_{dd}(r) = \frac{Z_d^2 e^2}{R} \left[ \frac{1}{\text{sh } \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\text{sh } n\beta}} - 1 \right], \quad (27)$$

где  $\text{ch } \beta = r / 2R$ .

Таким образом, при взаимодействии заряженной частицы с проводящим заряженным шаром (пылевой частицей) наряду с чисто кулоновским взаимодействием возникает дополнительный член, отвечающий за взаимодействия заряженной частицы с индуцированными зарядами противоположенного знака. При описании взаимодействия двух заряженных проводящих шаров также использовался метод электрических изображений. В данном случае, две заряженные пылинки взаимодействуют посредством бесконечного числа индуцированных друг в друге зарядов. Учет взаимодействия индуцированных зарядов соответствует поляризационному взаимодействию макроскопических частиц. В (26), (27) необходимо исключить внутренние части пылевых частиц. Это делается с помощью преобразования  $\varphi_{d(i,e)}(r) \rightarrow \varphi_{d(i,e)}(r + R)$   $\varphi_{dd}(r) \rightarrow \varphi_{dd}(r + 2R)$ , которая дает возможность интегрировать по всему свободному пространству.

Фурье-образы микропотенциалов (26), (27) имеют вид:

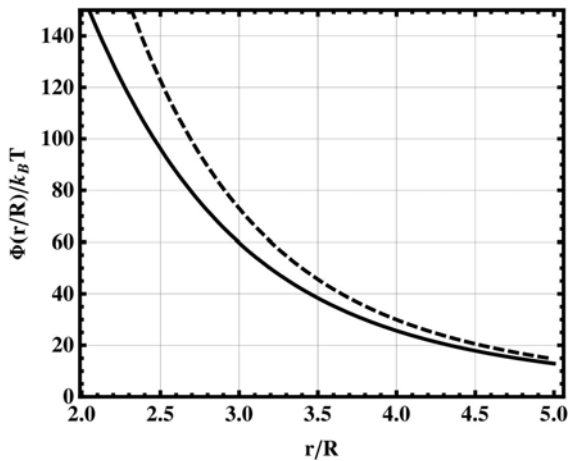
$$\varphi_{pd}(k) = -\frac{4\pi z_d \Gamma_R}{k^2} + \frac{4\pi z_d \Gamma_R}{k} \left[ Ci(k) \sin(k) + \frac{1}{2} \cos(k)(\pi - 2Si(k)) \right] - \frac{\pi \Gamma_R}{k} [2Ci(k) \sin(k) - 2Ci(2k) \sin(2k) + \cos(k)(\pi - 2Si(k)) - \cos(2k)(\pi - 2Si(2k))], \quad (28)$$

$$\varphi_{ed}(k) = \frac{4\pi z_d \Gamma_R}{k^2} - \frac{4\pi z_d \Gamma_R}{k} \left[ Ci(k) \sin(k) + \frac{1}{2} \cos(k)(\pi - 2Si(k)) \right] - \frac{\pi \Gamma_R}{k} [2Ci(k) \sin(k) - 2Ci(2k) \sin(2k) + \cos(k)(\pi - 2Si(k)) - \cos(2k)(\pi - 2Si(2k))], \quad (29)$$

$$\varphi_{dd}(k) = \frac{4\pi z_d^2 \Gamma_R}{k^2} + \frac{4\pi z_d^2 \Gamma_R}{k^2} f(k) - \frac{8\pi z_d^2 \Gamma_R}{k} [Ci(2k) \sin(2k) + \frac{1}{2} \cos(2k)(\pi - 2Si(2k))], \quad (30)$$

где  $f(k)$  – некоторая интерполяционная функция.

На рис. 2 построены графики зависимостей потенциалов взаимодействия от безразмерного расстояния. Сплошной кривой представлен макропотенциал, при расчете которого использовались микропотенциалы (18)-(20), учитывающие конечные размеры пылевых частиц, а штрихованная кривая соответствует макропотенциалу взаимодействия, рассчитанного на основе микропотенциалов (25)-(27), учитывающих еще и индуцированные заряды. Из рисунка видно, что индуцированные заряды приводят к ослаблению парного потенциала взаимодействия пылевых частиц, так как приводят к дополнительному притяжению между пылинками.



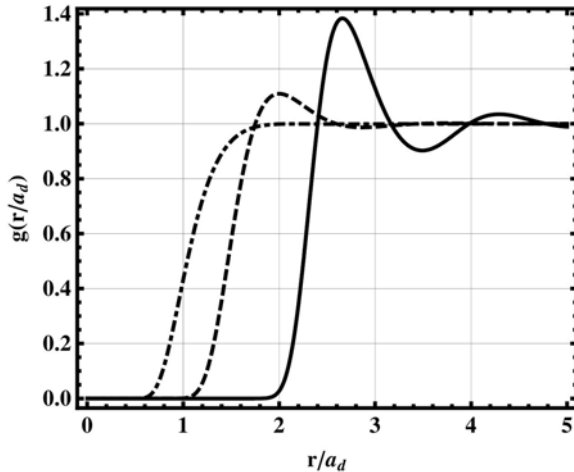
Сплошная кривая: псевдопотенциал взаимодействия на основе микропотенциалов (25)-(27); штриховая кривая: псевдопотенциал взаимодействия на основе микропотенциалов (18)-(20).

**Рис. 2.** Зависимость псевдопотенциала взаимодействия пылевых частиц между собой от безразмерного расстояния  $r/R$  при  $\Gamma_R = 0.1$ ,  $\kappa = 2$

## 6. Решение интегрального уравнения Орнштейна-Цернике в гиперцепном приближении.

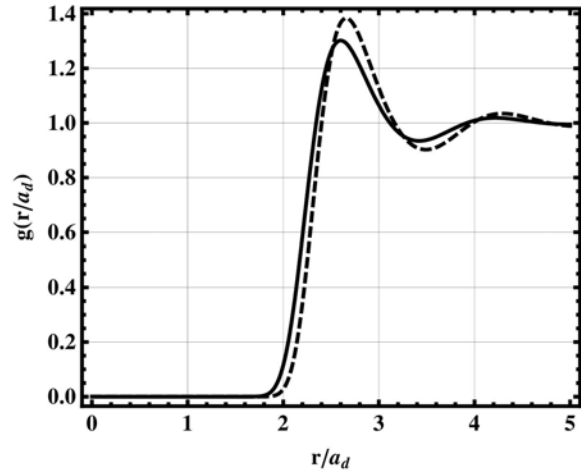
Построенная псевдопотенциальная модель не включает в себя плотность пылевых частиц и может использоваться при компьютерном моделировании, например, в методе Монте-Карло и молекулярной динамике, для определения коллективных характеристик пылевой плазмы. Помимо этого можно использовать интегральное уравнение Орнштейна-Цернике в гиперцепном приближении для нахождения функции вероятности взаимного расположения пар пылевых частиц в плазме. Результаты расчетов показаны на рис. 3 и 4.





Сплошная линия:  $D = 2$ ; штрихованная линия:  $D = 5$ ;  
штрихованные с точками:  $D = 10$ .

**Рис. 3.** Зависимость радиальной функции распределения пылевых частиц в плазме от безразмерного расстояния  $r/a_d$  на основе микропотенциалов (18)-(20) при  $\Gamma_R = 0.1$ ,  $\kappa = 10$



Штрихованная кривая:  
на основе микропотенциалов (18)-(20);  
Сплошная кривая: на основе микропотенциалов (25)-(27).

**Рис. 4.** Зависимость радиальной функции распределения пылевых частиц в плазме от безразмерного расстояния  $r/a_d$  при  $\Gamma_R = 0.1$ ,  $\kappa = 10$ ,  $D = 10$

Из анализа рис. 3 и 4 можно сделать следующие выводы. При определенных безразмерных параметрах плазмы радиальная функция распределения имеет немонокотный характер, что свидетельствует об образовании ближнего или даже дальнего порядка в расположении пылевых частиц. При увеличении параметра  $D$  пики на радиальной функции распределения уменьшаются, поскольку из (3) видно, что это приводит к уменьшению параметра связи пылевых частиц. Электростатическая индукция также приводит к сдвигу максимумов в сторону меньших расстояний, так как ее учет соответствует дополнительному механизму притяжения между пылевыми частицами.

**Заключение.** В псевдопотенциальной модели взаимодействия пылевых частиц в плазме предложено учитывать как эффекты конечных размеров пылевых частиц, так и электростатическую индукцию, а также явление экранировки поля заряда в плазме. Пылевые частицы были представлены как проводящие заряженные шары, для описания взаимодействия которых можно использовать метод электростатических изображений [12]. Такая псевдопотенциальная модель применима в различных теоретических расчетах и методах компьютерного моделирования. Например, в настоящей работе с помощью данной псевдопотенциальной модели изучалась радиальная функция распределения, рассчитанная из уравнения Орнштейна-Цернике в гиперцепном приближении. Анализ радиальной функции распределения показывает, что при достаточно больших значениях параметра связи наблюдается немонокотное поведение функции распределения от безразмерного расстояния, соответствующее ближнему или даже дальнему порядку в расположении пылевых частиц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Baumgartner H., Block D., Bonitz M. // *Contrib. Plasma Phys.* 49, 281 (2009).
2. Khrapak S., Morfill G. // *Contrib. Plasma Phys.* 49, 148 (2009).
3. Filippov A.V. // *Contrib. Plasma Phys.* 49, 431 (2009).
4. Filippov A.V., Derbenev I.N. // *Contrib. Plasma Phys.* 49, 769 (2009).
5. Arkhipov Yu.V., Baimbetov F.B., Davletov A.E. // *Phys. Rev. E* 83, 016405 (2011).
6. Arkhipov Yu.V., Baimbetov F.B., Davletov A.E., Ramazanov T.S. // *Contrib. Plasma Phys.* 39, 495 (1999).
7. Arkhipov Yu.V., Baimbetov F.B., Davletov A.E. // *Eur. Phys. J. D* 8, 299 (2000).
8. Arkhipov Yu.V., Baimbetov F.B., Davletov A.E., Starikov K.V. // *J. Plasma Phys.* 68, 81 (2002).
9. Yu.V. Arkhipov, F.B. Baimbetov, A.E. Davletov, *Phys. Plasmas* 12, 082701 (2005).
10. Yu.V. Arkhipov, F.B. Baimbetov, A.E. Davletov, *Contrib. Plasma Phys.* 43, 258 (2003).
11. F.B. Baimbetov, A.E. Davletov, Zh.A. Kudyshev, E.S. Mukhametkarimov, *Contrib. Plasma Phys.* 51, 533 (2011).
12. V.A. Saranin, *Uspekhi Fizicheskikh Nauk* 169, 453 (1999) (in Russian).

*Л. Т. Ерімбетова, А. Е. Дәулетов, Е. С. Мұхаметкәрімов, Ж. А. Құдышев*

### ӨТКІЗГІШ ТОЗАҢ БӨЛШЕКТЕРІ БАР ПЛАЗМАНЫҢ ТАРАЛУ ФУНКЦИЯЛАРЫ

Электростаттық полярлану мен экрандану нәтижелерін ескеретін бөлшектердің әсерлесу жалған-әлеуеттік үлгісі ұсынылды. Әлеует плазма бөлшектердің әсерлесу теориясына негізделіп анықталды. Тозаң бөлшектері өткізгіш деп есептелініп, полярлану құбылыстары үшін заряд-бейне жуықтауы қолданылды. Бұл жуықтау жалпы қарастыруға ешқандай шектеу қоймайды, өйткені полярланулық нәтижелер әлеуетті дұрыс сипаттауда маңызды. Жалғанәлеуметтік үлгі көмегімен Орнштейн-Цернике тендеуін гиперцептік жуықтауда шешу арқылы радиал таралу функциясы анықталып, байланыс параметрінің үлкен мәндері үшін таралу функциясының монотонды емесі көрсетілді. Бұл плазмада тозаң бөлшектері таралуында жақын немесе алыс қашықтықтағы реттелу пайда болғанын көрсетеді.

*L. T. Erimbetova, A. E. Davletov, Zh. A. Kudyshev, Ye. S. Mukhametkarimov*

### RADIAL DISTRIBUTION FUNCTION OF CONDUCTIVE DUST PARTICLES IN PLASMAS

A pseudopotential model of intergrain interaction in dusty plasmas is proposed to take into account both the electrostatic polarization and the screening phenomena. The derivation is entirely based on the renormalization theory of plasma particles interaction developed previously. Dust particles are assumed to be conductive such that the polarization phenomenon can strictly be treated in the charge-image approximation. Such an assumption imposes no restraint on generality of the present consideration because the polarization effects are essential for accurate description of intergrain interaction potential. The pseudopotential model is then used in the hypernetted chain approximation (HNC) for the dust component to obtain the radial distribution function which reveals the non-monotonic behavior at sufficiently large values of the dust coupling parameter. This can be viewed upon as a short- or even long-range order formation in the dust component of the plasma.

В. МУҚАМЕДЕНҚЫЗЫ, О. В. ФЕДОРЕНКО, М. К. ӘСЕМБАЕВА

## МАССАӨТКІЗБЕЙТІН ҚАБЫРҒАЛАРЫ БАР ЖАЗЫҚ ВЕРТИКАЛЬ КАНАЛДАҒЫ МОЛЕКУЛАЛЫҚ МАССАТАСЫМАЛДАУДЫҢ ШЕКАРАСЫН АНЫҚТАУ

*Массаөткізбейтін қабырғалары бар жазық вертикаль канал үшін изотермдік үшқұрамды газ қоспасындағы молекулалық массатасымалдаудың шекарасы сандық есептеу арқылы анықталды. Қуыс канал үшін «диффузия-конвекция» ауысу режиміндегі Рэлейдің сыни саны анықталды. Орнықтылықтың сандық теориясы негізінде алынған теориялық зерттеулердің тәжірибелік мәліметтермен сәйкестілігі көрсетілді.*

Көпқұрамды газ жүйелеріндегі массатасымалдауды зерттеу барысында жүйеде орын алатын диффузия немесе конвекция араласу режимдерінің қай түрі болатынын білу қажет. Сондықтан да араласу режимдерін зерттеу барысында негізгі мәселелердің бірі жүйенің орнықтылық күйден орнықсыздық күйге өту кезіндегі шекарасын анықтау болып табылады. Диффузиялық каналда тығыздық бойынша стратификацияланған аймақтардың пайда болуы ауысу режиміне алып келеді [1]. Мұндай режимдерді тәжірибе немесе сандық есептеулер арқылы анықтауға болады. Алайда, тәжірибелік әдістердің күрделілігін және материалдық шығындарын ескере отырып, қажетті ақпаратты алуға мүмкіндік беретін сандық әдістердің бірқатарын қарастыруға болады [2].

Үшкомпонентті газ қоспаларының макроскоптық қозғалысы Навье-Стокс теңдеуі, қоспа бөлшектері мен компоненттерінің сандық сақталуы және күй теңдеулерінен тұратын гидродинамиканың жалпы теңдеуімен сипатталады [1, 3]:

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u} \right] &= -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{u} + \left( \frac{\eta}{3} + \xi \right) \nabla \operatorname{div} \vec{u} + \rho \vec{g}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n \vec{v}) &= 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial t} + \vec{v} \nabla c_i = -\operatorname{div} \vec{j}_i; \\ \vec{j}_1 &= -(D_{11}^* \nabla c_1 + D_{12}^* \nabla c_2), \quad \vec{j}_2 = -(D_{21}^* \nabla c_1 + D_{22}^* \nabla c_2); \\ \rho &= \rho(c_1, c_2, p), \quad T = \text{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

мұндағы  $\vec{u} = \frac{\rho_1 \vec{u}_1 + \rho_2 \vec{u}_2 + \rho_3 \vec{u}_3}{\rho}$ ,  $\vec{v} = \frac{n_1 \vec{u}_1 + n_2 \vec{u}_2 + n_3 \vec{u}_3}{n}$  – сәйкесінше үшқұрамды қоспаның

ортамассалық және ортасандық жылдамдығы;  $\rho$  – тығыздық;  $p$  – қысым;  $\vec{g}$  – ауырлық күшінің үдеуі;  $\eta$  және  $\xi$  – ығысу және көлемдік тұтқырлық коэффициенттері;  $j_i$ ,  $c_i$  – диффузиялық ағын тығыздығы және  $i$ -ші компоненттің концентрациясы;  $D_{ij}^*$  – диффузияның практикалық коэффициенті.

Изотермдік жағдай үшін (1) теңдеулер жүйесін аз ұйытқулар әдісімен шешеміз. Мұнда шекаралық шарттарды газ қоспасын қоршап тұрған вертикаль қабат арқылы зат тасымалданбайды және жылдамдық нөлге тең болады деп қарастырамыз:

$$u = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial c_2}{\partial x} = 0, \quad x = \pm 1, \quad (2)$$

мұндағы  $u$  және  $c_i$  меншікті функцияларды мынадай түрде анықтауға болады:

$$\begin{aligned} u &= \frac{sh \gamma x}{sh \gamma} - \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma}, \quad c_i = -\frac{K_i}{\gamma^4} \left( \frac{sh \gamma x}{sh \gamma} + \frac{\sin \gamma x}{\sin \gamma} \right), \\ \gamma^4 &= K_1 R_1 \tau_{11} + K_2 R_2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$K_1 = \frac{\left(1 - \frac{A_2}{A_1} \tau_{12}\right)}{(\tau_{11} - \tau_{12} \tau_{21})}, \quad K_2 = \frac{\left(\tau_{11} - \frac{A_1}{A_2} \tau_{21}\right)}{(\tau_{11} - \tau_{12} \tau_{21})}.$$

мұндағы  $\tau_{ij} = \frac{D_{ij}^*}{D_{22}^*}$  – диффузияның практикалық коэффициенттерінің қатынасын анықтайтын

параметр;  $A_i d$  –  $i$ -ші компоненттің концентрациясы;  $R_i = \frac{g \beta_i A_i d^4}{\nu D_{ii}^*}$  – Рэлейдің парциаль диффу-

зиялық саны және  $\gamma$  ұйытқу декрементін Рэлейдің парциаль сандары  $R_1$  және  $R_2$  арқылы мына теңдеуден анықтауға болады:

$$cth \gamma = -ctg \gamma. \quad (4)$$

Сонымен Рэлейдің сыни сандарының спектрі тақ мәндері үшін (4) теңдеуден анықталады:

$$\begin{aligned} \gamma_1 = 2,365; \gamma_3 = 5,498; \gamma_5 = 8,639; \dots \\ R_1 = 31,29; R_3 = 931,8; R_5 = 5570; \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Орныксыздықтың монотонды шекарасы ММ Рэлей сандар жазықтығында мынадай түрде анықталады:

$$\tau_{11} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \tau_{12}\right) R_1 + \left(\tau_{11} - \frac{A_1}{A_2} \tau_{21}\right) R_2 = \gamma^4 (\tau_{11} - \tau_{12} \tau_{21}) \quad (6)$$

Бұл теңдеу Рэлей сандар жазықтығын ( $R_1, R_2$ ) екі аймаққа бөлетін ММ сызығын береді, яғни өшетін (диффузия) және өсетін (конвекция) монотонды ұйытқу аймақтарын көрсетеді.

ММ сызығында диффузиялық үдерістің бұзылуы байқалады және каналдың жартысымен өтетін екі ағын пайда болады, мысалы, бір ағын жоғары, екіншісі төмен бағытталған.

Мысалы,  $0,21\text{C}_3\text{H}_8 + 0,79\text{CO}_2 - \text{N}_2\text{O}$  (концентрация мольдік үлеспен берілген) жүйесі үшін бұл теңдеу суреттен көрініп тұрғандай, Рэлей сандар жазықтығын диффузия – I (ұйытқу өшетін) және механикалық тепе-теңдіктің орныксыздығына – II (ұйытқу өсетін) аймаққа бөледі. Рэлейдің сыни парциаль мәні теориялық табылған мәнге сәйкес келеді, яғни мынаған тең  $R_{кр} = 31,12$ .

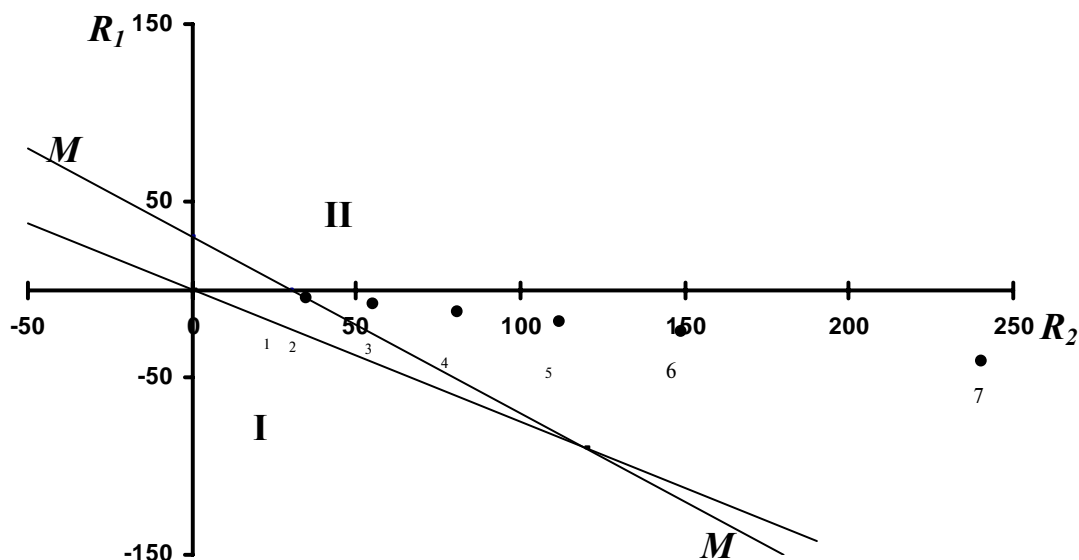
Алынған теориялық есептеулердің дұрыстығына көз жеткізу үшін екі колбалық әдіспен жасалған тәжірибе мәндерін қарастырайық [4, 5]. Тәжірибеде колбалар мынандай өлшемдегі  $(0,17 \cdot 0,05 \cdot 0,003) \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$  жазық қуыс тәрізді диффузиялық каналмен жалғанған. Жүргізілген тәжірибе мәндері бойынша  $0,21\text{C}_3\text{H}_8 + 0,79\text{CO}_2 - \text{N}_2\text{O}$  жүйесі үшін  $p = 0,25$  МПа қысымда диффузиялық каналда араласу режимінің ауысуы байқалады. Бұл қысымнан төмен қысымдарда – диффузия, ал осы қысымнан жоғарғы қысымдарда – конвекция құбылысы өтеді.

Тәжірибе мәндерін Рэлей сандар жазықтығына мына формула арқылы енгізуге болады:

$$R_1 = \frac{g n a^2 b^2 \Delta m_1}{\rho \nu D_{11}^*} \cdot \frac{\Delta c_1}{L}, \quad R_2 = \frac{g n a^2 b^2 \Delta m_2}{\rho \nu D_{22}^*} \cdot \frac{\Delta c_2}{L}, \quad (7)$$

мұндағы  $m_i$  –  $i$ -ші сортты молекуланың массасы (есептеулер үшін  $i = 1, 2, 3$  индекстерін қоспа компоненттерінің нөмірін белгілеу үшін қолдандық 1 –  $\text{N}_2\text{O}$ , 2 –  $\text{CO}_2$ , 3 –  $\text{C}_3\text{H}_8$ ,  $\Delta m_1 = m_1 - m_3$ ,  $\Delta m_2 = m_2 - m_3$ );  $a$  – канал қалыңдығы;  $b$  – канал ұзындығы.

Суретте жүргізілген сандық есептеулер мен тәжірибе нәтижелерінің салыстырылуы көрсетілген. Суреттен көріп отырғандай  $p = 0,3$  МПа сәйкес келетін 2-ші нүкте орнықтылық сызығында жатыр. Ал жоғарғы қысымдарға сәйкес келетін 3-ші және 7-ші нүктелер орныксыздық аймағында жатыр.  $p = 0,3$  МПа қысым үшін есептелген 1-ші нүкте массатасымалдаудың орнықтылық аймағында жатыр.



Нүктелер тәжірибелік мәндер, диффузия үшін – ○, конвекция үшін – ●.

Нүктелер астындағы сандар қысым мәндерін анықтайды:

1 –  $p = 0,2$  МПа; 2 –  $p = 0,3$  МПа; 3 –  $p = 0,4$  МПа; 4 –  $p = 0,5$  МПа; 5 –  $p = 0,6$  МПа; 6 –  $p = 0,7$  МПа; 7 –  $p = 0,9$  МПа.

0,21C<sub>3</sub>H<sub>8</sub> + 0,79CO<sub>2</sub> – N<sub>2</sub>O жүйесі үшін диффузиялық және конвективтік араласу аймақтары

Сонымен диффузиялық каналдың өлшемдерін ескере отырып «диффузия-конвекция» араласу режимін сипаттайтын осы қарастырылып отырған математикалық үлгімен алынған сандық есептеулердің тәжірибелік нәтижелермен сәйкестігі расталды.

#### ӘДЕБИЕТ

1. *Kosov V.N., Seleznev V.D., Zhavrin Yu.I.* The diffusion instability of isothermal three-component gas mixtures // *Thermophysics and Aeromechanics*, 7 (1), 127-135, 2000.
2. *Zhavrin Yi., Kosov N.D., Novosad Z.I.* Effective diffusion coefficient method for studying description of nonstationary diffusion in multicomponent gas mixture // *Zhurnal fizicheskoi khimii*. – 1975. – V. 49, № 3. – P. 706-709.
3. *Akylbekova G.A., Kossov V.N., Poyarkov I.V., Zhavrin Yu.I.* Diffusion in isothermal ternary gas mixtures // 5<sup>th</sup> European Thermal-Sciences Conference, Eindhoven, Netherlands, May 18-22, 2008.
4. *Zhavrin Yu.I., Mukamedenkyzy V., Poyarkov I.V.* Diffusive and convective mixing of propane carbon dioxide binary mixture with pure nitrogen protoxide // *Technical physics*. – 2007. – V. 52, № 7. – P. 947-949.
5. *Zhavrin Yu.I., Moldabekova M.S., Poyarkov I.V., Mukamedenkyzy V.* Experimental study of diffusion instability in three-component gas mixture without density gradient // *Technical Physics Letters*. – 2011. – V. 37, № 8. – P. 721-723.

*В. Мукамеденкызы, О. В. Федоренко, М. К. Асембаева*

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ МОЛЕКУЛЯРНОГО МАССОПЕРЕНОСА ДЛЯ ПЛОСКОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО КАНАЛА С МАССОНЕПРОНИЦАЕМЫМИ СТЕНКАМИ

*V. Mukhamedkisi, O. V. Fedorenko, M. K. Asembayeva*

#### DETERMINATION OF THE MOLECULAR MASS TRANSFER BOUNDARY FOR THE PLANE VERTICAL CHANNAL WITH THE MASS RESISTIBLE WALLS

С. ТОКТАРБАЙ<sup>1</sup>, Э. КЕВЕДО<sup>2</sup>, М. АБИШЕВ<sup>1</sup>

## ВНУТРЕННЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

<sup>2</sup>Национальный университет Мексики, Мехико

*Получено новое точное внутреннее решение уравнений Эйнштейна для гравитирующего шара, заполненного идеальной жидкостью без учета вращения.*

**Введение.** В рамках общей теории относительности гравитационное поле описывается метрическим тензором  $g_{\mu\nu}$ , который удовлетворяет уравнению Эйнштейна[1]:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\chi T^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $R^{\mu\nu}$  – тензор Риччи;  $R$  – скаляр кривизны;  $T^{\mu\nu}$  – тензор распределения энергии-импульса системы, а постоянная  $\chi$  связана с гравитационной постоянной Ньютона.

В случае компактных объектов, которые отличаются тем, что их размер мал по отношению к массе, нам необходимо решить два вида уравнений:

В первом случае  $T^{\mu\nu} = 0$  – это уравнение для вакуума, его решение находится с помощью следующих уравнений Эйнштейна:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0 \quad (2)$$

Внутри тела тензор энергии-импульса не равняется нулю, и поэтому нужно решить уравнение в общем виде. Для этого тензор нужно задать в частном виде. В случае компактных объектов тензор энергии-импульса рассматривается как идеальная жидкость, которая имеет вид:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta}, \quad (3)$$

где  $\rho$  – плотность энергии;  $p$  – давление тела, а  $u^\beta$  4-скоростя наблюдаеля находящейся внутри тела.

В 1917 году К.Шварцшильд получил одно из наиболее важных решений для уравнений Эйнштейна. Это решение, которое обладает сферической симметрией, имеет следующий вид [2, 3]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2), \quad (4)$$

где  $M$  – масса тела в геометрических единицах, т.е. когда  $G = c = \hbar = 1$ .

Мы говорим о том, что последнее решение (4) описывает внешнее гравитационное поле черной дыры, когда  $M$  мало по сравнению с радиусом горизонта. Если же поверхность тела больше, чем радиус горизонта, тогда мы считаем, что это решение описывает внешнее поле сферически-симметричного статического объекта. Это метрика по-прежнему является решением в вакууме, т.е. тензор энергии-импульса  $T^{\mu\nu}$  равняется нулю.

Если же смотреть на решение во внутреннем поле, тогда можно доказать, что оно записывается в таком виде:

$$ds^2 = \left( \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} \right)^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{R^3} r^2} - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2), \quad (5)$$

где  $R$  – радиус сферы а  $M = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$ . Для тензора энергии-импульса мы рассматриваем тот частный случай, когда плотность  $\rho$  постоянна. Однако этот случай довольно простой, так как компактные объекты в общем виде не имеют постоянной плотности.

Целью данной работы является построение более физического решения. Для этого предположим, что плотность компактного объекта не постоянна, а зависит от радиальной координаты  $r$ .

Настоящая работа состоит из трех разделов. В первом разделе рассмотрено уравнение Эйнштейна с плотностью, зависящей от радиальной координаты  $r$ . Во втором разделе мы найдем частное решение уравнения Эйнштейна для внутренних частей компактного объекта. Мы докажем, что можно найти интервал значения постоянных коэффициентов и представить решение в виде графика, который описывает давление. Давление, в свою очередь, имеет физическую интерпретацию в том смысле, что оно постоянно в центре тела и равняется нулю на поверхности, и, что самое главное, нигде не имеет сингулярности. В заключении, обсуждены наши результаты и предложены другие задачи, которые могут обобщить полученные результаты.

**Внутреннее уравнение Эйнштейна.** Чтобы изучать уравнение Эйнштейна в случае идеальной жидкости, начнем с изучения вида линейного элемента в сферических координатах.

Можно написать линейный элемент в следующем виде [3,4]:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)} + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2), \quad (6)$$

где  $\Phi = \Phi(r)$ ,  $m = m(r)$  – функции зависящие только от  $r$ .

Следовательно, в уравнении (6) только две функции, которые нужно определить с помощью уравнения Эйнштейна. Если написать их в общем виде, получим выражение для градиента потенциала  $\Phi(r)$  в виде [4]:

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r(r - 2m(r))}, \quad (7)$$

а функция массы определяется интегралом

$$m(r) = 4\pi \rho(r) r^2. \quad (8)$$

Кроме этого следует иметь в виду закон сохранения энергии. Для идеальной жидкости уравнения принимают особенно простой вид, т.е.  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ , и в этом случае записываются в виде градиента давления

$$\frac{dp}{dr} = \frac{(p + \rho(r)) + (m(r) + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m(r))}. \quad (9)$$

В нашем случае видно, что для внутреннего решения уравнений Эйнштейна необходимо вводить четыре уравнения, плюс граничные условия – значит, имея уже три уравнения, нам необходимо еще одно уравнение, обычно это последнее выражение называется уравнением состояния:

$$p = p(\rho). \quad (10)$$

Это значит, что, исходя из физических соображений, мы должны задать какую-нибудь специфическую функцию, включающую в себя как давление, так и плотность объекта.

Обычно в качестве уравнения состояния берут баротропическое уравнение, где давление пропорционально плотности:

$$p = \omega \rho, \quad (11)$$

здесь  $\omega$  – баротропический фактор.

Однако, в нашем случае, мы зададим функцию плотности, которая в явном виде зависит от координат  $r$ . Для определенности запишем:

$$\rho(r) = \rho_c - C_1 r - C_2 r^2 - C_3 r^3, \quad (12)$$

где  $C_1, C_2, C_3$  – постоянные коэффициенты.

**Частное решение.** Теперь мы решим уравнение Эйнштейна с помощью численных методов. Для этого необходимо фиксировать значение постоянных и решать остальные уравнения.

Выше уже была указана необходимость замкнутости уравнений Эйнштейна – нужно задать ещё одно уравнение, которым обычно является уравнение состояния  $p = p(\rho)$ .

Еще один указанный способ замыкания системы дифференциальных уравнений Эйнштейна состоит в том, чтобы задать явный вид для функции плотности  $\rho = \rho(r)$  или функции давления  $p = p(r)$ . Чтобы выбрать специфический вид функции нужно иметь в виду физическое поведение данной величины.

Постоянная  $\rho_c$  определяет значение плотности в центре тела и должно быть конечной величиной. Постоянные  $C_1, C_2, C_3$  выбираются таким образом, чтобы значение плотности любой точки внутри тела было конечным. Кроме этого требуется, чтобы на поверхности тела, когда  $r = R$  (граничные условия), плотность была постоянной:

$$\rho(R) = \rho_c - C_1 R - C_2 R^2 - C_3 R^3 = \rho_R. \quad (13)$$

Также в этой работе мы будем рассматривать только те случаи, когда плотность на поверхности равняется нулю:

$$\rho_R = 0 \Rightarrow \rho_c = C_1 R + C_2 R^2 + C_3 R^3. \quad (14)$$

Теперь рассмотрим функцию массы  $m(r)$ , которая согласно уравнению (8) принимает вид:

$$m(r) = \frac{\pi}{15} r^3 (20\rho_c - 15C_1 r - 12C_2 r^2 - 10C_3 r^3). \quad (15)$$

Общую массу тела можно вычислить как:

$$M = \int_0^R m(r) dr. \quad (16)$$

При выборе постоянных коэффициентов  $C_1, C_2, C_3$  нужно, чтобы решение соответствовало физическим условиям задачи. Кроме того, значение общей массы важно для определения значений функции  $\Phi$  на поверхности тела:

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{R}. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь уравнения для функции  $\Phi = \Phi(r)$  и давления  $p = p(r)$ . Нам не удалось найти аналитическое решение этих уравнений, однако мы можем воспользоваться численным методом решения этих функций. Для этого необходимо задать подходящие граничные условия. Исходя из физических соображений мы потребуем, чтобы давление на поверхности тела равнялось нулю и имела конечное значение в центре тела, т.е.:

$$p_R = p(R) = 0; \quad p(r=0) = p_c < \infty. \quad (18)$$

Кроме этого, функция давления  $p(r)$  должно быть конечной и положительной внутри тела:

$$0 < p(r) < \infty; \quad 0 \leq r \leq R. \quad (19)$$

Это обозначает, что постоянные  $C_1, C_2$  и  $C_3$  не могут быть полностью произвольные, а должны быть выбраны таким образом, чтобы высшее сложенные условия имели место. В этом и заключается самая важная проблема нахождения решений дифференциальных уравнений с помощью численных методов. В самом деле, если выбрать значение постоянных произвольным образом, обычно полагаются решения для давления, которые не равняются нулю на поверхности тела, или для которых существует район внутри тела с отрицательными значениями. Очевидно, такие решения не могут быть физическими.

Мы исследовали разные интервалы для значения постоянных  $C_1, C_2$  и  $C_3$  обнаружили, что следующие значения приводят к физическим результатам,

$$C_1 = \frac{1}{2}; \quad C_2 = \frac{1}{6}; \quad C_3 = \frac{1}{24}. \quad (20)$$



Если выбрать радиус тела как  $R = 0.4$ .

Для этого частного случая интегрирования уравнения (9) дает в качестве решения функцию вида:

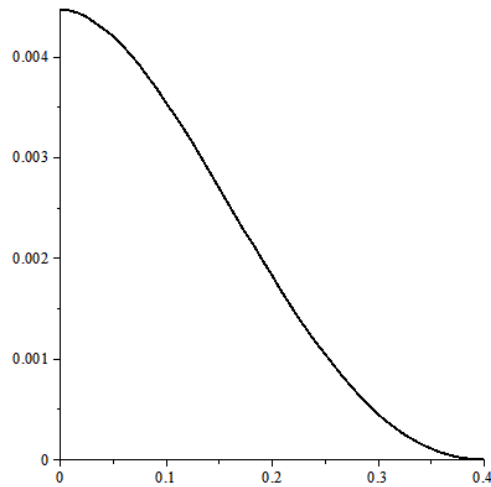


График 1

очевидно, это функция для давления удовлетворяет все физические условия, которые мы представили раньше. С помощью этого численного решения для давления мы интегрируем уравнения (7) и получаем для функции  $\Phi(r)$ :

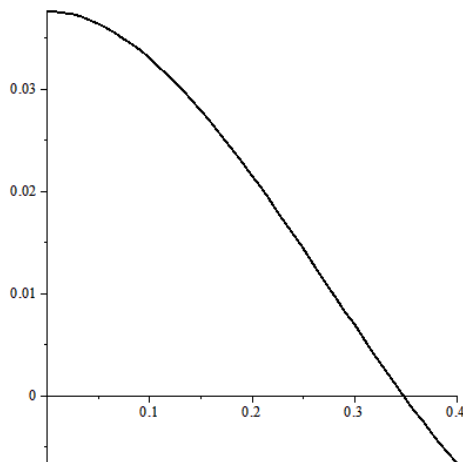


График 2

Заметим, что для этого выбора постоянных  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ , из уравнения (17) и граничного условия (18), мы получаем величины:

$$M = 0.002633; \quad \Phi(R) = 0.0066.$$

Эти значения были использованы, чтобы получать численные решения, заданные на графиках (1) и (2).

Одно очень важное условие, которое должно удовлетворять любое физическое решение – это предел Чандрасекара [5], который утверждает, что распределения массы может быть стабильное только если соотношение  $\frac{M}{R} < \frac{4}{9}$  удовлетворяется. В самом деле, при значении  $\frac{M}{R} \geq \frac{4}{9}$  наступает гравитационный коллапс и условие статичности линейного элемента (6) нарушается. Исходя из этих соображений мы потребуем, что функция массы  $m(r)$  удовлетворяет это условие для всех значений радиальной координаты  $r$ , т.е.:

$$\frac{m(r)}{r} < \frac{4}{9}. \quad (21)$$

На графике (3) доказывається справедливость этого условия.

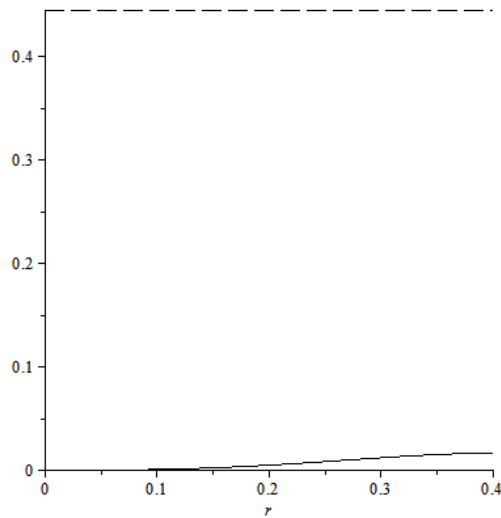


График 3

**Заключение.** В этой работе мы нашли точное решение уравнений Эйнштейна, которые описывает гравитационное поле сферического симметричного распределения массы. Внешнее поле описывается с помощью метрики Шварцшильда, а для внутреннего поля мы обнаружили численное решение с помощью функции плотности в виде полинома с четырьмя постоянными.

Найденное решение удовлетворяет все физические условия внутреннего распределения массы, а также условие Чандрасекара. Это значит, что решение можно использовать, чтобы описывать гравитационное поле внутри тела.

Очевидно, найденное решение следует дальше исследовать. В частности нужно найти интервалы  $C_1, C_2, C_3, \rho_c$  и  $\rho_r$  для которых решение стабильное, в том смысле, что удовлетворяется лимит Чандрасекара, и физическое, в том смысле, что давление, плотность, и общая масса всегда положительные величины. Важно тоже изучать случай когда  $\rho_r \neq 0$ , который соответствует телу с твердой поверхностью.

В этой работе мы изучали только случай не вращающегося тела. Очевидно, это очень важное условие, чтобы решить дифференциальные уравнения поля. Однако все реальные астрофизические объекты вращаются. Если взять метрику Керра в качестве метрики для внешнего поля, известно, что найти внутреннее решение – это задача весьма сложная, которую не удалось решить в течении последних 50 лет. Поэтому, мы предлагаем другой подход с помощью мультипольных моментов. Для этого можно взять на пример самую простую статичную метрику с квадрупольным моментом [4]. С помощью метода, представленный в этой работе, можно попытаться найти внутреннее решение. Чтобы иметь в виду также вращение тела, предлагается использовать методы генерирования внешних решений [5]. Затем следует обобщить метод, представленный в этой работе с учетом вращения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. О космологической проблеме // Собрание научных трудов. Т. II. – М.: Наука, 1966. – 881 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
3. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. II. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
4. Quevedo H. // Forts. Physik **38** (1990) 733.
5. Quevedo H. // Gen. Rel. Grav. **43** (2010) 1141.

*С. Тоқтарбай, Э. Кеvedo, М. Әбішев*

### ЭЙНШТЕЙН ТЕНДЕУІНІҢ ІШКІ ШЕШІМДЕРІ

Айналмалығы есепке алынбай мінсіз сұйықтықпен толтырылған гравитациялық шар үшін Эйнштейн тендеуінің жаңа нақты ішкі шешімдері табылды..

*S. Toktarbay, Ay. Kevedo, M. Abishev*

### INTERNAL SOLUTION OF EINSTEIN'S EQUATIONS

We postulate an ansatz for the behavior of the density of a spherically symmetric mass distribution such that it is finite at the center of the body and vanishes at the surface. With this particular density we integrate the corresponding Oppenheimer-Volkoff equation to obtain a pressure function that vanishes at the surface of the body and is finite everywhere inside the body. The metric functions are obtained numerically by using the values of the exterior Schwarzschild solution as initial conditions. It is shown that there exists a range of values for the density and the pressure in the center of the body such that no gravitational collapse can take place.

С. А. ЖАУГАШЕВА, М. Б. АЙТКАЗИН, С. К. АУБАКИРОВА

## ИССЛЕДОВАНИЕ НУКЛОН-НУКЛОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ПОДХОДЕ БЕТЕ-СОЛПИТЕРА

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

*В статье представлено исследование связанного и рассеянного состояний (np)-системы в рамках подхода Бете-Солпитера с сепарабельным ядром взаимодействия. Проведенные в подходе Бете-Солпитера релятивистские и нерелятивистские расчеты сечения в различных кинематических условиях и сравнение их друг с другом и с экспериментальными данными показали необходимость улучшения предложенных ранее ядер взаимодействий. Предложенный подход является релятивистской ковариантной моделью нуклон-нуклонных взаимодействий, позволяющей описывать процессы с участием дейтрона в широкой области энергий.*

**1. Введение.** Проблема описания ядерных взаимодействий методами квантовой теории поля [1], которая великолепно проявила себя в квантовой электродинамике, возникла из-за большой константы связи сильных взаимодействий, так как при использовании разложения по ней в ряд теории возмущений невозможно ограничиться несколькими членами ряда. Поэтому, чтобы иметь возможность исследовать ядерные взаимодействия, стали прибегать к различного рода упрощениям: учитывались только предположительно ведущие вклады в описываемые процессы; рассматривались системы, состоящие из небольшого числа нуклонов. Подобными соображениями продиктован наш выбор реакции электрорасщепления дейтрона. В этом случае мы имеем дело с простейшей системой, состоящей всего из двух нуклонов, что позволяет избежать сложностей учета коллективных взаимодействий. К тому же энергия их связи мала по масштабам ядерных сил. Эти характеристики делают дейтрон одним из самых популярных инструментов исследования нуклон-нуклонных взаимодействий. Электромагнитное взаимодействие между налетающим электроном и дейтроном намного слабее сильного взаимодействия между нуклонами в дейтроне, что позволяет рассматривать электрорасщепление в однофотонном приближении. В таком случае электронный и ядерный токи в матричном элементе, определяющем процесс, факторизуются. Электронный ток хорошо известен, так что при расчете наблюдаемых можно исследовать свойства ядерного тока, который описывает взаимодействие между нейтроном и протоном. Кроме того, так как между налетающим электроном и дейтроном есть только электромагнитное взаимодействие, описание сильных взаимодействий сводится к описанию взаимодействия между нуклонами в дейтроне. Из-за разделения токов можно выделить электронную часть, и тогда оставшаяся адронная будет описывать процесс поглощения или излучения виртуального фотона парой нуклонов. Таким образом, разработанная модель описания процесса электрорасщепления в дальнейшем может быть использована при рассмотрении рассеяния протонов на нейтронах с излучением фотонов, которые распадаются на лептон-антилептонные и мезон-антимезонные пары. Исследование таких процессов актуально в настоящее время [2] в связи с поисками кварк-глюонной плазмы и изучением различных экзотических реакций. Исследование свойств такой двухчастичной системы, как дейтрон, интересно и с той точки зрения, что реакции с его участием имеют место внутри звезд, так что получаемые результаты можно использовать для понимания процессов в звездном веществе [3]. Система двух связанных частиц также является простейшей при описании ее с точки зрения кваркового строения.

Исследования электрорасщепления дейтрона проводятся более 50 лет [4]. Несмотря на простоту самой системы, до сих пор не удалось описать ее точно. Существует множество моделей описания реакции электрорасщепления (под. см. в [5]). Одним из моделей является подход, основанный на уравнении Бете-Солпитера [6], где развивается релятивистское описание дейтрона. Принципы релятивистского описания (все частицы описываются полями, ковариантность) заложены в него как исходные посыпки. Для решения данного уравнения необходимо знать входящее в него ядро, представляющее собой сумму всех неприводимых диаграмм Фейнмана, описывающих процесс взаимодействия. Однако найти его не проще, чем решить любое квантово-полевое уравнение в случае сильных взаимодействий. Получить решение удастся в рамках приближения, основанного

на разложении в ряд теории возмущений по константе связи. Поскольку приходится иметь дело с сильными взаимодействиями, полученный ряд, как уже было сказано выше, нельзя оборвать в каком-нибудь порядке, а надо проводить суммирование всех членов ряда. Это удастся выполнить только в лестничном приближении.

В работе Булова развивается подход, основанный на использовании уравнения Бете-Солпитера, когда ядро взаимодействия представляется в сепарабельном виде. Это позволяет преобразовать рассматриваемую систему интегральных уравнений в систему линейных уравнений, которая разрешима. Таким образом, для описания дейтрона в таком подходе необходимо знать параметры функций, составляющих используемое сепарабельное ядро. Параметры находятся из анализа экспериментальных данных по фазам, низкоэнергетическим характеристикам (длина рассеяния, эффективный радиус т.д.) упругого рассеяния протонов на нейтронах и дейтрона (энергия связи, асимптотическое отношение  $p_{D/S}$  и т.д.). Причем, так как в этом случае нулевая компонента 4-импульса нуклонов в дейтроне не исключается из рассмотрения, удастся сохранить ковариантность описания системы связанных нуклонов, что важно для моделей, претендующих на последовательное релятивистское описание. Как было показано в [7], это свойство важно для описания различных наблюдаемых как в случае рассеянного, так и связанного состояния (np)-системы. В рамках подхода БС с сепарабельным ядром удалось успешно описать процессы упругого и глубоко неупругого рассеяния электрона на дейтроне [8], а также фоторасщепление дейтрона [9]. Реакция электрорасщепления требует отдельного рассмотрения, поскольку наличие нулевой компоненты импульса в интегральном уравнении БС, которая в общем случае не фиксируется кинематикой, приводит к проблемам в вычислениях. Например, это сильно осложняет учет взаимодействия в конечном состоянии между вылетающими нуклонами. ВКС в большинстве случаев оказывает сильное влияние на наблюдаемые, и потому им нельзя пренебрегать. Однако с сепарабельными ядрами стандартного вида [10] подобное вычисление невозможно провести в принципе, так как они приводят к неинтегрируемым сингулярностям. Чтобы обойти эту трудность, мы использовали сепарабельные функции нового вида [11], которые не содержат полюсов на действительной оси [12] в комплексной плоскости нулевой компоненты импульса и, как следствие, не приводят к сингулярностям.

Таким образом, в данной работе предлагается новое сепарабельное ядро, не приводящее к неинтегрируемым выражениям, для описания различных парциальных состояний системы нейтрон-протон (np) с полным моментом  $J = 0, 1$ . В рамках подхода БС с сепарабельным ядром взаимодействия рассматривается реакция электрорасщепления дейтрона. Расчеты проводятся в импульсном приближении плоских волн. Исследуются аналитические особенности, присущие реакциям с участием электрона в однофотонном приближении, а именно: факторизация электронного и адронного токов в матричном элементе, описывающем реакцию. Проводится сравнение результатов релятивистского и нерелятивистского вычислений, а также приводится предельный переход от релятивистского выражения для адронного тока к нерелятивистскому. Для полноты изложения приведены формулы для расчета ВКС, хотя само вычисление в рамках данной работы не проводится.

**2. Исследование нуклон-нуклонных взаимодействий в подходе Бете-Солпитера.** Общий формализм описания (np)-взаимодействий основывается на решении интегрального уравнения Бете-Солпитера для состояний рассеяния. Амплитуда рассеяния для этих систем записывается в виде

$$T(p', p; P) = V(p', p; P) + \frac{i}{4\pi^3} \int d^4 k V(p', k; P) S_2(k; P) T(k, p; P) \quad (1)$$

где  $V$  – ядро взаимодействия (у нас – нуклонов в дейтроне);  $S_2$  – двухчастичная функция Грина. Тогда уравнение БС представляется в виде:

$$\Phi^{JM}(p; P) = \frac{i}{(2\pi)^4} S_2(p; P) \int d^4 k V(p, k; P) \Phi^{JM}(k; P), \quad (2)$$

где  $\Phi$  – амплитуда Бете-Солпитера, описывающая систему двух связанных нуклонов. Здесь  $p(p')$  – импульс начальных (конечных) нуклонов;  $P$  – полный импульс системы;  $J, M$  – полный угловой момент системы и его проекция. Основой подхода является представление ядра взаимодействия  $V$  в сепарабельном приближении в следующем виде:

$$V(p', p) = \mathcal{G}(p') \mathcal{L}\mathcal{G}(p), \quad (3)$$

где функции  $G$  называются формфакторами;  $A$  – матрица параметров. В этом случае каждое из интегральных уравнений (1), (2) можно свести к системе линейных уравнений, которая решается численным методом.

Также в работе предлагается параметризация формфакторов сепарабельного ядра (3) следующим образом:

$$g(p_0, \mathbf{p}) \sim \frac{1}{((p_0^2 - \mathbf{p}^2 - \beta^2)^2 + \alpha^4)^{n/2}} \quad (4)$$

где  $\alpha, \beta$  – параметры, которые определяются из анализа экспериментальных данных в упругом пр-рассеянии;  $n$  – любое целое число. Ядро взаимодействия с такими функциями не содержит полюсов на действительной оси в плоскости комплексной нулевой компоненты относительного импульса  $p_0$ . Это, в свою очередь, позволяет решить проблему, связанную с принципиальной невозможностью проведения вычислений наблюдаемых с релятивистским сепарабельным ядром [9] при больших энергиях, в котором полюсы по  $p_0$  приводят к неинтегрируемым сингулярностям при интегрировании по 3-мерному импульсу  $p$ . В рамках представленной модели выводятся формулы для наблюдаемых, с помощью которых вычисляются параметры ядра взаимодействия. Полученные численные значения для фаз пр-рассеяния и низкоэнергетических параметров (длина рассеяния, эффективный радиус и т.д.), а также характеристик дейтрона сравниваются с экспериментальными данными и результатами, полученными в других моделях.

Детально рассматривается электрорасщепление дейтрона в одно-фотонном приближении. Представлен вывод дифференциального сечения  $d^3\sigma/dE'd\Omega'dE_p$  для эксклюзивного процесса  $d(e, e'p)n$ , которое затем вычисляется в релятивистском и нерелятивистском подходах. Полученные результаты сравниваются с экспериментом в различных кинематических условиях при небольших переданных импульсах. Приводится предельный переход от релятивистского описания к нерелятивистскому. Обсуждается свойство факторизации адронной части в сечении, когда вылетающие нуклоны считаются свободными (приближение плоских волн) и не учитывается взаимодействие налетающего электрона с нейтроном в дейтроне.

Также выводится инклюзивное сечение  $d^3\sigma/dQ^2d|p_n|$  для электрорасщепления дейтрона  $d(e, e'n)p$ . Расчет такого сечения проводится при больших переданных импульсах  $Q^2$  и потому позволяет проверить различные модели электромагнитных формфакторов нуклонов. Кроме того, сравнение результатов, полученных в рамках различных моделей NN взаимодействий, позволяет исследовать влияние используемой модели и релятивистских эффектов.

**Заключение.** В рамках подхода Бете-Солпитера предложено сепарабельное ядро нуклон-нуклонных взаимодействий на основе нового класса функций, которые не содержат полюсов по нулевой компоненте относительного импульса на действительной оси и в расчетах не приводят к неинтегрируемым сингулярностям. Разработан метод вычисления наблюдаемых в различных реакциях с подобными функциями.

Параметры ядра найдены из анализа экспериментальных данных по упругому пр-рассеянию: низкоэнергетических характеристик (длина рассеяния, эффективный радиус) упругого пр-рассеяния и дейтрона (энергия связи, асимптотическое отношение и т.д.) и фаз рассеяния в парциальных каналах с полным угловым моментом  $J = 0, 1$ . Особенностью полученного ядра является широкая область применимости по энергиям взаимодействующих нуклонов.

В предложенном подходе исследована реакция эксклюзивного электрорасщепления дейтрона. Получено сечение для неполяризованных частиц в импульсном приближении без учета взаимодействия вылетающих нуклонов в рамках нерелятивистского и релятивистского подходов. Результаты проведенных численных расчетов находятся в хорошем согласии с экспериментом в обоих случаях при малых импульсах отдачи вылетающего нейтрона. Показано возрастание роли релятивистских эффектов с увеличением импульса.

Продемонстрировано характерное для процессов развала дейтрона свойство факторизации адронного тока в дифференциальном сечении в рамках импульсного приближения плоских волн, когда нейтрон рассматривается в качестве спектатора.

Проведенный с помощью нового ядра расчет инклюзивного сечения электрорасщепления при больших переданных импульсах показывает сильную зависимость от асимптотического поведения импульсного распределения используемой модели нуклон-нуклонных взаимодействий, а также от выбора модели формфакторов нуклонов. В импульсном приближении без учета взаимодействия в конечном состоянии удается получить хорошее согласие с экспериментом при небольших импульсах отдачи нейтрона.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wilbois T., Beck G., Arenhovel H. *Few-Body Syst.* 15 (1993) 39-66.
2. Salapura P. et al. (HADES Collaboration). *Acta Phys. Polon. B* 35 (2004) 1119-1129.
3. Ogawa K., Kamae T., Nakamura K. *Nucl. Phys. A* 340 (1980) 451-481.
4. Nakanishi N. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 43 (1969) 1-81.
5. Carbonell J., Karmanov V.A. *Eur. Phys. J. A* 27 (2006) 11-21.
6. Salpeter E.E., Bethe H.A., *Phys. Rev.* 84, No. 6 (1951) 1232-1242.
7. Machleidt R. *Phys. Rev. C* 63 (2001) 024001-1 – 024001-32 (arXiv:nucl-th/0006014).
8. Bondarenko S.G., Burov V.V., Molochkov A.V., Smirnov G.I., Toki H. *Prog. Part. Nucl. Phys.* 48 (2002) 449-535.
9. Bondarenko S.G., Burov V.V., Kazakov K.Yu., Shulga D.V. *Phys. Part. Nucl. Lett.* 1 (2004) 178-185.
10. Mathelitsch L., Plessas W., Schweiger W. *Phys. Rev. C* 26 (1982) 65-76.
11. Schwartz K., Frolich J., Zingl H.F.K., Streit L. *Acta Physica Austriaca* 53 (1981) 191-202.
12. Bondarenko S.G., Burov V.V., Pauchy-Hwang W.-Y., Rogochaya E.P. *JETP, Lett.* 87, iss. 12 (2008) 753-758.
13. Rupp G., Tjon J.A. *Phys. Rev. C* 41 (1990) 472-483.

*C. A. Жаугашева, М. Б. Айтқазин, С. К. Әубәкірова*

БЕТЕ-СОЛПИТЕР ЖУЫҚТАУЫНДА  
 НУКЛОН-НУКЛОНДЫҚ ӘСЕРЛЕСУДІ ЗЕРТТЕУ

Мақалада әсерлесудің сепарабелдік ядросы бар Бете-Солпитер жуықтау аясында (np)-жүйесінің байланысқан және шашыраған күйлері зерттеледі. Өртүрлі кинематикалық жағдайларда қиманың Бете-Солпитер жуықтауында өткізілген релятивистік және релятивистік емес есептеулері мен олардың бір-бірімен және тәжірибе нәтижелерімен салыстыруы бұрын ұсынылған әсерлесу ядросының жақсару керектігін көрсетеді. Ұсынылған жуықтау энергияның кең аймағында дейтронның қатысуымен өтетін үдерістерді сипаттауға мүмкіндік беретін нуклон-нуклондық әсерлесудің релятивистік коварианттық үлгісі болып табылады.

*S. A. Zhaugasheva, M. B. Aitkazin, S. K. Aubakirova*

RESEARCH OF NUCLEON-NUCLEON INTERACTIONS  
 IN AN APPROACH OF BETE-SOLPITER

In article there is presented research of the connected and diffused conditions of (np)-system within an approach of Bete-Solpiter with a separable nucleus of interaction. The conducted in an approach of Bete-Solpiter relativistic and nonrelativistic calculations of section in various kinematic conditions and their comparison with each other and with experimental data showed necessity of improvement of the interactions offered before nucleus of interaction. The offered approach is relativistic covariant model of nucleon-nucleon interactions, allowing to describe processes with participation of a deuteron in wide area of energy.

М. ДИНЕЙХАН, С. А. ЖАУГАШЕВА, Г. Г. САЙДУЛЛАЕВА, Н. ХАБЫЛ

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРИНЫ РАСПАДОВ $X(3872)$ МЕЗОНА В РАМКАХ КОВАРИАНТНОЙ МОДЕЛИ КВАРКОВ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

Для описания свойств  $X(3872)$  мезона использована ковариантная кварковая модель с инфракрасным конфайнментом. Вычислены ширины сильных распадов  $X(3872)$ -мезона  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$  и  $X \rightarrow D^0 + \bar{D}^0 + \pi^0$  которые, в основном, идут через промежуточные  $X \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$  и  $X \rightarrow D^* + \bar{D}$  состояния, лежащие вне массовой поверхности. Для разумных значений параметра  $\Lambda_X$  характеризующего размер  $X(3872)$ -мезона, найдено согласие с экспериментальными данными.

**1. Введение.** Узкий резонанс  $X(3872)$ , схожий по свойствам с чармонием, был открыт в 2003 году коллаборацией Belle [1] в реакции  $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ . Данный резонанс распадается на  $\pi^+ \pi^- J/\psi$  и имеет массу  $m_X = 3872.0 \pm 0.6(stat) \pm 0.5(syst)$  Мэв, которая близка к порогу рождения  $D$  и  $D^*$  мезонов:  $M_{D^0} + M_{D^{*0}} = 3871.81 \pm 0.25$  Мэв [2]. Было найдено, что его ширина меньше 2.3 Мэв на 90% уровне достоверности. Это состояние вскоре было подтверждено коллаборацией BaBar [3] и в  $p\bar{p}$ -столкновениях в лаборатории Ферми на теватроне в экспериментах CDF [4] и DØ [5].

Наиболее точное измерение массы, сделанное до настоящего времени есть  $M_X = 3871.61 \pm 0.16 \pm 0.19$  Мэв [6] и [7]. Усреднённое значение массы, приведенное в работе [4], равно

$$M_X = 3871.61 \pm 0.22 \text{ Мэв} \quad (1)$$

Из наблюдений распада  $X(3872) \rightarrow J/\psi \gamma$ , сделанного коллаборациями Belle [8] и BaBar [9], а также из углового анализа, выполненного коллаборацией CDF [10] было показано, что квантовыми числами  $X(3872)$  могут быть либо  $J^{PC} = 1^{++}$ , либо  $2^{-+}$ . Однако, наблюдение распадов  $X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0$  коллаборациями Belle и [11,12] позволило исключить выбор  $2^{-+}$ , поскольку данная мода, проходящая вблизи порога, должна быть сильно подавлена для  $J = 2$ . В работе [13] был представлен анализ всех данных распада  $Y(4S)$  и получено доказательство для существования каскадного распада  $X(3872) \rightarrow J/\psi \omega (\rightarrow 3\pi)$ . Это означает сильное нарушение изоспина, поскольку трёхпионный распад идёт в основном через промежуточный  $\omega$ -мезон с изоспином 0, в то время как двухпионный распад идёт в основном через промежуточный  $\rho$ -мезон с изоспином 1. Кроме того, поскольку двухпионный распад идёт в основном через промежуточный  $\rho$ -мезон, то весьма трудно это объяснить, используя интерпретацию  $X(3872)$  как простого  $c\bar{c}$  состояния чармония с изоспином 0. Сравнение наблюдаемого распределения по эффективной массе  $m_{3\pi}$  с результатами моделирования по Монте-Карло привело к заключению, что добавление одной единицы орбитального момента в систему  $X \rightarrow \omega J/\psi$  значительно улучшает описание данных. Это подразумевает отрицательную Р-чётность для  $X$ -мезона  $2^{-+}$ . В работе [14] на основе анализа угловых корреляций конечных продуктов распада  $X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$  было найдено хорошее согласие между экспериментальными данными и результатами моделирования по Монте-Карло без свободных параметров в случае  $1^{++}$ . Гипотеза о квантовых числах  $2^{-+}$  потребовала введения дополнительного комплексного параметра. При определённом значении данного параметра удалось также найти согласие между данными и результатами моделирования.

Наиболее интригующим вопросом в настоящее время является вопрос интерпретации  $X(3872)$ - мезона либо как сильно связанной молекулы с энергией связи



$M_X - (M_{D^{*0}} - M_{D^0}) = -0.30 \pm 0.40$  Мэв, либо как тетракварка, являющегося связанным состоянием цветных дикварков. В работе [15] на основе предположения о том, что  $X(3872)$  является  $D^0 \bar{D}^{*0}$  молекулой, было оценено сечение его рождения на теватроне в Фермилабе. Полученный верхний предел для сечения рождения оказался почти в 30 раз меньше значения сечения, наблюдаемого на эксперименте. На основе этого был сделан вывод, что маловероятно образование сильно связанной  $D^0 \bar{D}^{*0}$  молекулы при S-волновом резонансном рассеянии при высоких энергиях адронов. Интерпретация  $X(3872)$  как тетракварка была впервые предложена и применена для описания имеющихся экспериментальных данных в работе [16]. Используя эффективные лагранжианы для трёхчастичных взаимодействий с константами связи, оцененными из анализа, аналогичному случаю лёгких мезонов, были вычислены ширины сильных распадов  $X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$  и  $X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^- \pi^0$ . Было найдено, что ширина распада  $X$ -мезона составляет около 1.6 Мэв в соответствии с экспериментальной границей.

Напротив, ширина распада, вычисленная в работе [17] с применением правил сумм КХД для 4-х кваркового тока, оказалась значительно больше – около 50 Мэв. Таким образом, описание свойств сильных распадов  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi$ ,  $X \rightarrow J/\psi + 3\pi$  и  $X \rightarrow D + \bar{D} + \pi$  являются одним из актуальных проблем физики элементарных частиц. Наша работа посвящена изучению свойств сильных распадов  $X(3872)$  мезонов в рамках ковариантной модели кварков. Ковариантная модель кварков является эффективным квантовополевым подходом к адронным взаимодействиям, основанным на лагранжиане взаимодействия адронов с их составляющими кварками. Знание соответствующего интерполирующего кваркового тока позволяет вычислять самосогласованным образом матричные элемента физических процессов. Отличительной особенностью данного подхода является то, что многокварковые состояния, такие как барионы (три кварка), тетракварки (четыре кварка) и т.д., могут быть рассмотрены и описаны на том же уровне строгости, как и простейшие кварк-антикварковые системы (мезоны).

Работа построена следующим образом: во втором разделе коротко изложена некоторые детали ковариантной модели кварков. В третьем разделе изложили способ введения конфайнмента в развиваемую модель, т.е. способ устранения пороговых сингулярностей, соответствующих рождению кварков. В четвертом разделе вычислены ширины сильных распадов  $X(3872)$ -мезона.

**2. Лагранжиан и условие связанности.** В этом разделе даем краткое описание теоретических предпосылок, лежащих в основе ковариантной кварковой модели. Отправной точкой является релятивистски инвариантный лагранжиан, описывающий взаимодействие некоторого адрона с его составляющими кварками. При этом адронное состояние описывается полем  $H(x)$ , удовлетворяющим соответствующему свободному уравнению движения, а кварковая часть представляет собой интерполирующий кварковый ток  $J_H(x)$  с квантовыми числами данного адрона.

$$L_{\text{int}}(x) = g_H H(x) \cdot J_H(x) + h.c. \quad (2)$$

Отметим, что в случае тождественных частиц, т.е. когда античастица совпадает с частицей ( $\pi^0$ -мезон,  $\phi$ -мезон, и т.п.), эрмитово-сопряжённая часть совпадает с первоначальным лагранжианом, поэтому, её нужно опустить. В случае простейших кварк-антикварковых состояний (мезонов) интерполирующий кварковый ток записывается в виде:

$$J_M(x) = \int dx_1 \int dx_2 F_M(x; x_1, x_2) \bar{q}_2(x_2) \Gamma_M q_1(x_1) \quad (3)$$

Здесь  $\Gamma_M$  – матрица Дирака, обеспечивающая нужные квантовые числа для мезона:  $I$  – скаляр,  $i\gamma^5$  – псевдоскаляр,  $\gamma^\mu$  – вектор,  $\gamma^\mu \gamma^5$  – аксиал,  $\sigma^{\nu\mu} = (i/2)(\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu)$  – тензор. Вершинная функция  $F_M$  эффективно описывает распределение кварков внутри мезона. В принципе она может быть связана с амплитудой Бете-Салпетера, но на данном этапе мы будем считать её феноменологической функцией. Из требования трансляционной инвариантности следует, что эта функция должна удовлетворять соотношению  $F_M(x+a; x_1+a, x_2+a) = F_M(x; x_1, x_2)$ , где  $a$ -произвольный 4-х вектор. Мы выбираем следующую форму для функции  $F_M$ , удовлетворяющую данному условию:

$$F_M(x; x_1, x_2) = \delta(x - x_1 \omega_1 - x_2 \omega_2) \Phi_M((x_1 - x_2)^2), \quad (4)$$

где  $\omega_i = m_{q_i} / (m_{q_1} + m_{q_2})$ . Данный выбор соответствует выделению системы центра масс двух кварков и умножению на функцию  $\Phi_M$ , зависящей лишь от квадрата относительной координаты. От функции  $\Phi_M$  требуется достаточно быстрое убывание её Фурье-образа в евклидовой области.

Ковариантная модель кварков позволяет на единой основе описывать как простейшие  $q - \bar{q}$  - мезоны, так и более сложные многокварковые состояния.

Для исследований свойств  $X(3872)$  как тетракварка с квантовыми числами  $J^{PC} = 1^{++}$ , мы воспользуемся выбором тока, предложенного в работе [15]:  $[cq]_{S=0}[\bar{c}\bar{q}]_{S=1} + [cq]_{S=1}[\bar{c}\bar{q}]_{S=0}$ , ( $q = u, d$ ). Нелокальная версия этого 4-х кваркового интерполирующего тока выглядит следующим образом:

$$J_{X_q}^\mu(x) = \int dx_1 \dots \int dx_4 \delta\left(x - \sum_{i=1}^4 \omega_i x_i\right) \Phi_X\left(\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{dec} \left\{ [q_a(x_4) C \gamma^5 c_b(x_1)] \right. \\ \left. \times [\bar{q}_d(x_3) \gamma^\mu C \bar{c}_e(x_2)] + [q_a(x_4) C \gamma^\mu c_b(x_1)] [\bar{q}_d(x_3) \gamma^5 C \bar{c}_e(x_2)] \right\}, \quad (5)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_c = m_c / 2(m_q + m_c), \quad \omega_3 = \omega_4 = \omega_q = m_q / 2(m_q + m_c)$$

где матрица  $C = \gamma^0 \gamma^2$  связана с матрицей зарядового сопряжения для фермионов  $i \gamma^0 \gamma^2$ . Для удобства вычислений мы опускаем "i". Матрица  $C$  обладает следующими свойствами:

$$C = C^+ = C^{-1} = -C^T, \quad C \Gamma C^{-1} = \pm \Gamma, \quad ("+" \rightarrow S, P, A \quad "-" \rightarrow V, T) \quad (6)$$

Индексы  $a_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  являются индексами цветной группы  $SU_c(3)$ . Для протона имеются два независимых тока:  $\Gamma^A \otimes \Gamma_A = \gamma^\alpha \otimes \gamma_\alpha$  (векторный ток) и  $\Gamma^A \otimes \Gamma_A = \sigma^{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\alpha\beta}$  (тензорный ток).

Нумерация координат  $x_i$  выбрана таким образом, чтобы получить удобную расстановку пропагаторов и вершин в диаграммах Фейнмана.

Эффективный лагранжиан, описывающий связь  $X_q$ -мезона с его конститuentами имеет вид

$$L_{\text{int}} = g_X X_{q\mu}(x) \cdot J_{X_q}^\mu(x), \quad (q = u, d). \quad (7)$$

Следуя предложению авторов работы [15], будем считать физическими состояниями суперпозицию  $X_u$  и  $X_d$  состояний:

$$X_l \equiv X_{\text{low}} = X_u \cos \theta + X_d \sin \theta, \quad X_h \equiv X_{\text{high}} = -X_u \sin \theta + X_d \cos \theta. \quad (8)$$

Константы связи  $g_H$  в уравнении (2) и [19] определяются из условия связности  $Z_H = 0$ , предложенному работами [20, 21] и в дальнейшем используемому во многих разделах физики частиц (для обзора, см. [22]). Здесь  $Z_H$  константа перенормировки волновой функции адрона. Условие связности означает, что константа перенормировки адронного поля  $Z_H$ , появившейся в результате взаимодействия с его конститuentами должна быть положена равной нулю  $Z_H = 0$ . В случае простейшего скалярного (псевдоскалярного) бесспинового поля данное условие записывается в виде

$$Z_M = 1 - g_M^2 \Pi'_M(m_M^2) = 0, \quad (9)$$

где  $\Pi'_M(m_M^2)$  есть производная массового оператора.

Свободный пропагатор конститuentного кварка с массой записывается  $m_i$  следующим образом:

$$S_i(k) = 1 / m_i - \not{k}. \quad (10)$$

Для упрощения вычислений мы будем использовать гауссову форму для вершинной функции  $\tilde{\Phi}_H(-k^2)$ :

$$\tilde{\Phi}_H(-k^2) = \exp(k^2 / \Lambda_H^2), \quad (11)$$

где параметр  $\Lambda_H$  характеризует размер соответствующего связанного состояния  $H$ . В случае 4-х кваркового состояния массовый оператор определяется 3-х петлевой диаграммой. При вычислении

нам понадобится Фурье-образ вершинной функции  $X$ -мезона  $\Phi_X \left( \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2 \right)$  в уравнении (5).

Удобнее всего найти Фурье-образ с помощью введения координат Якоби в системе из 4-х кварков:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \frac{2\omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{2\sqrt{2}} \rho_1 - \frac{\omega_3 - \omega_4}{2\sqrt{2}} \rho_2 + \frac{\omega_3 + \omega_4}{2} \rho_3, \\ x_2 &= x - \frac{2\omega_1 + \omega_3 + \omega_4}{2\sqrt{2}} \rho_1 - \frac{\omega_3 - \omega_4}{2\sqrt{2}} \rho_2 + \frac{\omega_3 + \omega_4}{2} \rho_3, \\ x_3 &= x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\sqrt{2}} \rho_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_4}{2\sqrt{2}} \rho_2 - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \rho_3, \\ x_4 &= x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\sqrt{2}} \rho_1 - \frac{\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_3}{2\sqrt{2}} \rho_2 - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \rho_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $x = \sum_{i=1}^4 x_i w_i$  и  $\sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i - x_j)^2 = \sum_{i=1}^3 \rho_i^2$ .

**3. Инфракрасный конфайнмент.** В этом разделе мы изложим способ введения конфайнмента в развиваемую модель, т.е. способ устранения пороговых сингулярностей, соответствующих рождению кварков. Пороговые сингулярности возникают вследствие того, что мы используем свободные пропагаторы кварков при построении фейнмановских диаграмм, описывающих те или иные матричные элементы физических процессов.

Рассмотрим произвольную фейнмановскую диаграмму, состоящую из  $n$  кварковых пропагаторов  $S$ ,  $l$  петель с импульсными переменными интегрирования  $k$ ,  $m$  вершин с гауссовыми вершинными функциями  $\Phi$ . В пространстве Минковского данная диаграмма может быть представлена в виде:

$$\Pi(p_1, \dots, p_m) = \int [d^4 k]^l \prod_{i=1}^m \Phi_{i+n}(-K_{i+n}^2) \prod_{i_3=1}^n S_{i_3}(\tilde{k}_{i_3} + v_{i_3}), \quad K_{i+n}^2 = \sum_{i_2} (\tilde{k}_{i_2}^{(i_2)} + v_{i_2}^{(i_2)})^2. \quad (13)$$

где 4-х вектора  $\tilde{k}_i$  являются линейными комбинациями петлевых переменных интегрирования  $k_i$ , а вектора  $v_i$  являются линейными комбинациями внешних импульсов. Мы опустили возможные произведения матриц Дирака, поскольку они не зависят от импульсных переменных. Для простоты все внешние импульсы выбраны входящими в вершины так, что  $\sum_{i=1}^m p_i = 0$ .

Далее мы используем представление Фока-Швингера для свободного пропагатора кварка

$$S(k) = (m + \not{k}) \int_0^\infty d\beta e^{-\beta(m^2 - k^2)}. \quad (14)$$

Без ограничения общности выбираем вершинные функции в виде гауссовых экспонент:

$$\Phi_{i+n}(-K^2) = \exp[\beta_{i+n} K^2] \quad i = 1, \dots, m. \quad (15)$$

где параметры  $\beta_{i+n} = s_i = 1/\Lambda_i^2$  характеризуют размеры адрона.

После интегрирования по петлевым импульсным переменным и выполнения вышеописанной операции дифференцирования, выражение для фейнмановской диаграммы в уравнении (13) записывается в виде

$$\Pi = \int_0^\infty d^n \beta F(\beta_1, \dots, \beta_n), \quad (16)$$

где  $F$  есть получившееся подынтегральное выражение. Удобно перейти к интегрированию по симплексу с помощью "вставки" единицы в подынтегральное выражение

$$1 = \int_0^{\infty} dt \delta t - \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \right) \quad (17)$$

и последующей замены переменных  $\beta_i = t\alpha_i$

$$\Pi = \int_0^{\infty} dt t^{n-1} \int_0^1 d^n \alpha \delta(1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i) F(t\alpha_1, \dots, t\alpha_n). \quad (18)$$

Для аналитического продолжения в область  $p^2 > 4m^2$ , где появляется мнимая часть, необходимо использовать иные представления. Однако, введение инфракрасного обрезания

$$\Pi_2^c(p^2) = \int_0^{1/\lambda^2} dt \frac{t}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha \exp\left[-tz_{loc} + \frac{st}{s+t} z_1\right], \quad (19)$$

обеспечивает абсолютную сходимость интеграла и отсутствие каких-либо сингулярностей при любых значениях  $p^2$ .

**4. Сильные распады**  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$  и  $X \rightarrow D + \bar{D} + \pi$ . Вначале вычислим матричные элементы переходов  $X \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$  и  $X \rightarrow D + \bar{D}^*$ . Поскольку в обоих случаях масса  $X(3872)$  находится очень близко к соответствующим кинематическим порогам

$$m_X - (m_{J/\psi} + m_\rho) = -0.90 \pm 0.41 \text{ МэВ}, \quad m_X - (m_{D^0} - m_{D^{*0}}) = -0.30 \pm 0.34 \text{ МэВ}.$$

векторные мезоны  $\rho$ ,  $\omega$  и  $D^*$  мезоны должны рассматриваться вне их массовой поверхности. Тогда матричный элемент перехода  $X_u \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$  записывается в виде:

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu}(X_u(p, \mu) \rightarrow J/\psi(q_1, \nu) + \nu^0(q_2, \rho)) = \\ = 6g_X g_{J/\psi} g_{\nu^0} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4 i} \bar{\Phi}_X(-K_1^2) \Phi_{J/\psi}\left(-\left(k_1 + \frac{1}{2}q_1\right)^2\right) \Phi_{\nu^0}\left(-\left(k_2 + \frac{1}{2}q_2\right)^2\right) \\ \times \text{tr}\left[i\gamma^5 S_c(k_1)\gamma^\nu S_c(k_1 + q_1)\gamma^\mu S_u(k_2)\gamma^\rho S_u(k_2 + q_2)\right] \\ = \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\nu} q_1^\rho M_{X J\nu}^{(1)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\nu} q_2^\rho M_{X J\nu}^{(2)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\rho} q_2^\nu M_{X J\nu}^{(3)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \nu\rho} q_1^\mu M_{X J\nu}^{(4)} \\ + \varepsilon^{q_1 \mu\nu\rho} M_{X J\nu}^{(5)} + \varepsilon^{q_2 \mu\nu\rho} M_{X J\nu}^{(6)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \mu\rho} q_1^\nu M_{X J\nu}^{(7)} + \varepsilon^{q_1 q_2 \nu\rho} q_2^\mu M_{X J\nu}^{(8)}, \\ K_1^2 = \frac{1}{2}\left(k_1 + \frac{1}{2}q_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(k_2 + \frac{1}{2}q_2\right)^2 + \frac{1}{4}(\omega_u q_1 - \omega_c q_2)^2, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\nu^0 = \rho, \omega$ . Отметим, что в случае, когда  $X$  и  $J/\psi$  находятся на массовой поверхности, т.е.  $\xi_\mu(q_1^\mu + q_2^\mu) = 0$  и  $\xi_\nu q_1^\nu = 0$ , число независимых лоренцевских структур уменьшается до 6.

Используя матричные элементы (20) для распада  $X \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$  можно вычислить ширины распадов  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$ , в предположении, что они идут через промежуточные  $\rho(\omega)$  резонансы. Мы будем использовать приближение узких резонансов, которое достаточно оправдано в данном случае, поскольку ширины  $\rho(\omega)$  резонансов значительно меньше их масс.

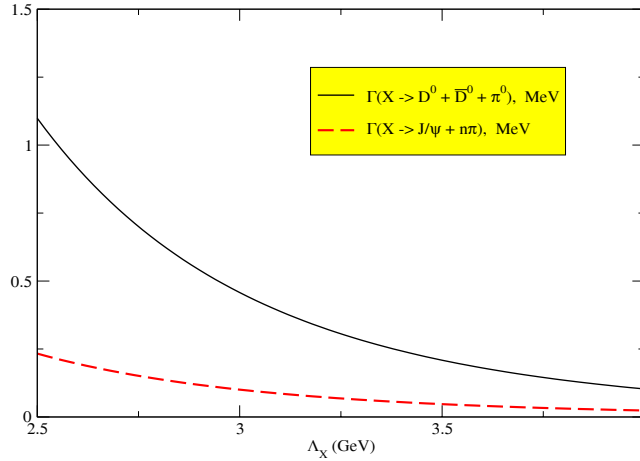
Имеются два новых свободных параметра: угол смешивания  $\theta$  в уравнении (8) и параметр  $\Lambda_X$ , характеризующий размер  $X$ -мезона. Мы изменяли параметр  $\Lambda_X$  в достаточно широком интервале  $2.5 \leq \Lambda_X \leq 4$  ГэВ, и нашли, что отношение

$$\frac{\Gamma(X_u \rightarrow J/\psi + 3\pi)}{\Gamma(X_u \rightarrow J/\psi + 2\pi)} \approx 0.25 \quad (21)$$

очень устойчиво при вариации  $\Lambda_X$ . Тогда, используя данный результат и среднее значение, полученное из экспериментальных данных, приведенных в [27], можно найти

$$\frac{\Gamma(X_{l,h} \rightarrow J/\psi + 3\pi)}{\Gamma(X_{l,h} \rightarrow J/\psi + 2\pi)} \approx 0.25 \cdot \left( \frac{1 \pm \tan \theta}{1 \mp \tan \theta} \right) \approx 1, \quad (22)$$

что даёт  $\theta \approx \pm 18.4^\circ$  для  $X_l \rightarrow "+"$  и  $X_h \rightarrow "-"$ , соответственно. Эти результаты согласуются с результатами полученных в работах [16]:  $\theta \approx \pm 20^\circ$  и [17]:  $\theta \approx \pm 23.5^\circ$ . Ширина распада является достаточно чувствительной к изменению параметра  $\Lambda_X$  как это показано на рисунке. В данном интервале абсолютное значение ширины распада  $\Gamma(X \rightarrow J/\psi + n\pi)$  меньше  $0.30 \text{ МэВ}$ , что соответствует экспе



Зависимость ширин распадов  $\Gamma(X_l \rightarrow \bar{D}^0 D^0 \pi^0)$  и  $\Gamma(X \rightarrow J/\psi + n\pi)$  от параметра  $\Lambda_X$ .

Мы брали массы и ширины  $D^{*+}$  и  $D^{*0}$  мезонов из данных [2] и [21], [44] (все размерные величины в единицах МэВ):

$$m_{D^{*+}} = 2010.27, \quad \Gamma_{D^{*+}} = 0.096, \quad m_{D^{*0}} = 2006.97, \quad B(D^{*+} \rightarrow D^+ \pi^0) = 0.307, \\ \Gamma_{D^{*0}} = 0.070, \quad B(D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^0) = 0.619.$$

Зная эти значения, ширина распада вычисляется по формуле:

$$\Gamma(X_l \rightarrow \bar{D}^0 D^0 \pi^0) = \cos^2 \theta \Gamma(X_u \rightarrow \bar{D}^0 D^0 \pi^0).$$

Зависимость ширины от параметра  $\Lambda_X$  показана на том же рисунке. Используя результаты [2]

$$10^5 B(B^\pm \rightarrow K^\pm X) \cdot B(X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-) = 0.95 \pm 0.19, \\ 10^5 B(B^\pm \rightarrow K^\pm X) \cdot B(X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0) = 10.0 \pm 4.0,$$

можно определить отношение

$$\frac{\Gamma(X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0)}{\Gamma(X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-)} = 10.5 \pm 4.7. \quad (23)$$

Теоретическое значение, полученное из отношений ширин распадов, показанных на рисунке, равно

$$\left. \frac{\Gamma(X \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0)}{\Gamma(X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-)} \right|_{\text{теор}} = 4.5 \pm 0.2. \quad (24)$$

**Заключение.** Коротко изложены экспериментальные и теоретические исследования свойства  $X(3872)$  мезона, которые получены в коллаборациях Belle [8], BaBar [9], CDF [4] и DØ [5]. Установлено что,  $X(3872)$  мезон не является дикварковой молекулой, а является именно тетракварковой структурой.

Обсуждены ковариантные лагранжианы, описывающие эффективное взаимодействие адронов с их составляющими кварками. Дано определение условия связности, являющегося эффективным инструментом для описания связанных состояний в рамках квантовой теории поля. Введено понятие инфракрасного конфайнмента, обеспечивающего отсутствие любых пороговых сингулярностей, соответствующих рождению кварков, в амплитудах физических процессов.

Вычислены ширины распадов:  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$  и  $X \rightarrow D^0 + \bar{D}^0 + \pi^0$ , идущие через промежуточные состояния  $\rho(\omega)$  и  $D$ . Для разумных значений параметра  $\Lambda_X$ , который характеризует размер X(3872)-мезона, было найдено согласие с экспериментальными данными. Данный анализ был проведён в рамках релятивистской модели конституэнтных кварков с учётом их конфайнмента [28].

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Choi S. K. et al. [Belle Collaboration]. // Phys. Rev. Lett. - 2003. -Vol.91. - P.262001.
- 2 Nakamura K. et al. [Particle Data Group Collaboration]. // J. Phys. G G. - 2010. -Vol.37. - P.075021.
- 3 Aubert B. et al. [BABAR Collaboration]. //Phys. Rev. Lett. - 2004. - Vol.93. - P.041801.
- 4 Acosta D. E. et al. [CDF Collaboration]. // Phys. Rev. Lett. - 2004. -Vol.93. -P.072001.
- 5 Abazov V. M. et al. [D0 Collaboration] . // Phys. Rev. Lett. - 2004. -Vol.93. -P.162002.
- 6 Aaltonen T. et al. [CDF Collaboration]. // Phys. Rev. Lett. -2009. -Vol.103. -P.152001.
- 7 Yi K. and f. t. C. collaboration. F // arXiv:0910.3163 [hep-ex].
- 8 Abe K. et al. [Belle Collaboration]. // arXiv:hep-ex/0505037
- 9 Aubert B. et al. [BABAR Collaboration]. // Phys. Rev. D. -2006. - Vol.74. - P.071101.
- 10 Abulencia A. et al. [CDF Collaboration]. // Phys. Rev. Lett. - 2007. -Vol.98. - P.132002.
- 11 Gokhroo G. et al. [Belle Collaboration]. //Phys. Rev. Lett. - 2006. - V.97. -P.162002.
- 12 Aubert B. et al. [BABAR Collaboration]. // Phys. Rev. D. - 2008. -Vol.77. - P.011102.
- 13 Klempt E. and Zaitsev A. Glueballs, // Phys. Rept. -2007. - Vol.454. P.1.
- 14 Aubert B. et al. [BABAR Collaboration]. // Phys. Rev. Lett. - 2009. -Vol.102.-P.132001
- 15 Bignamini C., Grinstein B., Piccinini F., Polosa A. D. and Sabelli C. // Phys. Rev. Lett. 2009. V.103. P.162001.
- 16 Maiani L., Piccinini F., Polosa A. D. and Riquer V. // Phys. Rev. D. 2005. V.71. P.014028.
- 17 Nielsen M., Navarra F. S. and Lee S. H. // Phys. Rept. 2010. V.497. P.41.
- 18 Bignamini C., Grinstein B., Piccinini F., Polosa A. D., Riquer V. and Sabelli C. // Phys. Lett. B. 2010. V.684. P.228.
- 19 Tornqvist N. A. // Phys. Lett. B. - 2004. -Vol.590. - P.209.
- 20 Salam A. // Nuovo Cim. 1962. V.25. P.224.
- 21 Weinberg S. // Phys. Rev. 1963. V.130. P.776.
- 22 Hayashi K. et al. // Fort. Phys. 1967. V.15. P.625.
- 23 Vermaseren J. A. M. // Nucl. Phys. Proc. Suppl. 2008. V.183. P.19.
- 24 Buchalla G., Buras A. J., Lautenbacher M. E. // Rev. Mod. Phys. 1996. V.68. P.1125-1144
- 25 Beneke M., Buchalla G., Neubert M. and Sachrajda C. T. // Phys. Rev. Lett. 1999. V.83. P.1914.
- 26 M.Dineykh, M.A.Ivanov, G.G.Saidullaeva//Phys. of Particles and Nuclei, 2012,V.43,№3. p.749-782
- 27 Uhlemann C. F. and Kauer N. // Nucl. Phys. B. 2009. V.814. P.195

*М. Дінейхан, С. А. Жаугашева, Г. Г. Сайдуллаева, Н. Хабыл*

#### X(3872) МЕЗОННЫҢ ҒЫДЫРАУ ЕНІН КОВАРИАНТТЫ КВАРКТИК ҮЛГІ АЯСЫНДА АНЫҚТАУ

X(3872) мезонның қасиеттерін сипаттау үшін ковариантты кварктік үлгі инфрақызыл конфайнментпен қолданылды. X(3872)-мезонның  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$  және  $X \rightarrow D^0 + \bar{D}^0 + \pi^0$  күшті ғыдырау ені есептелді, ол негізінен аралық  $X \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$  және  $X \rightarrow D^* + \bar{D}$  күйлер арқылы жүреді, олар массалық емес бетте жатады. X(3872)-мезонның өлшемін көрсететін  $\Lambda_X$  параметрі үшін эксперименталды мәліметтермен сәйкестілік табылды.

*M. Dineykh, S. A. Zhaugasheva, G. G. Saidullaeva, N. Khabyl*

#### DETERMINATION OF THE DECAY WIDTHS OF X (3872) MESON IN THE COVARIANT QUARK MODEL

To describe the dynamical framework X -meson we employ a covariant quark model which includes infrared confinement in an effective way. We calculate the decay widths of the observed channels  $X \rightarrow J/\psi + 2\pi(3\pi)$  and  $X \rightarrow D^0 + \bar{D}^0 + \pi^0$  via the intermediate off-shell states  $X \rightarrow J/\psi + \rho(\omega)$  and  $X \rightarrow D^* + \bar{D}$ . For reasonable values of the size parameter  $\Lambda_X$  of the X(3872) we find consistency with the available experimental data.

М. ДИНЕЙХАН, С. А. ЖАУГАШЕВА, Г. Г. САЙДУЛЛАЕВА

## РАДИАЦИОННЫЙ РАСПАД $X(3872)$ МЕЗОНОВ В РАМКАХ КОВАРИАНТНОЙ МОДЕЛИ КВАРКОВ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

В рамках ковариантной модели кварков введено взаимодействие с электромагнитным полем с помощью  $P$ -экспоненты Мандельштама. Вычислен матричный элемент однофотонного перехода  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  и доказано его калибровочная инвариантность.

**1. Введение.** Узкий резонанс  $X(3872)$ , схожий по свойствам с чармонием, был открыт в 2003 году коллаборацией Belle [1] в реакции  $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ . Данный резонанс распадается на  $\pi^+ \pi^- J/\psi$  и имеет массу  $m_X = 3872.0 \pm 0.6(stat) \pm 0.5(syst)$  Мэв, которая близка к порогу рождения  $D$  и  $D^*$  мезонов:  $M_{D^0} + M_{D^{*0}} = 3871.81 \pm 0.25$  Мэв [2]. Было найдено, что его ширина меньше 2.3 Мэв на 90% уровне достоверности. Это состояние вскоре было подтверждено коллаборацией BaBar [3] и в  $p\bar{p}$ -столкновениях в лаборатории Ферми на теватроне в экспериментах CDF [4] и DØ [5].

Все предсказанные состояния чармония ниже порога рождения частиц с открытым чармом установлены экспериментально. Выше порога найдено только пять состояний: одно из них, названное  $X(3872)$ -мезоном, достаточно хорошо установлено и наблюдается в нескольких различных реакциях несколькими независимыми коллаборациями. Новые состояния, в частности  $X(3872)$ -мезон, являются очень узкими, а их массы близки к порогам рождения  $D - \bar{D}^*$  мезонов. Данные факты не согласуются с предсказаниями кварковой модели. Наиболее вероятными кандидатами могли бы быть  $1D$  или  $2P$  состояния чармония. Однако,  $1D$ -состояние лежит существенно ниже 3872 Мэв, а  $2P$ -состояние несколько выше. Поэтому в литературе интенсивно обсуждаются интерпретации  $X(3872)$ -мезона либо как адронной молекулы, либо как тетракварка.

Коллаборация Belle сообщила о наблюдении моды распада  $X \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 J/\psi$  [6] с ярко выраженным пиком в системе трёх пионов в районе 750–775 Мэв, что означает доминирование подпорогового процесса  $X \rightarrow \omega J/\psi$  в данном распаде. Было найдено, что брэнчинг этой моды почти такой же как и брэнчинг моды  $X \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ :

$$\frac{B(X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^- \pi^0)}{B(X \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-)} = 1.0 \pm 0.4(stat) \pm 0.3(syst). \quad (1)$$

Это означает сильное нарушение изоспина, поскольку трёхпионный распад идёт в основном через промежуточный  $\omega$ -мезон с изоспином 0, в то время как двухпионный распад идёт в основном через промежуточный  $\rho$ -мезон с изоспином 1. Кроме того, поскольку двухпионный распад идёт в основном через промежуточный  $\rho$ -мезон, то весьма трудно это объяснить, используя интерпретацию  $X(3872)$  как простого  $c\bar{c}$  состояния чармония с изоспином 0. В этой же работе были опубликованы данные об электромагнитном распаде  $X(3872) \rightarrow \gamma + J/\psi$ :

$$B(B \rightarrow XK) \cdot B(X \rightarrow \gamma + J/\psi) = (1.8 \pm 0.6(stat) \pm 0.1(syst)) \times 10^{-6},$$

$$\frac{\Gamma(X \rightarrow \gamma + J/\psi)}{\Gamma(X \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi)} = 0.14 \pm 0.05. \quad (2)$$

При анализе распадов  $B^+ \rightarrow J/\psi \gamma K^+$  ВаБар коллаборация [7] нашла доказательство распада  $X(3872) \rightarrow \gamma + J/\psi$  на уровне  $3.4\sigma$  статистической погрешности. Были опубликованы следующие численные значения для произведения брэнчингов:

$$B(B^+ \rightarrow XK^+) \cdot B(X \rightarrow \gamma + J/\psi) = (3.3 \pm 1.0(stat) \pm 0.3(syst)) \times 10^{-6}. \quad (3)$$

Все имеющиеся данные до 2007 года были проанализированы в работе [8], где, в частности, было найдено, что

$$B(B^+ \rightarrow XK^+) = 1.30_{-0.34}^{+0.20} \times 10^{-4}, \quad \frac{\Gamma(X \rightarrow \gamma + J/\psi)}{\Gamma(X \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi)} = 0.22 \pm 0.06. \quad (4)$$

Коллаборация ВаВаг [9] опубликовала следующие данные о распадах  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  и  $X \rightarrow \gamma + \psi(2S)$ , которые были получены при анализе  $B \rightarrow c\bar{c}\gamma K$  распадов:

$$\begin{aligned} B(B^\pm \rightarrow XK^\pm) \cdot B(X \rightarrow \gamma + J/\psi) &= (2.8 \pm 0.8(stat) \pm 0.1(syst)) \times 10^{-6}, \\ B(B^\pm \rightarrow XK^\pm) \cdot B(X \rightarrow \gamma + \psi(2S)) &= (9.5 \pm 2.7(stat) \pm 0.6(syst)) \times 10^{-6}, \end{aligned} \quad (5)$$

Полный обзор экспериментальных данных по  $X(3872)$ -мезону, имеющих к настоящему времени, может быть найден в работах [10] и [11].

Таким образом, определение ширины радиационного распада  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  исходя из предположений о том, что  $X$ -мезон имеет тетракварковую структуру, является одним из актуальных задач физики элементарных частиц при описании структурной особенности адронов.

Ковариантная модель кварков является эффективным квантовополевым подходом к адронным взаимодействиям, основанным на лагранжиане взаимодействия адронов с их составляющими кварками. Знание соответствующего интерполирующего кваркового тока позволяет вычислять самосогласованным образом матричные элементы физических процессов. Отличительной особенностью данного подхода является то, что многокварковые состояния, такие как барионы (три кварка), тетракварки (четыре кварка) и т.д., могут быть рассмотрены и описаны на том же уровне строгости, как и простейшие кварк-антикварковые системы (мезоны). Константа связи адронов с их интерполирующими кварковыми токами определяются из условия связности  $Z_H = 0$  [12], где  $Z_H$  есть константа перенормировки волновой функции адрона. Матричные элементы физических процессов определяются набором соответствующих кварковых диаграмм, которые строятся в соответствии с  $1/N_c$ -разложением. В ковариантной модели кварков эффективным образом вводится инфракрасное обрезание в пространстве параметров Фока – Швингера, по которым проводится интегрирование в выражениях для матричных элементов. Такая процедура позволяет устранить все пороговые сингулярности, соответствующие рождению кварков, и тем самым гарантировать конфайнмент кварков. В модели отсутствуют ультрафиолетовые расходимости благодаря вершинным адрон-кварковым формфакторам, которые описывают нелокальную структуру адронов. Ковариантная модель кварков содержит несколько свободных параметров: массы конституэнтных кварков, параметр инфракрасного обрезания, который характеризует область конфайнмента, и параметры, которые описывают эффективный размер адронов.

Наша работа построена следующим образом: во втором разделе приведены определение электромагнитного взаимодействия с выполнением условия калибровочного инвариантности. В третьем разделе вычислены ширины однофотонного распада  $X(3872)$ -мезона.

**2. Взаимодействие с электромагнитным полем. 2.1. Введение электромагнитного взаимодействия.** Введение взаимодействия с электромагнитным полем таким образом, чтобы обеспечить калибровочную инвариантность, не является простой задачей ввиду нелокальности лагранжиана взаимодействия см. обзор [13]. Для различных частей полного лагранжиана взаимодействия с электромагнитным полем вводится двумя способами. В свободный лагранжиан заряженных полей кварков и мезонов данное взаимодействие вводится стандартным образом с помощью минимальной замены:

$$\partial^\mu M^\pm \rightarrow (\partial^\mu \mp ieA^\mu) M^\pm, \quad \partial^\mu q \rightarrow (\partial^\mu - ie_q A^\mu) q, \quad \partial^\mu \bar{q} \rightarrow (\partial^\mu + ie_q A^\mu) \bar{q}, \quad (6)$$

где  $e$  является зарядом позитрона (или протона);  $e_q$  – заряд кварка ( $e_u = 2/3 e$ ,  $e_d = -1/3 e$ , и т.д.). Минимальная замена даёт первую часть лагранжиана электромагнитных взаимодействий:

$$\begin{aligned} L_{\text{int}}^{em(1)}(x) &= \sum_q e_q A_\mu(x) J_q^\mu(x) + e A_\mu(x) J_M^\mu(x) + e^2 A^2(x) M^-(x) M^+(x), \\ J_q^\mu(x) &= \bar{q}(x) \gamma^\mu q(x), \quad J_M^\mu(x) = i(M^-(x) \partial^\mu M^+(x) - M^+(x) \partial^\mu M^-(x)). \end{aligned} \quad (7)$$



В ковариантной модели кварков взаимодействие элементарных адронных полей с фотонами отсутствует в матричных элементах, физических процессов отсутствует благодаря условию связности  $Z_M = 0$ .

Введение электромагнитного взаимодействия в нелокальный лагранжиан адрон – кваркового взаимодействия происходит с помощью метода  $P$ -экспоненты, предложенному в работах [14, 15]. Данный метод активно использовался в нелокальной киральной кварковой модели [16].

Для того чтобы гарантировать выполнение калибровочной инвариантности, каждое кварковое поле в соответствующем токе умножается на калибровочную экспоненту:

$$q(x_i) \rightarrow e^{-ie_q I(x_i, x, P)} q(x_i), \quad \bar{q}(x_i) \rightarrow e^{-ie_q I(x_i, x, P)} \bar{q}(x_i), \quad I(x_i, x, P) = \int_x^{x_i} dz_\mu A^\mu(z), \quad (8)$$

где  $P$  обозначает путь, соединяющий точки  $x$  и  $x_i$ . Тогда легко видеть, что полный лагранжиан инвариантен относительно локальных калибровочных преобразований:

$$q(x_i) \rightarrow e^{-ie_q f(x_i)} q(x_i), \quad \bar{q}(x_i) \rightarrow e^{-ie_q f(x_i)} \bar{q}(x_i), \quad A^\mu(z) \rightarrow A^\mu(z) + \partial^\mu f(z), \quad (9)$$

При этом

$$I(x_i, x, P) \rightarrow I(x_i, x, P) + f(x_i) - f(x). \quad (10)$$

При расчётах по теории возмущений нужно раскладывать калибровочную экспоненту по степеням  $A_\mu$  до необходимого порядка. На первый взгляд результат будет зависеть от пути  $P$ , который соединяет концевые точки. Однако, нам нужны только производные интеграла по пути, взятые по концевой точке. Поэтому удобно использовать формализм, разработанный в работе [15], который основан на пути – независимом определении производной интеграла  $I(x, y, P)$ :

$$\lim_{dx^\mu \rightarrow 0} dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} I(x, y, P) = \lim_{dx^\mu \rightarrow 0} [I(x + dx, y, P') - I(x, y, P)], \quad (11)$$

где путь  $P'$  получен из пути  $P$  с помощью сдвига конечной точки  $x$  на величину  $dx$ . Используя определение (11) приходим к ключевому правилу:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} I(x, y, P) = A_\mu(x), \quad (12)$$

которое означает, что производная интеграла  $I(x, y, P)$  теперь не зависит от пути  $P$ .

**2.2. Лагранжиан адрон-фотон-кваркового взаимодействия, линейный по электромагнитному полю.** Продемонстрируем построение лагранжиана электромагнитного взаимодействия на примере  $J/\psi$ -мезона, являющимся кварк-антикварковым состоянием, и  $X(3872)$ -мезона, рассматриваемого как тетракварк со спином 1.

Разлагая лагранжиан взаимодействия по полю  $A^\mu$  до первого порядка, получаем

$$\begin{aligned} L_{\text{int}}^{em(2)}(x) &= g_X X_{q\mu}(x) \cdot J_{X_q-em}^\mu(x) + g_{J/\psi} J/\psi_\mu(x) \cdot J_{J/\psi-em}^\mu(x) \quad (q = u, d), \\ J_{X_q-em}^\mu &= \int d\vec{\rho} \Phi_X(\vec{\rho}^2) J_{4q}^\mu(x_1, \dots, x_4) \{ie_q [I_x^{x_3} - I_x^{x_4}] + ie_c [I_x^{x_2} - I_x^{x_1}]\}, \\ J_{J/\psi-em}^\mu &= \int d\rho \Phi_{J/\psi}(\rho^2) J_{2q}^\mu(x_1, x_2) ie_c [I_x^{x_1} - I_x^{x_2}], \quad I_x^{x_i} \equiv I(x_i, x, P). \end{aligned} \quad (13)$$

Для того, чтобы использовать ключевое правило (12) перейдём к Фурье-образам для вершинных функций  $\Phi$  и кварковых полей  $q$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_X(\vec{\rho}^2) &= \int \frac{d^4 \vec{\omega}}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}_X(-\vec{\omega}^2) e^{-i\vec{\rho}\vec{\omega}} = \tilde{\Phi}_X(\vec{\omega}_\rho^2) \delta^{(4)}(\vec{\rho}), \\ \Phi_{J/\psi}(\rho^2) &= \int \frac{d^4 \vec{\omega}}{(2\pi)^4} \tilde{\Phi}_{J/\psi}(-\omega^2) e^{-i\rho\omega} = \tilde{\Phi}_{J/\psi}(\vec{\omega}_\rho^2) \delta^{(4)}(\rho), \\ q(x_i) &= \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-ip_i x_i} \tilde{q}(p_i), \quad \bar{q}(x_i) = \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} e^{-ip_i x_i} \tilde{\bar{q}}(p_i), \end{aligned} \quad (14)$$

С помощью интегрирования по частям приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned}
 J_{X_q-em}^\mu &= \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{4q}^\mu(p_1, \dots, p_4) \int d\vec{\rho} \delta^{(4)}(\vec{\rho}) \\
 &\times \tilde{\Phi}_X(\tilde{\partial}_\rho^2) e^{-i(p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 + p_4 x_4)} \{ie_q [I_x^{x_3} - I_x^{x_4}] + ie_c [I_x^{x_2} - I_x^{x_1}]\} \\
 &= \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{4q}^\mu(p_1, \dots, p_4) e^{-i(p_1 - p_2 - p_3 + p_4)x} \int d\vec{\rho} \delta^{(4)}(\vec{\rho}) e^{-i\vec{\rho}\vec{\omega}} \\
 &\times \tilde{\Phi}_X(\vec{D}_\rho^2) \{ie_q [I_x^{x_3} - I_x^{x_4}] + ie_c [I_x^{x_2} - I_x^{x_1}]\}, \\
 J_{J/\psi-em}^\mu &= \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{2q}^\mu(p_1, p_2) \int d\rho \delta^{(4)}(\rho) \tilde{\Phi}_{J/\psi}(\partial_\rho^2) e^{i(p_1 x_1 - p_2 x_2)} ie_q [I_x^{x_1} - I_x^{x_2}] \\
 &= \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \tilde{J}_{2q}^\mu(p_1, p_2) e^{-i(p_1 - p_2)x} \int d\rho \delta^{(4)}(\rho) e^{-i\rho\omega} \tilde{\Phi}_{J/\psi}(D_\rho^2) ie_q [I_x^{x_1} - I_x^{x_2}]
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 D_{\rho_i}^\mu &= \partial_{\rho_i}^\mu - i\omega_i^\mu, & D_\rho^\mu &= \partial_\rho^\mu + ip^\mu. \\
 \omega_1 &= c_{11}p_1 - c_{21}p_2 - c_{31}p_3 + c_{41}p_4, & \omega_2 &= c_{12}p_1 - c_{22}p_2 - c_{32}p_3 + c_{42}p_4, \\
 \omega_3 &= c_{13}p_1 - c_{23}p_2 - c_{33}p_3 + c_{43}p_4, & p &= \frac{1}{2}(p_1 + p_2)
 \end{aligned} \tag{16}$$

Наконец, используем следующее тождество, доказательство которого можно найти в работе [17]:

$$F(-D_{\rho_j}^2) I_x^{x_i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{F^{(n)}(0)}{n!} D_x^{2n} I_x^{x_i}.$$

Имеем

$$D_{\rho_j}^2 I_x^{x_i} = \left( (\partial_{\rho_j}^\nu A_\nu(x_i)) - 2i(\omega_j^\nu A_\nu(x_i)) \right) \epsilon_{ij} - \omega_j^2 I_x^{x_i}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 (D_{\rho_j}^2)^2 I_x^{x_i} &= (D_{\rho_j}^2 - \omega_j^2) \left( (\partial_{\rho_j}^\nu A_\nu(x_i)) - 2i(\omega_j^\nu A_\nu(x_i)) \right) \epsilon_{ij} + (-\omega_j^2)^2 I_x^{x_i}, \\
 (D_{\rho_j}^2)^3 I_x^{x_i} &= \left( (D_{\rho_j}^2)^2 - D_{\rho_j}^2 \omega_j^2 + \omega_j^4 \right) \left( (\partial_{\rho_j}^\nu A_\nu(x_i)) - 2i(\omega_j^\nu A_\nu(x_i)) \right) \epsilon_{ij} + (-\omega_j^2)^3 I_x^{x_i}, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 (D_{\rho_j}^2)^n I_x^{x_i} &= \sum_{k=0}^n (D_{\rho_j}^2)^{n-1-k} (-\omega_j^2)^k \left( (\partial_{\rho_j}^\nu A_\nu(x_i)) - 2i(\omega_j^\nu A_\nu(x_i)) \right) \epsilon_{ij} + (-\omega_j^2)^n I_x^{x_i} = \\
 &= n \int_0^1 d\tau \left[ D_{\rho_j}^2 \tau - \omega_j^2 (1-\tau)^{n-1} \right] \left( (\partial_{\rho_j}^\nu A_\nu(x_i)) - 2i(\omega_j^\nu A_\nu(x_i)) \right) \epsilon_{ij} + (-\omega_j^2)^n I_x^{x_i}.
 \end{aligned}$$

В конце получаем тождество

$$\begin{aligned}
 F(-D_{\rho_j}^2) I_x^{x_i} &= \int_0^1 d\tau F'(-\tau D_{\rho_j}^2 + (1-\tau)\omega_j^2) \epsilon_{ij} \left( (\partial_{\rho_j}^\nu A_\nu(x_i)) - 2i\omega_j^\nu A_\nu(x_i) \right) + F(\omega_j^2) I_x^{x_i} \\
 &= \int dq A_\mu(q) \left\{ (q^\mu + 2p^\mu) e^{iqx_i} \int_0^1 d\tau F'[(\omega_j + q)^2 \tau + \omega_j^2(1-t)] + F(\omega_j^2) \int_x^{x_i} dz^\mu e^{-iqz} \right\}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Заметим, что последнее слагаемое равно нулю из-за дельты  $\delta(x_i - x)$  функции в лагранжиане.

Окончательно получаем

$$J_{X_q-em}^\mu(x) = \prod_{i=1}^4 \int d^4 x_i \int d^4 y J_{4q}^\mu(x_1, \dots, x_4) A_\rho(y) E_X^\rho(x; x_1, \dots, x_4, y), \quad (18)$$

$$E_X^\rho(x; x_1, \dots, x_4, y) = \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} e^{-ip_1(x-x_1)+ip_2(x-x_2)+ip_3(x-x_3)-ip_4(x-x_4)-ir(x-y)} \tilde{E}_X^\rho(p_1, \dots, p_4, r),$$

$$\tilde{E}_X^\rho(p_1, \dots, p_4, r) = \int_0^1 d\tau \sum_{j=1}^3 \left\{ e_c \left[ -\tilde{\Phi}'_X(-z_{1j}) \mathcal{V}_{1j}^\rho + \tilde{\Phi}'_X(-z_{2j}) \mathcal{V}_{2j}^\rho \right] + e_q \left[ -\tilde{\Phi}'_X(-z_{4j}) \mathcal{V}_{4j}^\rho + \tilde{\Phi}'_X(-z_{3j}) \mathcal{V}_{3j}^\rho \right] \right\}$$

$$l_{ij} = c_{ij} (c_{ij} r + 2\omega_j), \quad (i = 1, \dots, 4; \quad j = 1, \dots, 3),$$

$$z_{i1} = \tau(c_{i1} r + \omega_1)^2 + (1-\tau)\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2, \quad z_{i2} = (c_{i1} r + \omega_1)^2 + \tau(c_{i2} r + \omega_2)^2 + (1-\tau)\omega_2^2 + \omega_3^2,$$

$$z_{i3} = (c_{i1} r + \omega_1)^2 + (c_{i2} r + \omega_2)^2 + \tau(c_{i3} r + \omega_3)^2 + (1-\tau)\omega_3^2.$$

$$J_{J/\psi-em}^\mu = \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \int d^4 z J_{2q}^\nu(y_1, y_2) A_\rho(z) E_{J/\psi}^\rho(y; y_1, y_2, z), \quad (19)$$

$$E_{J/\psi}^\rho(y; y_1, y_2, z) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-ip_1(y_1-y)+ip_2(y_2-y)+iq(z-y)} \tilde{E}_{J/\psi}^\rho(p_1, p_2, q),$$

$$\tilde{E}_{J/\psi}^\rho(p_1, p_2, q) = e_c \int_0^1 d\tau \left\{ -\tilde{\Phi}'_{J/\psi}(-z_-) \mathcal{V}_-^\rho - \tilde{\Phi}'_{J/\psi}(-z_+) \mathcal{V}_+^\rho \right\}$$

$$z_\mp = \tau \left( p \mp \frac{1}{2} q \right) - (1-\tau)p^2, \quad l_\mp = p \mp \frac{1}{4} q, \quad p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2).$$

**2.3. Калибровочная инвариантность матричного элемента  $V \rightarrow \gamma$ -перехода.** Продемонстрируем выполнение калибровочной инвариантности на примере вычисления матричного элемента перехода  $V \rightarrow \gamma$ , где  $V$  есть векторный мезон.

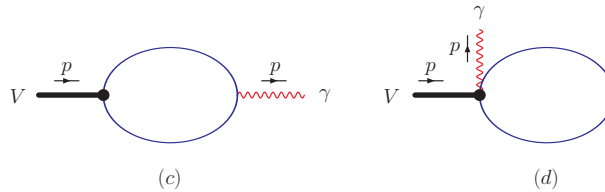


Рис. 1. Диаграммы, описывающие переход  $V \rightarrow \gamma$

Матричный элемент перехода  $V \rightarrow \gamma$ , вычисленный вне массовой поверхности, должен удовлетворять условию калибровочной инвариантности  $p_\nu M_{V \rightarrow \gamma}^{\mu\nu}(p) = 0$ . Каждая по отдельности диаграмма рис. 1 не является калибровочно-инвариантной. Лишь в сумме происходит сокращение калибровочно-неинвариантных частей и восстанавливается калибровочная инвариантность. После взятия Т-произведений и перехода к импульсному пространству, вклад от диаграммы (с) записывается в виде:

$$M_c^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 k}{4\pi^2 i} \Phi_\rho(-k^2) \text{tr} \left( \gamma^\mu S \left( k + \frac{1}{2} p \right) \gamma^\nu S \left( k - \frac{1}{2} p \right) \right) \quad (20)$$

$$= g^{\mu\nu} [I_c^{(1)}(p^2) + I_c^2(p^2)] + (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) I_c^\perp(p^2).$$

Для диаграммы (d) аналогичные вклады имеют вид:

$$M_d^{\mu\nu}(p) = - \int \frac{d^4 k}{4\pi^2 i} \left( 2k + \frac{1}{2} p \right)^\mu \int_0^1 d\alpha \Phi'_\pi \left( -\alpha \left( k + \frac{1}{2} p \right)^2 - (1-\alpha)k^2 \right) \text{tr} (\gamma^\nu S(k)) \quad (21)$$

$$= g^{\mu\nu} I_d^{(3)}(p^2) + (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) I_d^\perp(p^2),$$

$$I_d^{(3)}(p^2) = \int_0^\infty \frac{dt s}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha e^{-z_3} \left[ -\frac{1}{s+t} - \left(1 - \frac{2s\alpha}{s+t}\right) \frac{s\alpha}{s+t} \frac{p^2}{4} \right],$$

$$I_d^\perp(p^2) = \int_0^\infty \frac{dt s}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha e^{-z_3} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2s\alpha}{s+t}\right) \frac{s\alpha}{s+t}, \quad z_3 = tm^2 - \left(1 - \frac{s\alpha}{s+t}\right) \frac{s\alpha}{4} p^2.$$

Здесь  $s = 1/\Lambda_V^2$ . Как мы сейчас покажем, калибровочно-неинвариантные части  $I_c^{(1,2)}$  и  $I_d^{(3)}$  в сумме сокращаются. Во-первых, можно выразить подынтегральные выражения в интегралах  $I_c^{(2)}$  и  $I_d^{(3)}$  через производные от показателей экспоненты  $z_2$  и  $z_3$ , соответствен, см. обзор [13]. Далее, можно выполнить интегрирование по  $\alpha$  с учётом граничных условий  $z_2(\alpha=1) = z_2(\alpha=0) = z_3(\alpha=1) = z_3$ .

Окончательное калибровочно-инвариантное выражение для матричного элемента перехода  $V \rightarrow \gamma$  имеет вид:

$$M_{V \rightarrow \gamma}^{\mu\nu}(p) = (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) M_{V \rightarrow \gamma}(p^2), \quad (22)$$

$$M_{V \rightarrow \gamma}(p^2) = \int_0^{1/\lambda^2} \frac{dt t}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha e^{-z_2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{2t^2}{(s+t)^2} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \right] + \int_0^{1/\lambda^2} \frac{dt s}{(s+t)^2} \int_0^1 d\alpha e^{-z_3} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2s\alpha}{s+t}\right) \frac{s\alpha}{s+t}.$$

Здесь мы ввели инфракрасное обрезание, гарантирующее конфайнмент кварков.

**3. Однофотонный распад  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$ .** Однофотонный распад  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  описывается набором диаграмм Фейнмана, изображённых на рис. 2.

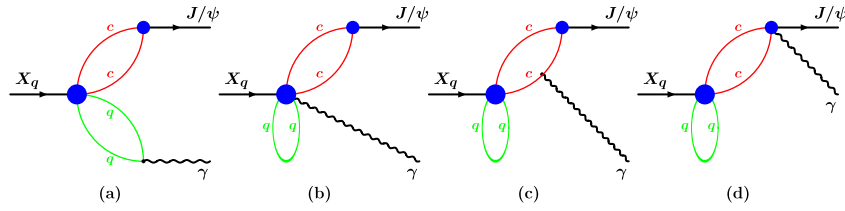


Рис. 2. Диаграммы Фейнмана для  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  распада

Инвариантный матричный элемент записывается в виде:

$$M(X_q(p) \rightarrow J/\psi(q_1)\gamma(q_2)) = i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - q_1 - q_2) \varepsilon_X^\mu \varepsilon_\gamma^\rho \varepsilon_{J/\psi}^\nu T_{\mu\rho\nu}(q_1, q_2), \quad (23)$$

где

$$T_{\mu\rho\nu}(q_1, q_2) = \sum_{i=a,b,c,d} T_{\mu\rho\nu}^{(i)}(q_1, q_2), \quad (24)$$

$$T_{\mu\rho\nu}^{(a)} = 6\sqrt{2} g_X g_{J/\psi} e_q \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_X \left( -\left(k_1 + \frac{1}{2}q_1\right)^2 \right)$$

$$\times \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \gamma_5 S_c(k_1) \gamma_\nu S_c(k_1 + q_1) \gamma_\mu S_q(k_2) \gamma_\rho S_q(k_2 + q_2) - (\gamma_5 \leftrightarrow \gamma_\mu) \right]$$

$$K_a^2 = \frac{1}{2} \left(k_1 + \frac{1}{2}q_1\right)^2 + \frac{1}{2} \left(k_2 + \frac{1}{2}q_2\right)^2 + \frac{1}{4} (\omega_q q_1 - \omega_c q_2)^2,$$

$$T_{\mu\rho\nu}^{(b)} = 6\sqrt{2} g_X g_{J/\psi} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_{J/\psi} \left( -\left(k_2 + \frac{1}{2}q_1\right)^2 \right) \tilde{E}_{X\rho}(p_1, \dots, p_4, r)$$

$$\times \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \gamma_5 S_q(k_1) \gamma_\mu S_c(k_2) \gamma_\nu S_c(k_2 + q_1) - (\gamma_5 \leftrightarrow \gamma_\mu) \right]$$

$$\begin{aligned}
 p_1 = k_2, \quad p_2 = k_2 + q_1, \quad p_3 = p_4 = -k_1, \quad r = -q_2, \\
 T_{\mu\rho\nu}^{(c)} = 6\sqrt{2}g_X g_{J/\psi} e_c \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_X(-K_c^2) \tilde{\Phi}_{J/\psi} \left( - \left( k_2 + q_2 + \frac{1}{2} q_1 \right)^2 \right) \\
 \times \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \gamma_5 S_q(k_1) \gamma_\mu S_c(k_2) \gamma_\rho S_c(k_2 + q_2) \gamma_\nu S_c(k_2 + p) - (\gamma_5 \leftrightarrow \gamma_\mu) \right] \\
 K_c^2 = \frac{1}{2} k_1^2 + \frac{1}{2} \left( k_2 + \frac{1}{2} p \right)^2 + \frac{1}{4} \omega_q^2 p^2, \\
 T_{\mu\rho\nu}^{(d)} = 6\sqrt{2}g_X g_{J/\psi} e_c \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Phi}_X(-K_c^2) \tilde{E}_{J/\psi\rho}(p_1, p_2, q) \\
 \times \frac{1}{2} \text{tr} \left[ \gamma_\mu S_q(k_1) \gamma_5 S_c(k_2) \gamma_\nu (k_2 + p) - (\gamma_5 \leftrightarrow \gamma_\mu) \right]
 \end{aligned}$$

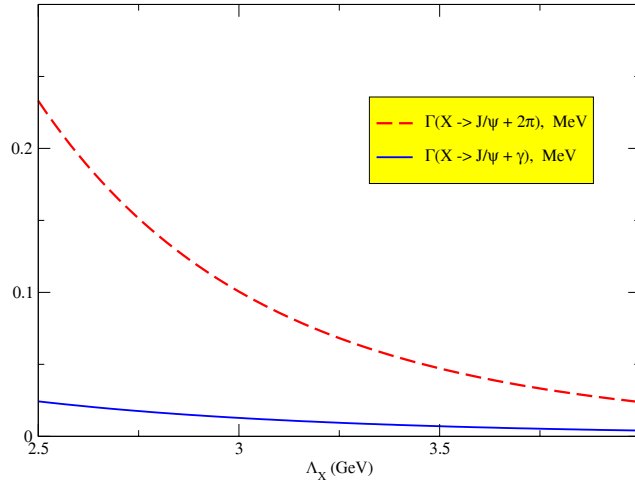


Рис. 3. Зависимость ширины распадов  $\Gamma(X_l \rightarrow J/\psi + \gamma)$  и  $\Gamma(X_l \rightarrow J/\psi + 2\pi)$  от параметра  $\Lambda_X$

На рис. 3 показан график зависимости ширины распада  $\Gamma(X_l \rightarrow J/\psi + \gamma)$ , а так же для сравнения ширины распада  $\Gamma(X_l \rightarrow J/\psi + 2\pi)$ , от параметра  $\Lambda_X$ . Отметим, что радиационная ширина распада состояния  $X_h = -X_u \sin \theta + X_d \cos \theta$  почти на порядок меньше чем для состояния  $X_l = X_u \cos \theta + X_d \sin \theta$ . Если взять  $\Lambda_X \in (3,4)$  ГэВ со средним значением  $\Lambda_X = 3.5$  ГэВ, тогда наши предсказания для отношений ширины записываются следующим образом:

$$\left. \frac{\Gamma(X_l \rightarrow J/\psi + \gamma)}{\Gamma(X_l \rightarrow J/\psi + 2\pi)} \right|_{\text{теор}} = 0.15 \pm 0.03, \quad (25)$$

что очень хорошо согласуется с экспериментальными данными полученных коллаборацией Belle [6]

$$\frac{\Gamma(X \rightarrow J/\psi + \gamma)}{\Gamma(X \rightarrow J/\psi + 2\pi)} = \begin{cases} 0.14 \pm 0.05 & \text{Belle}[8] \\ 0.22 \pm 0.06 & \text{BARAR}[13] \end{cases} \quad (26)$$

**Заключение.** Обсуждено введение электромагнитного взаимодействия в развиваемом подходе. Эта задача является нетривиальной ввиду нелокальности адрон-кваркового взаимодействия. Данная задача решена путём использования известного метода Р-экспоненты и определения её производной пути-независимым образом. Построены явные представления для лагранжиана, описывающего адрон-фотон-кварковое взаимодействие, линейное по электромагнитному полю.

Продемонстрировано выполнение калибровочной инвариантности на примере вычисления матричного элемента перехода  $V \rightarrow \gamma$ .

Вычислены однофотонные распады  $X(3872)$ -мезона, рассматриваемого как связанное состояние из четырёх кварков–тетракварка с квантовыми числами  $J^{PC} = 1^{++}$ . Вычисление амплитуд процессов в рамках нашего подхода требует значительных усилий, поскольку приходится вычислять трёхпетлевые фейнмановские диаграммы. Показано, что для разумных значений параметра  $\Lambda_X$ , характеризующего размер  $X$ -мезона, теоретические значения для ширины распадов находятся в согласии с экспериментальными данными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Choi S. K. et al. [Belle Collaboration]. // Phys. Rev. Lett. - 2003.-Vol.91.- P.262001.
2. Nakamura K. et al. [Particle Data Group Collaboration]. // J. Phys. G G. - 2010.-Vol.37.- P.075021.
3. Aubert B. et al. [BABAR Collaboration]. //Phys. Rev. Lett. - 2004.- Vol.93.- P.041801.
4. Acosta D. E. et al.[CDF Collaboration]. // Phys. Rev. Lett. - 2004.-Vol.93. -P.072001.
5. Abazov V. M. et al. [D0 Collaboration] . // Phys. Rev. Lett.- 2004.-Vol.93. -P.162002.
6. Abe K. et al. [Belle Collaboration]. // arXiv:hep-ex/0505037
7. Aubert B. et al. [BABAR Collaboration]. // Phys. Rev. D. -2006.- Vol.74.- P.071101.
8. Klempt E. and Zaitsev A. Glueballs, // Phys. Rept. -2007.- Vol.454. P.1.
9. Aubert B. et al. [BABAR Collaboration]. // Phys. Rev. Lett. - 2009. -Vol.102.-P.132001.
10. Thomas C. E. and Close F. E. // Phys. Rev. D. -2008. -Vol.78.- P.034007.
11. Barnes T. and Godfrey S. // Phys. Rev. D.-2004. -Vol.69.- P.054008.
12. Bignamini C., Grinstein B., Piccinini F., Polosa A. D., Riquer // Phys. Lett. B. 2010. V.684. P.228
13. M.Dineykhan, M.A.Ivanov, G.G.Saidullaeva//Phys. of Particles and Nuclei, 2012,V.43,№3. p.749-782
14. Mandelstam S. // Annals Phys. 1962. V.19. P.1.
15. Terning J. // Phys. Rev. D. 1991. V.44. P.887.
16. Dorokhov A. E. and Broniowski W. // Eur. Phys. J. C. 2003. V.32. P.79.
17. Ivanov M. A.,Locher M. P. and Lyubovitskij V. E. // Few Body Syst. 1996. V.21. P.131

*М. Дінейхан, С. А. Жаугашева, Г. Г. Сайдұллаева*

#### X(3872) МЕЗОННЫҢ РАДИАЦИЯЛЫҚ ҮДЫРАУЫ КОВАРИАНТТЫҚ КВАРКТИК ҮЛГІДЕ

Ковариантты кварктік үлгі аясында Мандельштамның P-экспонент көмегімен электромагниттік өріс арқылы әсерлесу енгізілген. Бірфотонды  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  ауысудың матрицалық элементі анықталды және оның калибрлік инварианттылығы дәлелденді.

*M. Dineykhan, S. A. Zhaugasheva, G. G. Saidullaeva*

#### RADIATIVE DECAY OF X (3872) MESONS IN THE COVARIANT QUARK MODEL

The single-photon decay  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  in then analyzed. To introduce electromagnetic interactions, a nonlocal effective Lagrangian, which describes an interaction of X(3872) meson with its four constituent quarks, is gauged by using the P-exponential path-independent formalism. The matrix element of the transition  $X \rightarrow \gamma + J/\psi$  is evaluated and its gauge invariance is proved.

УДК 539.37

А. М. АЛИМЖАНОВ

## ПЛОСКАЯ НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЗАПРЕДЕЛЬНО ДЕФОРМИРУЕМОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД С КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ВЫРАБОТКОЙ

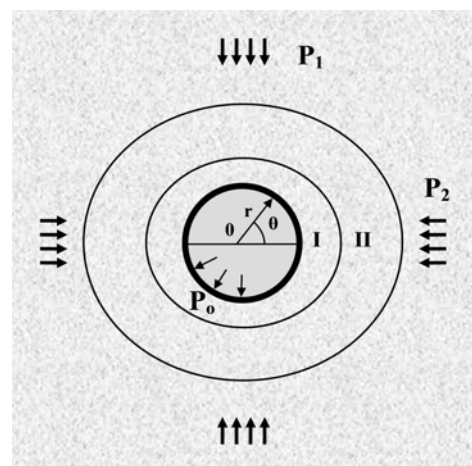
Институт механики и машиноведения им. акад. С. У. Джолдасбекова, г. Алматы

На основе разработанной нелинейной модели запредельно деформируемого массива горных пород решена плоская неосесимметричная задача для круговой цилиндрической выработки в постановке плоской деформации в условиях неравнокомпонентных нагрузок на бесконечности. Задача решена аналитическим методом возмущений применительно к рассматриваемому телу. Определены все компоненты напряжений и перемещений вокруг выработки, а также две неизвестные границы зоны разрушения и зоны разупрочнения. Дана оценка прочности пород приконтурной зоны и исследовано влияние параметров запредельного деформирования горных пород на компоненты НДС вокруг выработки.

**Постановка и основные соотношения задачи.** Рассмотрим плоскую неосесимметричную задачу теории запредельного деформирования для круговой цилиндрической выработки в постановке плоской деформации, которая широко используется в задачах механики горных пород для расчета НДС протяженных подземных сооружений [1, 2] (в этом случае компоненты главных деформаций таковы  $\varepsilon_1 \neq 0$ ,  $\varepsilon_3 \neq 0$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ ).

Задача решается в безразмерных полярных координатах  $r, \theta$ , где все величины с размерностью длины отнесены к радиусу выработки (следовательно радиус выработки  $r = 1$ ). Массив горных пород с круговой цилиндрической выработкой моделируется невесомой плоскостью с круговым отверстием; при этом на бесконечности действуют неравнокомпонентные ортогональные сжимающие усилия  $P_1$  и  $P_2$  ( $P_1 > P_2$ ) вследствие действия тектонических сил, а по контуру выработки действует равномерное давление отпора крепи  $P_0$  (рисунок).

Расчетная схема к определению НДС пород приконтурной зоны круговой цилиндрической выработки в запредельно деформируемом массиве горных пород в условиях действия тектонических сил



Введем обозначения  $P = (P_1 + P_2) / 2\sigma_{сж}$  как усредненное равномерное давление,  $\delta = (P_1 - P_2) / 2\sigma_{сж}$  как параметр, характеризующий степень неосесимметричности сжимающих усилий на бесконечности. Тогда граничные условия записываются следующим образом (условия действия тектонических сил)

$$\sigma_r = P_0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при } r = 1, \quad (1)$$

$$\sigma_r^\infty = P - \delta \cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^\infty = P + \delta \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^\infty = \delta \sin 2\theta. \quad (2)$$

При такой записи граничных условий все напряжения и прочностные характеристики будут нормированы на величину  $\sigma_{сж}$  и в последующих расчетах это будет учитываться по умолчанию.

Действующие нагрузки таковы, что вокруг выработки образуется полностью охватывающая ее зона неупругих деформаций (ЗНД). В области упругих деформаций справедлив обобщенный закон Гука, а в зоне неупругих деформаций формируются две последовательно охватывающие друг друга зоны: зона разупрочнения (зона II), где порода подчиняется модифицированному условию прочности Кулона-Мора, и непосредственно примыкающая к контуру выработки зона разрушения (зона I), характеризующаяся остаточной прочностью и максимальными величинами необратимых деформаций пород. В этих зонах, справедлива принятая в работах [3, 4] модель запредельно деформируемого массива горных пород.

На границах раздела зон вокруг выработки имеют место условия сопряжения нормальных и тангенциальных компонент напряжений и перемещений (большие квадратные скобки означают скачок указанной величины на переходе через границы раздела зон):

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = [u_r] = [u_\theta] = 0 \quad \text{при } r = r_p(\theta), \quad r = r_s(\theta) \quad (3)$$

Рассмотрим основные соотношения, справедливые для плоско-деформированного горного массива с круговой цилиндрической выработкой.

Имеют место уравнения равновесия для плоской задачи

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0, \quad (4)$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$  – компоненты напряжений.

Имеет место единственное уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_\theta)}{\partial r^2} - r \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} = 0, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  и  $\gamma_{r\theta}$  – компоненты деформаций

В области упругих деформаций справедливы соотношения закона Гука

$$\varepsilon_{(r)} = \frac{1}{E_*} (\sigma_{(r)} - \mu_* \sigma_{(\theta)}), \quad \varepsilon_{(\theta)} = \frac{1}{E_*} (\sigma_{(\theta)} - \mu_* \sigma_{(r)}), \quad \gamma_{(r\theta)} = \frac{\tau_{(r\theta)}}{G_1} = \frac{2(1 + \mu)}{E_1} \tau_{(r\theta)}, \quad (6)$$

где  $\sigma_{(\theta)}$ ,  $\sigma_{(r)}$ ,  $\varepsilon_{(\theta)}$  и  $\varepsilon_{(r)}$  – компоненты напряжений и деформаций в упругой области;

$E_* = \frac{E_1}{1 - \mu^2}$ ,  $\mu_* = \frac{\mu}{1 - \mu}$ ,  $E_1$ ,  $G_1$ ,  $\mu$  – постоянные характеристики упругого материала: модуль

упругости, сдвига и коэффициент Пуассона.

Здесь и далее все компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) в упругой зоне обозначены круглыми скобками у индексов, в зоне разупрочнения II – квадратными скобками у индексов, а в зоне разрушения I – треугольными скобками у индексов.

В зоне разупрочнения (зона II) происходит нелинейное снижение прочностных свойств пород и имеет место введенное нами модифицированное условие прочности Кулона-Мора. В рассматриваемой постановке это условие может быть представлено следующим образом:

$$(\sigma_{[\theta]} - \sigma_{[r]})^2 + 4\tau_{[r\theta]}^2 = \sin^2 \varphi (\sigma_{[r]} + \sigma_{[\theta]} + 2H(\varepsilon_{[\theta]}))^2, \quad (7)$$

где  $\sigma_{[\theta]}$ ,  $\sigma_{[r]}$ ,  $\tau_{[r\theta]}$  – компоненты напряжений в зоне разупрочнения;  $\alpha_1 = (1 + \sin \varphi)/(1 - \sin \varphi)$ ,

$\alpha_2 = 2 \sin \varphi/(1 - \sin \varphi)$ ;  $\varphi$  – угол внутреннего трения породы (принимается постоянным);

$H = H(\varepsilon_{[\theta]})$  – переменный прочностной параметр (параметр огибающей кругов Мора).

Прочностной параметр  $H$  представляет собой функцию разупрочнения вида:  $H = H(\varepsilon_{[\theta]}) = H(\varepsilon_{[\theta]}, \varepsilon_c, \varepsilon_p)$ . Положим, что в условиях рассматриваемой задачи данная функция имеет вид [3, 4]



$$H(\varepsilon_{[\theta]}) = H(\varepsilon_{[\theta]}, \varepsilon_c, \varepsilon_p) = H_c + (H_p - H_c) \frac{\varepsilon_{[\theta]}^n - \varepsilon_c^n}{\varepsilon_p^n - \varepsilon_c^n} \quad (8)$$

Для нахождения деформированного состояния в зоне II используется дополнительное соотношение, связывающее окружные и радиальные компоненты запредельных деформаций  $\varepsilon_{[\theta]}^p$  и  $\varepsilon_{[r]}^p$  через коэффициент поперечной деформации породы на запредельной стадии деформирования  $\beta$  ( $\beta$  принимается постоянным:  $\beta = \text{const}$ ):

$$\varepsilon_{[r]}^p + \beta \varepsilon_{[\theta]}^p = 0 \quad (9)$$

Функция (8) с условием (7) позволяет распространить условие Кулона-Мора на стадию остаточной прочности горных пород. Такой подход допустим при условии, когда действующие напряжения в процессе деформирования не выходят за область сжатия [1].

В зоне разрушения (зона I) имеют место линейный характер деформирования пород и условие прочности Кулона-Мора, записанное через компоненты главных напряжений в рассматриваемой постановке

$$(\sigma_{\langle\theta\rangle} - \sigma_{\langle r\rangle})^2 + 4\tau_{\langle r\theta\rangle}^2 = \sin^2 \varphi (\sigma_{\langle r\rangle} + \sigma_{\langle\theta\rangle} + 2H_p)^2 \quad (10)$$

где  $\sigma_{\langle\theta\rangle}$ ,  $\sigma_{\langle r\rangle}$  и  $\tau_{\langle r\theta\rangle}$  – компоненты деформаций в зоне разрушения;  $H_p$  – величина, пропорциональная остаточной прочности породы.

В качестве дополнительного соотношения в зоне разрушения имеет место условие максимальной положительной дилатансии разрушенного материала без нарушения сплошности массива вида

$$\varepsilon_{\langle r\rangle}^p + \varepsilon_{\langle\theta\rangle}^p = \Theta^* \quad (11)$$

где  $\varepsilon_{\langle r\rangle}^p$  и  $\varepsilon_{\langle\theta\rangle}^p$  – компоненты деформаций в зоне разрушения,  $\Theta^* = \text{const}$  – максимальная величина необратимого изменения объема породы.

Для решения задачи необходимо привлечь еще два условия: условие перехода породы в состояние остаточной прочности на границе  $r_q$  и условие наступления предельного состояния породы на границе  $r_s$

$$\varepsilon_{[r]}^p + \varepsilon_{[\theta]}^p = \theta^* \text{ при } r = r_q(\theta) \quad (12)$$

$$(\sigma_{\langle\theta\rangle} - \sigma_{\langle r\rangle})^2 + 4\tau_{\langle r\theta\rangle}^2 = \sin^2 \varphi (\sigma_{\langle r\rangle} + \sigma_{\langle\theta\rangle} + 2H_c)^2 \text{ при } r = r_s(\theta) \quad (13)$$

На основе приведенных определяющих соотношений нами решена плоская неосесимметричная задача для запредельно деформируемого массива горных пород с круговой цилиндрической выработкой. Определены все компоненты напряжений и перемещений, описывающих НДС пород вокруг цилиндрической выработки, а также найдены две неизвестные границы: граница зоны разрушения  $r_q(\theta)$  и граница зоны разупрочнения  $r_s(\theta)$ .

Задача решается методом возмущений Д. Д. Ивлева, Л. В. Ершова [5] применительно к рассматриваемому телу. Решение ищется в виде рядов по степеням малого параметра, в качестве которого выступает параметр  $\delta$

$$\sigma_r = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \sigma_r^{(k)}, \quad \sigma_{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \sigma_{\theta}^{(k)}, \quad \tau_{r\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k \tau_{r\theta}^{(k)} \quad (14)$$

$$r_p = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k r_p^{(k)}, \quad r_s = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k r_s^{(k)}, \quad u_r = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k u_r^{(k)}, \quad u_{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k u_{\theta}^{(k)}$$

Метод возмущений дает возможность построить решение неосесимметричной задачи теории запредельного деформирования с любой требуемой точностью. Для практических целей достаточно ограничиться двумя-тремя членами в разложениях (14). В качестве нулевого приближения принимается решение плоской осесимметричной задачи теории запредельного деформирования для цилиндрической выработки, полученное нами в [4].

Запишем компоненты нулевого невозмущенного состояния массива вокруг цилиндрической выработки, приписав им индекс «нулик» в скобках наверху:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\langle r \rangle}^{(o)} &= (P_0 + H_p) r^{\alpha_2} - H_p, \quad \sigma_{\langle \theta \rangle}^{(o)} = (P_0 + H_p) \alpha_1 r^{\alpha_2} - H_p, \\
 \tau_{\langle r\theta \rangle}^{(o)} &= 0, \quad u_{\langle r \rangle}^{(o)} = \frac{\Theta^*}{2} \left( r - \frac{r_p^2}{r} \right) + \frac{1 + \mu}{E_1} \cdot \frac{r_s^{\beta+1}}{r r_p^{\beta-1}} \sin \varphi(P + H_c); \quad \kappa = \alpha_2 / (1 + \beta) \\
 \sigma_{[r]}^{(o)} &= \left( \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{[\theta]}} \right)^\kappa \left[ (P_0 + H_p) r_p^{\alpha_2} + \frac{(H_c - H_p) n \varepsilon_p^n}{(\kappa + n)(\varepsilon_p^n - \varepsilon_c^n)} \right] - H_c + (H_c - H_p) \frac{\kappa(\varepsilon_{[\theta]}^n - \varepsilon_c^n) - n \varepsilon_c^n}{(\kappa + n)(\varepsilon_p^n - \varepsilon_c^n)} \\
 \sigma_{[\theta]}^{(o)} &= \alpha_1 \sigma_{[r]} + \alpha_2 H(\varepsilon_{[\theta]}), \quad \tau_{[r\theta]}^{(o)} = 0, \quad u_{[r]}^{(o)} = \frac{1 + \mu}{E_1} r_s \left( \frac{r_s}{r} \right)^\beta \sin \varphi(P + H_c); \\
 \left. \begin{aligned} \sigma_{(r)}^{(o)} \\ \sigma_{(\theta)}^{(o)} \end{aligned} \right\} &= P \mp \left( \frac{r_s}{r} \right)^2 \sin \varphi(P + H_c), \quad \tau_{(r\theta)}^{(o)} = 0, \quad u_{(r)}^{(o)} = \frac{1 + \mu}{E_1} \frac{r_s^2}{r} \sin \varphi(P + H_c); \\
 r_p^{(o)} &= \left\{ \frac{\varepsilon_c^\kappa}{\varepsilon_p^\kappa (P_0 + H_p)} \left[ P - \sin \varphi(P + H_c) r_p^{\alpha_2} + H_c + \frac{(H_c - H_p) n \varepsilon_c^n}{(\kappa + n)(\varepsilon_p^n - \varepsilon_c^n)} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(H_c - H_p) n \varepsilon_p^n}{(\kappa + n)(\varepsilon_p^n - \varepsilon_c^n)(P_0 + H_p)} \right\}^{\frac{1}{\alpha_2}}, \quad r_s^{(o)} = r_p^{(o)\beta+1} \sqrt{\frac{\Theta^* E_1}{(1 - \beta)(1 + \mu) \sin \varphi(P + H_c)}}
 \end{aligned} \tag{15}$$

Для определения компонент  $\sigma_{ij}^{(k)}$ ,  $u^{(k)}$ ,  $r_q^{(k)}$ ,  $r_s^{(k)}$ , где  $k \geq 1$ , проводится линеаризация всех основных соотношений, граничных условий и условий сопряжения.

**Линеаризация и интегрирование основных соотношений.** Уравнения равновесия (4) линейны относительно компонент напряжений, поэтому они имеют место для любого приближения  $k$ . Соотношения связи между компонентами перемещений и деформаций также линейны относительно компонент деформаций и перемещений, поэтому они тоже сохраняют свой вид для любого приближения  $k$ .

Линеаризованные условия сопряжения компонент напряжений и перемещений (3) на границах зоны разрушения  $r_q(\theta)$  и зоны разупрочнения  $r_s(\theta)$  имеют вид [5]

$$\text{при } k = 0 \quad [\phi^{(o)}] = 0, \quad \text{при } k = 1 \quad \left[ \phi^{(1)} + \frac{d\phi^{(o)}}{dr} r_i^{(1)} \right] = 0, \tag{16}$$

$$\text{при } k = 2 \quad \left[ \phi^{(2)} + \frac{d\phi^{(1)}}{dr} r_i^{(1)} + \frac{d^2\phi^{(o)}}{dr^2} \frac{(r_i^{(1)})^2}{2} + \frac{d\phi^{(o)}}{dr} r_i^{(2)} \right] = 0,$$

где общим символом  $\phi$  обозначены компоненты напряжений и смещений, а квадратные скобки означают, что берется разность между соответствующими компонентами напряжений и смещений в зонах I и II, II и III;  $r_i$  – соответствующая граница раздела зон.

На контуре выработки ( $r = 1$ ) граничные условия (1) имеют осевую симметрию в предположении равномерного реактивного отпора крепи  $P_0$  и кругового поперечного сечения выработки. Тогда имеем:

$$\text{при } k = 0 \quad \sigma_r^{(o)} = P_0, \quad \tau_{r\theta}^{(o)} = 0; \quad \text{при } k \geq 1 \quad \sigma_r^{(k)} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(k)} = 0; \tag{17}$$

Линеаризованные граничные условия (2) на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) с учетом разложений (14) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \text{при } k = 0 \quad \sigma_r^{(o)\infty} &= P, \quad \sigma_\theta^{(o)\infty} = P, \quad \tau_{r\theta}^{(o)\infty} = 0; \\
 \text{при } k = 1 \quad \sigma_r^{(1)\infty} &= -\cos 2\theta, \quad \sigma_\theta^{(1)\infty} = \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta}^{(1)\infty} = \sin 2\theta; \\
 \text{при } k \geq 2 \quad \sigma_r^{(k)\infty} &= 0, \quad \sigma_\theta^{(k)\infty} = 0, \quad \tau_{r\theta}^{(k)\infty} = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

**Нахождение напряженного состояния в зонах I, II и III.** Для нахождения напряженного состояния в зонах I, II и III удобно перейти к безразмерным величинам: величины с размерностью длины приведем к радиусу зоны разупрочнения  $r_{os}$ , соответствующего осесимметричному случаю, а величины с размерностью напряжений к величине  $\alpha_2(P + H_c)$ . Сам малый параметр  $\delta$  приведем к величине  $2\alpha_2(P + H_c)$

$$r = \frac{r}{r_{os}}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\alpha_2(P + H_c)} \quad \delta = \frac{P_1 - P_2}{2\alpha_2(P + H_c)}$$

На контуре выработки граничные условия (1) имеют осевую симметрию (17), значит в зонах запредельного деформирования II и остаточной прочности I напряженное состояние остается осесимметричным при граничных условиях (2) в глубине массива на бесконечном удалении от контура выработки, т.е. будет выполняться условие

$$\text{при } k \geq 1 \quad \sigma_{\langle ij \rangle}^{(k)} = \sigma_{[ij]}^{(k)} = 0. \quad (19)$$

В этом случае компоненты НДС в указанных областях будут совпадать с компонентами НДС, полученными при решении плоской осесимметричной задачи теории запредельного деформирования вокруг цилиндрической выработки [4], а граница раздела I и II зон  $r_p(\theta)$  будет осесимметричной, т.е.  $r_p(\theta)$  будет радиусом  $r_{op}$ :  $r_p(\theta) = r_{op}$

Первое приближение для компонент допредельной (упругой) области и для границы  $r_s$  раздела зон II и III имеет вид

$$\sigma_{(r)}^{(1)} = -\left(1 - \frac{4}{r^2} + \frac{3}{r^4}\right)\cos 2\theta, \quad \sigma_{(\theta)}^{(1)} = \left(1 + \frac{3}{r^4}\right)\cos 2\theta, \quad \tau_{(r\theta)}^{(1)} = \left(1 + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{r^4}\right)\sin 2\theta \quad (20)$$

$$r_s^{(1)} = 2\cos 2\theta$$

Второе приближение для компонент упругой области и для границы  $r_s$  раздела зон II и III имеет вид

$$\sigma_{(r)}^{(2)} = -\frac{2}{r^2} + 2\left(\frac{9}{r^4} - \frac{10}{r^6}\right)\cos 4\theta, \quad \sigma_{(\theta)}^{(2)} = \frac{2}{r^2} + \left(-\frac{3}{r^4} + \frac{10}{r^6}\right)\cos 4\theta, \quad (21)$$

$$\tau_{(r\theta)}^{(2)} = 2\left(\frac{3}{r^4} - \frac{5}{r^6}\right)\sin 4\theta, \quad r_s^{(2)} = -(\alpha_1 + 2) - (\alpha_1 - 4)\cos 4\theta$$

Таким образом, уравнение границы  $r_s$  раздела зон II и III согласно (15), (20) и (21) запишется в виде

$$r_s = r_{os} [1 + 2\delta \cos 2\theta - \delta^2 ((\alpha_1 + 2) - (\alpha_1 - 4)\cos 4\theta)] \quad (22)$$

Как видно из формул (15) и (19) значения  $r_s$  зависит от свойств породы массива  $E_1, \mu, \alpha_i(\varphi), \Theta^*$ ; действующих внешних нагрузок  $P_0, P_1$  и  $P_2$ ; от показателей диаграммы деформирования породы  $H_c, H_p, \varepsilon_c, \varepsilon_p$ , а также от характера зависимости  $H(\varepsilon_{[0]})$ : параметра нелинейности  $n$ .

Если в полученном решении осуществить предельный переход  $\delta \rightarrow 0$ , то будем иметь соответствующее решение плоской осесимметричной задачи для цилиндрической выработки. В частности, уравнение для внешней границы зоны запредельного деформирования вырождается в радиус  $r_{os}$ :

$$r_s = r_{os} \quad (23)$$

Область существования полученного решения теории запредельного деформирования для круговой цилиндрической выработки определяется из условия отсутствия зоны разрушения I и находится из выражения

$$r_s \geq \beta^{+1} \sqrt{\frac{\Theta^* E_1}{(1 - \beta)(1 + \mu) \sin \varphi (P + H_c)}} [1 + 2\delta \cos 2\theta - \delta^2 ((\alpha_1 + 2) - (\alpha_1 - 4)\cos 4\theta)] \quad (24)$$

С другой стороны, зона разупрочнения II должна включать в себя полностью зону разрушения I, поэтому появляется еще одно условие, ограничивающее полученное решение

$$r_{os} [1 - 2\delta - \delta^2 ((\alpha_1 + 2) - (\alpha_1 - 4))] \geq r_p \quad (25)$$

**Нахождение деформированного состояния в зонах I, II и III.** Для определения деформированного состояния в упругой области III используем соотношения закона Гука (6) и выражения для упругих компонент напряжений (15), (20), (21). Тогда получим выражения для двух компонент перемещений  $u_{(r)}$ ,  $u_{(\theta)}$  в упругой области

$$\frac{4Gu_{(r)}}{\alpha_2(P+H_c)} = \frac{2}{(1+\alpha_1)r} - 2\delta\left(r + \frac{2}{r} - \frac{1}{r^3}\right)\cos 2\theta + 4\delta^2\left(\frac{1}{r} + 2\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^5}\right)\right)\cos 4\theta \quad (26)$$

$$\frac{4Gu_{(\theta)}}{\alpha_2(P+H_c)} = 2\delta\left(r + \frac{1}{r^3}\right)\sin 2\theta - 4\delta^2\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r^5}\right)\sin 4\theta$$

Для нахождения деформированного состояния в зонах I, II перейдем к безразмерным величинам: величины с размерностью длины приведем к радиусу зоны разупрочнения  $r_{os}$ , а величины с размерностью перемещений к величине  $\alpha_2(P+H_c)$

$$r = \frac{r}{r_{os}}, \quad u_i = \frac{u_i}{\alpha_2(P+H_c)}. \quad (27)$$

При определении перемещений в зоне разупрочнения II следует учитывать, что напряженное состояние в зоне II является осесимметричным ( $\tau_{[r\theta]} = 0$ ) и что полные деформации в ЗНД приравнены к запредельным ( $\varepsilon_{[ij]}^e = 0$ ). Первое уравнение получается из дилатансионной зависимости (9) в зоне II, а второе – из условия отсутствия угловых деформаций в зоне II ( $\gamma_{[r\theta]} = 0$ ):

$$\frac{du_{[r]}}{dr} + \beta \frac{u_{[r]}}{r} + \frac{\beta}{r} \frac{du_{[\theta]}}{d\theta} = 0, \quad \frac{du_{[\theta]}}{dr} - \frac{u_{[\theta]}}{r} + \frac{1}{r} \frac{du_{[r]}}{d\theta} = 0. \quad (28)$$

Уравнения (28) линейны относительно компонент перемещений, поэтому они сохраняют свой вид для любого приближения к:

$$\frac{du_{[r]}^{(k)}}{dr} + \beta \frac{u_{[r]}^{(k)}}{r} + \frac{\beta}{r} \frac{du_{[\theta]}^{(k)}}{d\theta} = 0, \quad \frac{du_{[\theta]}^{(k)}}{dr} - \frac{u_{[\theta]}^{(k)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{du_{[r]}^{(k)}}{d\theta} = 0. \quad (29)$$

Почти все горные породы имеют на запредельной стадии коэффициент поперечной деформации  $\beta \in (0,072; 13,928)$ . Для таких пород из уравнений (29) получены компоненты перемещений в первом приближении  $u_{[r]}^{(1)}$ ,  $u_{[\theta]}^{(1)}$

$$u_{[r]}^{(1)} = \sqrt{r^{1-\beta}} \left[ G_1 \cos(\beta_o \cdot \ln r) - \frac{\beta}{\beta_o} \left( \frac{1}{G} + \frac{1+\beta}{2\beta} G_1 \right) \sin(\beta_o \cdot \ln r) \right] \cos 2\theta \quad (30)$$

$$u_{[\theta]}^{(1)} = \sqrt{r^{1-\beta}} \left[ \frac{G_1}{2\beta} (\beta_o \sin(\beta_o \cdot \ln r) - (1+\beta) \cos(\beta_o \cdot \ln r)) - \left( \frac{1}{G} + \frac{1+\beta}{2\beta} G_1 \right) (\cos(\beta_o \cdot \ln r) + \frac{1+\beta}{\beta_o} \sin(\beta_o \cdot \ln r)) \right] \sin 2\theta$$

где  $G_1 = -\frac{1}{G} + \frac{3}{E} \frac{\beta-1}{\alpha_1+1}$ ,  $\beta_o = \frac{1}{2} \sqrt{14\beta - \beta^2 - 1}$

Для горных пород с коэффициентом поперечной деформации  $\beta \geq 13,928$  решение имеет отдельный вид

$$u_{[r]}^{(1)} = \frac{2}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \left( \frac{2\beta - \beta_2}{2G} + \frac{3\beta_2}{2E} \frac{\beta-1}{\alpha_1+1} \right) r^{\beta_1-\beta} - \left( \frac{2\beta - \beta_1}{2G} + \frac{3\beta_1}{2E} \frac{\beta-1}{\alpha_1+1} \right) r^{\beta_2-\beta} \right] \cos 2\theta \quad (31)$$

$$u_{[\theta]}^{(1)} = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[ \left( \frac{2\beta - \beta_2}{2G} + \frac{3\beta_2}{2E} \frac{\beta-1}{\alpha_1+1} \right) \frac{\beta_1 r^{\beta_1-\beta}}{\beta} - \left( \frac{2\beta - \beta_1}{2G} + \frac{3\beta_1}{2E} \frac{\beta-1}{\alpha_1+1} \right) \frac{\beta_2 r^{\beta_2-\beta}}{\beta} \right] \sin 2\theta$$

где  $\beta_{1,2} = \frac{1+\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 - 14\beta + 1}$

Найдем перемещения в зоне разрушения I. Учтем, что напряженное состояние в зоне I является осесимметричным ( $\tau_{\langle r\theta \rangle} = 0$ ) и что полные деформации в ЗНД приравнены к запредельным ( $\varepsilon_{\langle r\theta \rangle}^e = 0$ ). Первое уравнение получается из дилатансионной зависимости (11) в зоне I, а второе – из условия отсутствия угловых деформаций в зоне I ( $\gamma_{\langle r\theta \rangle} = 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{du_{\langle r \rangle}}{dr} + \frac{u_{\langle r \rangle}}{r} + \frac{1}{r} \frac{du_{\langle \theta \rangle}}{d\theta} &= \Theta^* , \\ \frac{du_{\langle \theta \rangle}}{dr} - \frac{u_{\langle \theta \rangle}}{r} + \frac{1}{r} \frac{du_{\langle r \rangle}}{d\theta} &= 0 . \end{aligned} \quad (32)$$

Уравнения (32) линейны относительно компонент перемещений, а величина  $\Theta^*$  не варьируется, поэтому они приводятся к следующему виду, справедливому для любого приближения к:

$$\begin{aligned} \frac{du_{\langle r \rangle}^{(k)}}{dr} + \frac{u_{\langle r \rangle}^{(k)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{du_{\langle \theta \rangle}^{(k)}}{d\theta} &= 0 , \\ \frac{du_{\langle \theta \rangle}^{(k)}}{dr} - \frac{u_{\langle \theta \rangle}^{(k)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{du_{\langle r \rangle}^{(k)}}{d\theta} &= 0 . \end{aligned} \quad (33)$$

Компоненты перемещений в первом приближении  $u_{\langle r \rangle}^{(1)}$ ,  $u_{\langle \theta \rangle}^{(1)}$  в зоне разрушения I получены из уравнений (33)

$$\begin{aligned} u_{\langle r \rangle}^{(1)} &= [C_{21} \cos(\sqrt{3} \cdot \ln r) + C_{22} \sin(\sqrt{3} \cdot \ln r)] 2 \cos 2\theta \\ u_{\langle \theta \rangle}^{(1)} &= [C_{21}(\sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \cdot \ln r) - \cos(\sqrt{3} \cdot \ln r)) - C_{22}(\sin(\sqrt{3} \cdot \ln r) + \sqrt{3} \cos(\sqrt{3} \cdot \ln r))] \sin 2\theta \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} C_{21} &= [D_1 \cos(\beta_o \ln r) + D_2 \sin(\beta_o \ln r)] \sin(\sqrt{3} \ln r) + [D_3 \cos(\beta_o \ln r) - D_4 \sin(\beta_o \ln r)] \cos(\sqrt{3} \ln r) \\ C_{22} &= [D_1 \cos(\beta_o \ln r) + D_2 \sin(\beta_o \ln r)] \cos(\sqrt{3} \ln r) - [D_3 \cos(\beta_o \ln r) - D_4 \sin(\beta_o \ln r)] \sin(\sqrt{3} \ln r) \\ D_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{G} + \frac{G_1}{2} \right); \quad D_2 = \frac{1}{\sqrt{3} \beta_o} \left( \frac{1}{G} + \frac{G_1}{2} \frac{\beta^2 + \beta - 1}{\beta} \right); \quad D_3 = \frac{G_1}{2}; \\ D_4 &= \frac{\beta}{\beta_o} \left( \frac{1}{G} + \frac{G_1}{2} \frac{\beta + 1}{\beta} \right). \end{aligned}$$

Отдельный интерес представляют выражения для перемещений контура цилиндрической выработки в условиях запредельного деформирования.

Перемещения контура цилиндрической выработки в первом приближении найдем из (34) при  $r = 1$ :

$$\begin{aligned} u_{\langle 1 \rangle}^{(1)} &= 2\delta\alpha_2 (P + H_c) r_{os} C_{21} \cos 2\theta \\ u_{\langle \theta 1 \rangle}^{(1)} &= \delta\alpha_2 (P + H_c) r_{os} (-C_{21} - \sqrt{3} C_{22}) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (35)$$

Полные выражения для перемещений контура цилиндрической выработки найдем согласно разложениям (14) с учетом (15) и (35) при  $r = 1$ :

$$\begin{aligned} u_{\langle 1 \rangle} &= \frac{3}{2E} r_{op}^2 \left( \frac{r_{os}}{r_{op}} \right)^{\beta+1} \sin \varphi (P + H_c) + \frac{\Theta^*}{2} (1 - r_{op}^2) + 2\delta\alpha_2 (P + H_c) r_{os} C_{21} \cos 2\theta \\ u_{\langle \theta 1 \rangle} &= \delta\alpha_2 (P + H_c) r_{os} (-C_{21} - \sqrt{3} C_{22}) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (36)$$

Если в полученном неосесимметричном решении для перемещений осуществить предельный переход  $\delta \rightarrow 0$ , то будем иметь соответствующее осесимметричное решение для перемещений

вокруг цилиндрической выработки, когда компоненты перемещений принимают вид [4]. Например, радиальные перемещения запишутся в виде [4]

$$u_{\langle r \rangle} = \frac{\Theta^*}{2} \left( r - \frac{r_{op}^2}{r} \right) + \frac{1 + \mu}{E_1} \cdot \frac{r_{os}^{\beta+1}}{r r_{op}^{\beta-1}} \sin \varphi(P + H_c), u_{\langle \theta \rangle} = 0 \quad (37)$$

$$u_{\langle 1 \rangle} = \frac{\Theta^*}{2} (1 - r_{op}^2) + \frac{1 + \mu}{E_1} \cdot r_{os}^2 \left( \frac{r_{os}}{r_{op}} \right)^{\beta-1} \sin \varphi(P + H_c), u_{\langle \theta_1 \rangle} = 0$$

При осуществлении предельного перехода  $n \rightarrow \infty$ ,  $H_p \rightarrow H_c$  будем иметь случай идеальной пластичности горных пород в неосесимметричном решении для круговой цилиндрической выработки. Здесь вместо двух зон I и II вокруг выработки имеем только одну зону пластичности II со значением  $H_c$  и неизвестной границей  $r_s$ . При осуществлении предельного перехода  $n \rightarrow 0$ ,  $H_c \rightarrow H_p$ , имеем случай идеальной хрупкости горных пород в неосесимметричном решении для круговой цилиндрической выработки. Здесь также вместо двух зон I и II вокруг выработки имеем только одну зону хрупкого разрушения I с параметром остаточной прочности  $H_p$  и неизвестной границей  $r_p$ .

**Заключение.** Решена плоская неосесимметричная задача теории запредельного деформирования для круговой цилиндрической выработки в постановке плоской деформации в условиях неравнокомпонентных нагрузок на бесконечности. Задача решена аналитическим методом возмущений применительно к рассматриваемому телу. Определены все компоненты НДС и выражения для неизвестных границ раздела зон. Положение этих границ зависит от напряженного состояния охватывающих внешних областей. В данном решении имеются две неизвестные границы  $r_p$  и  $r_s$ , разделяющие зоны с различными физическими свойствами, причем внешняя граница зоны разрушения (I) является осесимметричной и представляет собой радиус  $r_{op}$ , в то время как внешняя граница зоны разупрочнения (II)  $r_s$  не является осесимметричной и определяется из уравнения (19). Поскольку входящий в уравнение  $r_s$  радиус  $r_{os}$  зависит от радиуса  $r_{op}$ , то значит границы  $r_{op}$  и  $r_s$  также взаимосвязаны. В этом заключаются отличия данного решения от решений подобных (упругопластических) задач в классических постановках [1, 2].

Дана оценка прочности пород приконтурной зоны и исследовано влияние параметров запредельного деформирования горных пород, а также фактора неравнокомпонентности нагрузок на бесконечности на компоненты НДС (границу ЗНД  $r_s$  и смещения контура  $u_{\langle 1 \rangle}$ ) вокруг выработки. Установлено, что запредельное деформирование по нелинейному закону ( $0 < n < \infty$ ,  $H_p < H_c$ ) в отличие от идеальнопластического ( $n \rightarrow \infty$ ,  $H_p \rightarrow H_c$ ) приводит к росту границы ЗНД  $r_s$  и смещений контура выработки  $u_{\langle 1 \rangle}$ .

Согласно результатам, увеличение параметра неосесимметричности  $\delta$  ( $\delta = (P_1 - P_2) / 2\sigma_{сж}$ ), вызванного действием тектонических сил, приводит к увеличению отклонения контура границы  $r_s$  от кругового (граница  $r_s$  вытягивается в направлениях действия меньших усилий  $P_2$ ) и к увеличению отклонения радиальных смещений контура  $u_{\langle 1 \rangle}$  от осесимметричного распределения (максимальные смещения  $u_{\langle 1 \rangle}$  развиваются в направлениях действия меньших усилий  $P_2$ ). Вместе с тем наличие запредельного деформирования ( $n = 2$  в сравнении с  $n \rightarrow \infty$ ), уменьшает указанные отклонения для  $r_s$  и  $u_{\langle 1 \rangle}$ . Уменьшение этих отклонений происходит также при увеличении среднего уровня начальных напряжений  $P = (P_1 + P_2) / 2\sigma_{сж}$ .

Полученные результаты могут быть использованы при подборе технических характеристик крепей. В условиях запредельного деформирования массива горных пород при подборе крепей необходимо учитывать бо'льшие смещения контура выработки и большие размеры зоны разупрочнения  $r_s$  в сравнении с идеально пластичным случаем. Также весьма важным при подборе крепей является фактор неравнокомпонентности нагрузок на бесконечности. Необходимо учитывать вызванный им разброс значений  $r_s$  и  $u_{\langle 1 \rangle}$  по контуру выработки. Влияние этого фактора снижается с ростом степени разупрочнения пород и с ростом общей концентрации напряжений вокруг выработки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алимжанов М.Т. Устойчивость равновесия тел и задачи механики горных пород. – Алматы: Наука, 1982. – 272 с.
2. Алимжанов М.Т. Нетрадиционный подход к анализу состояния пород приконтурной зоны глубокой горизонтальной выработки // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. – 1993. – № 3. – С. 23-26.
3. Алимжанов А.М. и др. Упругопластическое напряженно-деформированное состояние массива со сферической полостью с учетом запредельного деформирования горных пород // Вестник КазАТК им. М. Тынышпаева. – 2010. – № 3. – С. 112-118.
4. Алимжанов А.М., Исмаканова А.К. Напряженно-деформированное состояние вокруг цилиндрической выработки с учетом запредельного деформирования массива горных пород // Вестник НИА РК. – 2011. – № 1. – С. 48-58.
5. Ивлев Д.Д., Еришов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. – М.: Наука, 1978. – 208 с.

*А. М. Әлімжанов*

ШЕКТЕН АРҒЫ ДЕФОРМАЦИЯЛАНАТЫН КЕН ЖЫНЫСЫ ҚАТΠΑРЛАРЫНДА  
ЖҮРГІЗІЛГЕН ДӨҢГЕЛЕК ЦИЛИНДРЛІ ҚАЗБА ҮШІН ЖАЗЫҚ ДЕФОРМАЦИЯ  
ҚОЙЫЛЫМЫНДАҒЫ ОСЕСИММЕТРЛІК ЕМЕС ЕСЕП

Жұмыста шектен арғы деформацияланатын кен жынысының сызықтық емес үлгісі негізінде дөңгелек цилиндрлі қазба үшін шексіздіктегі жүктемелер бөліктерінің бірдей болмайтын жағдайындағы жазық деформация қойылымында осесимметрлік емес есеп шешілген. Есеп қарастырылған денеге қатысты қозу аналитикалық әдісімен шешілген. Қазба маңындағы кернеу мен орын ауыстырудың барлық компоненттері, сол сияқты бұзылу аумағы мен беріксіздену аумағының екі белгісіз шекаралары анықталған. Контур маңындағы жыныстардың беріктігі бағаланған және контур маңы аумағының шектен арғы деформациялану параметрлерінің қазба айналасындағы кернеулі-деформациялық күй (КДК) компоненттеріне әсері зерттелген.

*А. М. Alimzhanov*

PLANE NON-AXISSYMMETRIC PROBLEM  
FOR THE OVER-LIMITING DEFORMABLE ROCK MASSIF  
WITH ROUND CYLINDRICAL WORKING

Plane non-axisymmetric problem for round cylindrical working under plane deformations statement and under action of unequal external orthogonal loads was solved in the article on the basis of elaborated non-linear model of the over-limiting deformable rock massif. The problem was solved by means of disturbance analytical method as applied to considered object. All the stresses and deformations components round working and also two unknown boundaries of destruction and deconsolidation zones were found. Rock strength around cylindrical working with allowance for the rock massif over-limiting deforming was estimated and effects of the rock over-limiting deforming parameters on stress-strain state (SSS) components were researched.

Л. А. АЛЕКСЕЕВА

## ТВИСТОРНОЕ БИВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, г. Алматы

Рассматривает бикватернионное дифференциальное уравнение из класса биволновых уравнений общего вида. Исследуется частный случай этих уравнений при чисто векторном представлении его структурного коэффициента. Эквивалентная ему система дифференциальных уравнений относится к уравнениям Янга-Милса. Построены обобщенные решения неоднородного уравнения и однородного, описывающие твисторы и твисторные поля. Получены элементарные бикватернионные  $\xi$ -твисторы и исследованы их свойства в зависимости от вида структурного коэффициента.

**Ключевые слова:** бикватернион, биградиент, биволновое уравнение, обобщенное решение, твистор, скалярный потенциал.

**1. Твисторное биволновое уравнение.** В статьях [1-3] построены обобщенные решения бикватернионных волновых уравнений вида:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B}+m\mathbf{B}=\mathbf{G}(\tau,x), \quad (0)$$

где структурный коэффициент  $m$  – комплексное число ( $m \in \mathbf{Z}$ ), взаимные биградиенты  $\nabla^{\pm}=\partial_{\tau} \pm i\nabla$  – дифференциальные бикватернионные операторы, действие которых определено алгеброй бикватернионов [3]:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B}(\tau,x) \triangleq (\partial_{\tau} \pm i\nabla) \circ (b(\tau,x) + B(\tau,x)) = \partial_{\tau} b \mp i \operatorname{div} B \pm i \operatorname{grad} b + \partial_{\tau} B \pm i \operatorname{rot} B$$

$b(\tau,x)$  и  $B(\tau,x)$  – соответственно обобщенные функция и трехмерная вектор-функция на пространстве Минковского  $M = \{(\tau,x) : \tau \in R^1, x \in R^3\}$ . Там же показано, что это уравнение эквивалентно системе уравнений Максвелла (при  $m=0$ ) и Дирака при мнимом  $m$  ( $m = i\rho$ ).

Линейные бикватернионные дифференциальные уравнения вида:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B}+\mathbf{F} \circ \mathbf{B}=\mathbf{G}(\tau,x), \quad (1)$$

где структурный коэффициент  $\mathbf{F} = f + F$  – комплексный бикватернион, эквиваленты системам 8-ми дифференциальных уравнений гиперболического типа. Будем называть их *биволновыми уравнениями общего вида*. Уравнение (0) его частный случай.

Здесь исследуем случай, когда  $\mathbf{F} = F$  – трехмерный комплексный вектор. Тогда уравнение (1) имеет вид (для верхнего знака биградиента):

$$(\partial_{\tau} + i\nabla + F)\mathbf{B}=\mathbf{G}, \quad (2)$$

Построим его обобщенные решения при произвольной правой части из класса обобщенных бикватернионов, компоненты которого являются обобщенными функциями. Решения (1) для нижнего знака (–) можно получить из них, используя операцию комплексного сопряжения.

**2. Скалярные потенциалы. Обобщенное решение уравнения (2).** Введем операторы:

$$\mathbf{D}_F^+ = \nabla^+ + F, \quad \mathbf{D}_F^- = \nabla^- - F.$$

Легко видеть, что их суперпозиция коммутативна и обладает следующим полезным свойством.

$$\mathbf{D}_F^+ \mathbf{D}_F^- = \mathbf{D}_F^- \mathbf{D}_F^+ \triangleq (\nabla^+ + F) \circ (\nabla^- - F) = \square + (F, F) - 2i(F, \nabla). \quad (3)$$

где  $\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta$  – волновой оператор ( $\Delta$  – оператор Лапласа). Используя это свойство и свойство ассоциативности бикватернионного умножения, из (2) получим

$$\mathbf{D}_F^- \mathbf{D}_F^+ \mathbf{B} = \{\square + (F, F) - 2i(F, \nabla)\} \mathbf{B} = \mathbf{D}_F^- \mathbf{G} = \mathbf{Q}$$

Т.е. каждая компонента  $\mathbf{B}$  удовлетворяет уравнению



$$\square u + (F, F)u - 2i(F, \nabla u) = q(\tau, x) \quad (4)$$

с соответствующей  $\mathbf{Q}$  правой частью.

**Теорема 1.** *Обобщенное решение уравнения (2) можно представить в виде*

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_F^-(\psi * \mathbf{G}) = \mathbf{D}_F^-\psi * \mathbf{G} + \mathbf{B}^0 = \psi * \mathbf{D}_F^-\mathbf{G} + \mathbf{B}^0 \quad (5)$$

где  $\psi(\tau, x)$  – фундаментальное решение уравнения (4) (при  $q = \delta(\tau)\delta(x)$ ), а  $\mathbf{B}^0(\tau, x)$  решение однородного уравнения (2) (при  $\mathbf{G} = 0$ ):

$$\mathbf{B}^0 = \sum_{\psi^0} \mathbf{D}_F^-\psi^0 * \mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0} \psi^0 * \mathbf{D}_F^-\mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0} \mathbf{D}_F^-(\psi^0 * \mathbf{C}^0) \quad (6)$$

$\psi^0(\tau, x)$  – решения однородного уравнения (4),  $\mathbf{C}^0(\tau, x)$  – произвольные бикватернионы, допускающие такую свертку.

Здесь и далее значок \* означает операцию свертки (см. [1, 4]).

**Доказательство.** В силу линейности уравнения, достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (5). Подставим первое слагаемое в уравнение (2) и, используя (3), получим

$$(\nabla^+ + F)(\nabla^- - F)(\psi * \mathbf{G}) = (\square\psi - 2i(F, \nabla\psi) + (F, F)\psi) * \mathbf{G} = \delta(\tau)\delta(x) * \mathbf{G} = \mathbf{G}.$$

Для каждого слагаемого второй суммы имеем

$$(\nabla^+ + F)(\nabla^- - F)(\psi^0 * \mathbf{C}^0) = \{(\square - 2i(F, \nabla) + (F, F))\psi^0\} * \mathbf{C}^0 = 0.$$

Здесь мы воспользовались известными свойствами свертки [4].

Очевидно, в силу линейности уравнения, любое решение можно представить в аналогичном виде.

Уравнение (4), если положить  $m^2 = (F, F)$ , содержит оператор Клейна-Гордона-Фока  $(\square + m^2)$  и дополнительное слагаемое  $(-2i(F, \nabla\psi))$ . Интересно, что появление этого дополнительного члена значительно упрощает вид его фундаментального решения, в сравнении с фундаментальным решением уравнения Клейна-Гордона-Фока, которое известно (см. [5]).

**Теорема 2.** *Фундаментальные решения уравнения (4) имеют вид:*

$$\psi = \frac{e^{-i(F, x)}}{4\pi\|x\|} \left( (1-a)\delta(\tau - \|x\|) + a\delta(\tau + \|x\|) \right) + \psi^0, \quad \forall a \in \mathbf{Z}, \quad (7)$$

где  $\delta(\tau - \|x\|)$  – простой слой на световом конусе  $\tau = \pm\|x\|$ ;  $\psi^0(\tau, x)$  – решение однородного уравнения (4) (при  $q = 0$ ).

**Доказательство.** Для доказательства формулы теоремы используем преобразование Фурье обобщенных функций. Далее переменные Фурье, соответствующие  $(\tau, x)$  обозначаем  $(\omega, \xi)$  соответственно. Уравнения для  $\psi$  имеет вид:

$$\square\psi + (F, F)\psi - 2i(F, \nabla\psi) = \delta(\tau)\delta(x), \quad (8)$$

а его преобразование Фурье

$$\left( \|\xi\|^2 - \omega^2 - 2(F, \xi) + (F, F) \right) \bar{\psi}(\omega, \xi) = 1. \quad (9)$$

Откуда получим

$$\bar{\psi}(\omega, \xi) = \frac{1}{(\xi - F, \xi - F) - \omega^2}. \quad (10)$$

Поскольку правая часть имеет неинтегрируемые особенности, для построения обратного преобразования Фурье следует выбрать определенные регуляризации.

Фундаментальные решения уравнения Даламбера ( $\square u = \delta(x)\delta(\tau)$ ) имеют вид  $(4\pi\|x\|)^{-1} \delta(\tau \mp \|x\|)$ , либо представимы в виде их суммы:

$$\frac{1-a}{4\pi\|x\|} \delta(\tau - \|x\|) + \frac{a}{4\pi\|x\|} \delta(\tau + \|x\|), \quad \forall a \in \mathbf{Z}.$$

Это сингулярные обобщенные функции – простые слои на световом конусе "будущего" и "прошлого":  $\tau = \pm \|x\|$ . Их преобразование Фурье равно следующим регуляризациям функции  $(\|\xi\|^2 - \omega^2)^{-1}$ :

$$F \left[ \frac{1}{4\pi \|x\|} \delta(\tau \mp \|x\|) \right] = \frac{1}{\|\xi\|^2 - \omega^2 \pm i0}. \quad (11)$$

Используя свойства сдвига преобразования Фурье [4], из (10) и (11) следует формула (7). Теорема доказана.

Заметим, что определяющий решение твисторного уравнения *скалярный потенциал*  $\psi$  – это сферическая волна, распространяющаяся в  $R^3$  с единичной скоростью (если  $\tau$  – время). При  $\text{Re} F \neq 0$ , реальная и мнимая часть плотности слоя на сфере  $\|x\| = |\tau|$  колеблются с изменением  $x$ , поэтому для уравнения (2) здесь предложено такое название (автор не возражает, если найдется более подходящее).  $\text{Im} F$  дает экспоненциальное затухание или возрастание плотности в зависимости от направления  $x$  по отношению к  $H$ .

**3. Скалярные потенциалы однородного твисторного уравнения.** Рассмотрим решения однородного уравнения (4). Его преобразование Фурье имеет вид:

$$((\xi - F, \xi - F) - \omega^2) \bar{\psi}^0 = 0 \quad (12)$$

Следовательно  $\bar{\psi}^0 = \varphi(\omega, \xi) \delta_S(\omega, \xi)$ , где  $\varphi(\omega, \xi)$  – произвольная локально интегрируемая функция, а  $\delta_S(\omega, \xi)$  – простой слой на трехмерной поверхности  $S$  в  $R^4$ :

$$S = \{(\omega, \xi) : (\xi - F, \xi - F) - \omega^2 = 0\}. \quad (13)$$

И формальное решение однородного уравнения имеет вид поверхностного интеграла

$$\psi^0(\tau, x) = \int_S \varphi(\omega, \xi) \exp(-i\omega\tau - i(x, \xi)) dS(\omega, \xi), \quad \forall \varphi(\omega, \xi) \in L_1(S) \quad (14)$$

При каких  $F$  такая поверхность существует и какой вид она имеет?

Пусть  $F$  – действительный вектор:  $F = E$ . Тогда  $S$  – это конус в  $R^4$  с вершиной в точке  $(\omega, \xi) = (0, E)$ . В этом случае (14) можно записать в виде:

$$\psi^0(\tau, x) = \int_{R^3} \chi(\xi) \exp(\pm i\|\xi - E\|\tau - i(x, \xi)) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad \forall \chi(\xi) \in L_1(R^3) \quad (15)$$

Если  $F$  – мнимый вектор:  $F = iH$ ,  $\text{Im} H = 0$ . Тогда из (13) следует:

$$(\xi - iH, \xi - iH) = \|\xi\|^2 - \|H\|^2 - 2i(H, \xi) = \omega^2$$

Решением этого уравнения будет пересечение двух множеств, задаваемых равенствами:

$$S = \{(\omega, \xi) : \|\xi\|^2 - \|H\|^2 = \omega^2, \quad (H, \xi) = 0\}$$

В этом случае решением однородного уравнения будет интеграл по части плоскости, перпендикулярной вектору  $H$ , с выколотым кругом радиуса  $\|H\|$  с центром в точке  $\xi = 0$ :

$$\psi^0(\tau, x) = \int_{\substack{(H, \xi)=0, \\ \|\xi\| \geq \|H\|}} \chi(\xi) \exp\left(\pm i\tau \sqrt{\|\xi\|^2 - \|H\|^2} - i(x, \xi)\right) d\xi_{\perp H}, \quad \forall \chi(\xi) \in L_1(R^3) \quad (16)$$

Если имеем комплексное  $F = E + iH$ , тогда из (13) следует:

$$(\xi - E - iH, \xi - E - iH) = \|\xi - E\|^2 - \|H\|^2 - 2i(\xi - E, H) = \omega^2$$

В этом случае решением однородного уравнения будет интеграл по части плоскости, проходящей через точку  $\xi^* = E$  и перпендикулярной вектору  $H$ , с выколотым кругом радиуса  $\|H\|$  с центром в  $\xi = E$ :

$$\psi^0(\tau, x) = \int_{\substack{(H, \xi)=-(H, E), \\ \|\xi - E\| \geq \|H\|}} \phi(\xi) \exp\left(\pm i\tau \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} - i(x, \xi)\right) d\xi_{\perp H}, \quad \forall \phi(\xi) \in L_1(R^3) \quad (17)$$

Выбор  $\phi(\xi)$  позволяет строить широкий класс решений твисторных уравнений.

**4. Элементарный  $\xi$ -твистор.** Назовем решения однородного уравнения (2) *твисторами*. Построим их бикватернионные представления. Заметим, что функции

$$\psi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) = \exp\left(\pm i\tau\sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} - i(x, \xi)\right) \quad (18)$$

являются решением однородного уравнения (4) и представляют собой две гармонические волны, движущиеся в направлении волнового вектора  $\xi$  и противоположном направлении с фазовой скоростью  $c = \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} / \|\xi\|$ ; длина волн  $\lambda = 2\pi / \|\xi\|$ . При  $\|\xi - E\| > \|H\|$  их частота  $\omega = \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2}$ , период колебаний  $T = 2\pi / \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2}$ . При  $\|\xi - E\| < \|H\|$  – это две стоячие гармонические волны с экспоненциально затухающей и возрастающей по времени амплитудой. При  $\|\xi - E\| = \|H\|$  амплитуда не зависит от времени и они совпадают.

Рассмотрим порождаемый ими элементарный  $\xi$ -твистор -

$$\begin{aligned} \Psi_{\xi}^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}\|\xi - E\|} \mathbf{D}_F \psi_{\xi}^{\pm} = (\nabla^- - F) \frac{\exp\left(\pm i\tau\sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} - i(x, \xi)\right)}{\sqrt{2}\|\xi - E\|} = \\ &= \frac{\pm i\sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2} - (\xi + E + iH)}{\sqrt{2}\|\xi - E\|} \psi_{\xi}^{\pm}, \quad \xi \neq E. \end{aligned} \quad (19)$$

Его норма и псевдонорма соответственно равны

$$\|\Psi_{\xi}^{\pm}\| = 1, \quad \langle\langle \Psi_{\xi}^{\pm} \rangle\rangle = i \frac{\|H\|}{\|\xi - E\|}, \quad (20)$$

Бикватернион его энергии-импульса

$$\Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) = \Psi_{\xi}^{\pm} \circ (\Psi_{\xi}^{\pm})^* = W(\Psi_{\xi}^{\pm}) + iP(\Psi_{\xi}^{\pm})$$

равен:

$$\begin{aligned} \Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) &= 1 - i \frac{[e_{\xi-E}, H] \mp e_{\xi-E} \sqrt{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2}}{\|\xi - E\|}, \\ e_{\xi-E} &= \frac{\xi - E}{\|\xi - E\|}, \quad \|e_{\xi-E}\| = 1 \end{aligned} \quad (21)$$

Норма и псевдонорма  $\Xi_{\xi}$  равны

$$\|\Xi(\Psi_{\xi}^{\pm})\| = \sqrt{1 + \frac{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2 \cos^2 \gamma}{\|\xi - E\|^2}}, \quad \langle\langle \Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) \rangle\rangle = \sqrt{1 - \frac{\|\xi - E\|^2 - \|H\|^2 \cos^2 \gamma}{\|\xi - E\|^2}},$$

где  $\gamma$  угол между векторами  $e_{\xi-E}, H$ . Интересно, что

$$\langle\langle \Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) \rangle\rangle = 0, \quad \|\Xi(\Psi_{\xi}^{\pm})\| = \sqrt{2} \quad \text{при } e_{\xi-E} \perp H.$$

Наиболее простой вид  $\Psi_{\xi}^{\pm}$  и  $\Xi(\Psi_{\xi}^{\pm})$  имеют при  $H = 0$ :

$$\begin{aligned} \Psi_{\xi}^{\pm} &= \frac{\pm i + e_{\xi-E}}{\sqrt{2}} \exp(\pm i\tau\|\xi - E\| - i(x, \xi)), \quad \|\Psi_{\xi}^{\pm}\| = 1, \quad \langle\langle \Psi_{\xi}^{\pm} \rangle\rangle = 0, \\ \Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) &= 1 \pm e_{\xi-E}, \quad \|\Xi(\Psi_{\xi}^{\pm})\| = \sqrt{2}, \quad \langle\langle \Xi(\Psi_{\xi}^{\pm}) \rangle\rangle = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Если  $\xi = E$ , из скалярного потенциала (18) получим элементарный  $E$ -твистор:

$$\Psi_E^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{D}_F^- \psi_E^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \pm i \|H\| - (2E + iH) \} \psi_E^\pm;$$

$$\|\Psi_E^\pm\| = \sqrt{2\|E\|^2 + \|H\|^2}, \quad \langle \langle \Psi_E^\pm \rangle \rangle = i\sqrt{2}\|E\|.$$

$$\Xi(\Psi_E^\pm) = 2\|E\|^2 + \|H\|^2 \pm 2i\|H\|E.$$

Элементарные  $\xi$ -твисторы описывают восьмимерные гармонические волны, движущиеся вдоль вектора  $\xi$ , с определенной амплитудой по каждой составляющей скалярной и векторной действительной и мнимой части твистора. Направление движения определяется верхним либо нижним знаком твистора и влияет на амплитуду волны.

**5. Нестационарные твисторные поля.** Используя  $\Psi_\xi^\pm$  можно представить  $\mathbf{V}^0(\tau, x)$  в виде суммы твисторов вида:

$$\mathbf{V}^0(\tau, x) = \sum_{C^0(\tau, x)} \Psi^\phi(\tau, x) * C^0(\tau, x), \quad (23)$$

$$\Psi^\phi(\tau, x) = \int_S \phi(\xi) \Psi_\xi(\tau, x) dS(\xi), \quad \forall \phi \in L_1(S)$$

Скалярно-векторные поля  $C^0(\tau, x)$  тоже произвольные, допускающие такие свертки, в том числе могут быть из класса сингулярных обобщенных функций.

**Заключение.** Рассмотренное здесь биволновое твисторное уравнение (1), если записать его в виде системы уравнений для скалярной и векторной части, можно отнести к классу уравнений Янга-Милса, используемых в квантовой механике для построения моделей элементарных частиц [6]. Здесь показано, что для твисторов существуют порождающие их скалярные потенциалы, которые удовлетворяют уравнению (30). Решения этого уравнения представляются в виде поверхностных и контурных интегралов от элементарных потенциалов, выражаемых через экспоненциальные функции, и содержат достаточно произвольные подынтегральные функции типа  $\phi$ . От этих представлений нетрудно перейти к представлению твисторов с использованием функций Бесселя и сферических гармоник.

Биволновое уравнение (1) имеет вид уравнения трансформации масс-зарядов-токов электрогравитмагнитного поля под действием внешнего ЭГМ-поля, описываемого бикватернионом  $\mathbf{F}$ , ранее предложенного автором для одной бикватернионной модели ЭГМ-поля [7,8]. Если перейти на физический язык, полученные здесь твисторы для этой модели описывают трансформацию спиноров свободного поля (при  $F = 0$ ), под воздействием постоянного внешнего ЭГМ-поля, вектор электрической напряженности которого равен  $E$ , а гравитмагнитной напряженности  $H$ . Потенциальная часть  $H$  описывает напряженность внешнего гравитационного поля, а его вихревая часть соответствует магнитной напряженности внешнего поля. Интересно, что для этой модели ЭГМ-поля бикватернионная форма уравнения Дирака [3] описывает трансформацию спиноров свободного поля (при  $t = 0$ ) под воздействием внешнего скалярного поля сопротивления-поглощения. Т.е. имеет совсем другой смысл, нежели уравнение Дирака в квантовой механике [9]. Суммарное воздействие таких полей описывается уравнением (1) в его общем виде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Л.А. Уравнение Дирака и его обобщенные решения. 1. Бикватернионная форма и КГФШ-уравнение // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2011. – № 5(279). – С. 9-14.
2. Алексеева Л.А. Уравнение Дирака и его обобщенные решения. 2. Скалярные потенциалы и бикватернионы спинорных полей // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2011. – № 5(279). – С. 15-18.
3. Alexeyeva L. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Int. J. Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications. – 2012. – V. 7. – Issue 1. – 19 p.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976.
5. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с. – ISBN 5-9221-0093-9.
6. Yang C. N., Mills R. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance // Physical Review. 1954. – № 96(1). – P. 191-195.

7. Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // Известия НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2004. – № 3. – С. 45-53.
8. Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравитационного поля // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2009. – Т. 6, № 1. – С. 122-134.
9. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

*Л. А. Алексеева*

#### ТВИСТОРЛЫҚ ҚОСТОЛҚЫНДЫ ТЕНДЕУ ЖӘНЕ ОНЫҢ ТАЛДАП ҚОРЫТЫЛҒАН ШЕШІМІ

Қостолқынды тендеудің жалпы көрінісі класының қоскватерниондық дифференциалдық тендеулері қарастырылған. Бұл тендеулердің құрылымдық коэффициенттерінің таза векторлық түсінігіндегі кездейсоқ жағдайлары зерттелген. Янга-Милс тендеуі бұған баламалы дифференциалдық тендеулер класы жүйесіне жатады. Твисторлар мен твисторлық өрістерді сипаттайтын біртекті және біртекті емес тендеулердің талдап қорытылған шешімдері құрылған. Элементарлық қоскватерниондық  $\xi$ -твисторы алынып, оның нақты, жалған және кешенді тендеуінің құрылымдық коэффициенті компоненттері зерттелді.

**Негіз сөздер:** қоскватернион, қосградиент, қос толқынды тендеу, қорытып талдау шешімі, твистор, скалярлық әлеует.

*L. A. Alexeyeva*

#### THE TWISTOR BIWAVE EQUATION AND ITS GENERALIZED SOLUTIONS

The biquaternionic differential equation from a class of biwave equations of a general type is considered. The special case of these equations is investigated at purely vector representation of its structural factor. The system of the differential equations equivalent to it treats Young-Mills equations. Generalized solutions of the non-uniform and uniform equations, describing twistors and twistor fields, are constructed. The elementary biquaternionic twistors are received and their properties are investigated for real, imaginary and complex form of structural factor components.

**Keywords:** biquaternion, bigradient, biwave equation, generalized solution, twistor, scalar potential.

Э. Г. БООС, Т. ТЕМИРАЛИЕВ, М. ИЗБАСАРОВ, В. В. САМОЙЛОВ

## ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СОБЫТИЯХ С БОЛЬШОЙ МНОЖЕСТВЕННОСТЬЮ В АНТИПРОТОН-ПРОТОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ ИМПУЛЬСЕ 22,4 ГэВ/с

Физико-технический институт, г. Алматы

*Изучена сферичность событий для заряженных частиц в антипротон-протонных взаимодействиях и показано, что события становятся более сферичными с ростом множественности. В событиях антипротон-протонной аннигиляции наблюдаются частицы с высокими поперечными импульсами.*

Угловое распределение вторичных частиц, рожденных в ядерных взаимодействиях, является важнейшим источником информации о механизме этих процессов. Исследование взаимодействий, сопровождающихся рождением вторичных заряженных частиц с предельно большой множественностью, важно потому, что, во-первых, события этого класса будут в основном характеризоваться передачей всей энергии заряженным частицам, что дополнительно уменьшает неоднозначность, связанную с рождением нейтральных частиц, и, во-вторых, взаимодействия данной категории более чувствительны к структуре соударяющихся частиц.

Изучение коллективной переменной сферисити  $S$ , характеризующей меру угловой изотропии испускания вторичных частиц в системе центра масс относительно линии соударения взаимодействующих частиц, представляет большой интерес при исследовании механизма неупругих взаимодействий.

Переменная сферисити  $S$  определяется формулой [1]

$$S = \frac{3}{2} \min \frac{\sum \vec{p}_{Ti}^2}{\sum \vec{p}_i^2}, \quad (1)$$

где  $p_i^2$  и  $\vec{p}_{Ti}^2$  – импульс  $i$ -частицы и его поперечная составляющая в системе центра масс.

Экспериментальные данные получены при экспонировании двухметровой водородной пузырьковой камеры Людмила Объединенного института ядерных исследований пучком антипротонов с импульсом 22,4 ГэВ/с на ускорителе У-70 Института физики высоких энергий в г. Серпухов (Россия).

В работе [2] изложена методика разделения событий антипротон – протонной аннигиляции и неаннигиляционных  $\bar{p}p$ -взаимодействий при 22,4 ГэВ/с.

Рождение частицы с большим поперечным импульсом обычно связывают с жесткими процессами. В этой связи представляется важным анализ корреляций максимального поперечного импульса частиц  $P_T^{\max}$  с величиной сферисити  $S$ .

На рис. 1 приведена зависимость сферисити  $S$  от  $P_T^{\max}$  в антипротон-протонных взаимодействиях с множественностью  $n \geq 8$  при 22,4 ГэВ/с, а также распределения переменной  $S$  и  $P_T^{\max}$ . Представленные на рис. 1 данные относятся соответственно к антипротон-протонной аннигиляции (рис. 1а), неупругим антипротон-протонным взаимодействиям с учетом всех заряженных частиц при определении  $S$  и  $P_T^{\max}$  (рис. 1б), а также неупругим антипротон-протонным взаимодействиям, в которых при определении  $S$  и  $P_T^{\max}$  учитывались данные только о заряженных мезонах (рис. 1с), т.е. исключались данные о протоне и антипротоне. В неупругих антипротон – протонных взаимодействиях в значительной части событий максимальный поперечный импульс имеют протоны и антипротоны (рис. 1б), при исключении данных о протоне и антипротоне наблюдается более широкое распределение  $S$  (рис. 1с).

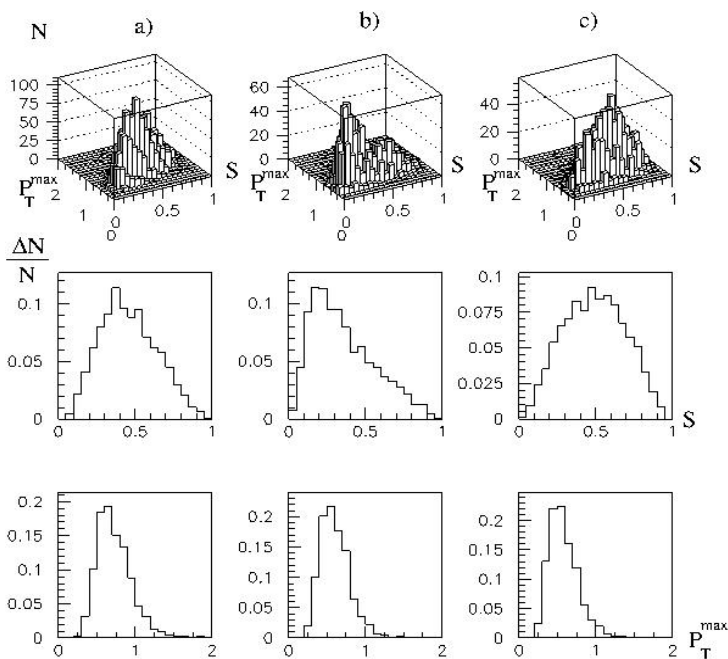


Рис. 1. Зависимость сферисити от максимального поперечного импульса частиц в событии и распределения  $S$  и  $P_{\perp}^{\max}$  для множественности  $n \geq 8$  в антипротон-протонных взаимодействиях при 22,4 ГэВ/с.

Зависимость сферисити от максимального импульса частиц в событии из антипротон-протонных взаимодействий для всех множественностей приведены на рис. 2a,b,c соответственно к антипротон-протонной аннигиляции, неупругим антипротон-протонным взаимодействиям с учетом всех заряженных частиц, а также неупругим антипротон-протонным взаимодействиям, в которых при определении  $S$  и  $P_{\perp}^{\max}$  учитывались данные только о заряженных мезонах.

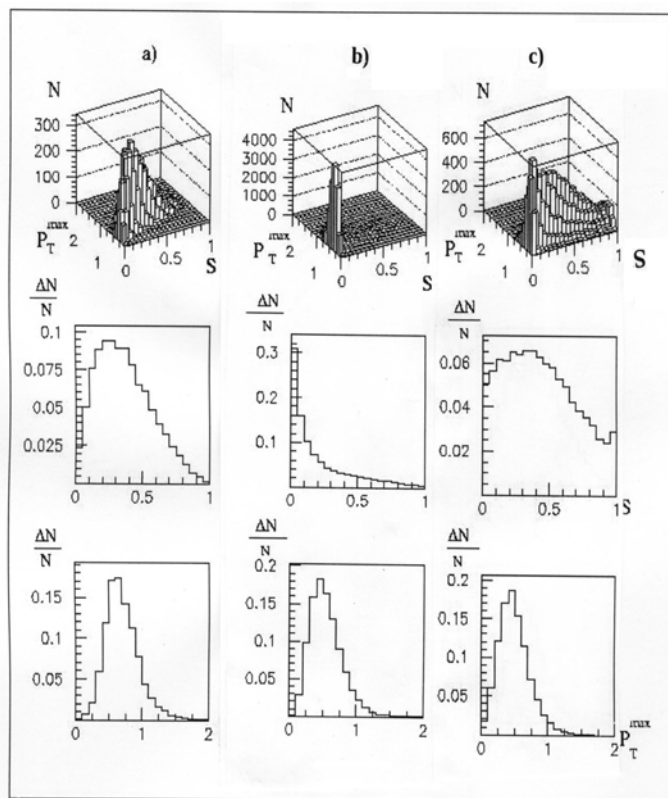


Рис. 2. Графики по суммарным данным для всех множественностей, аналогичные показанным на рис. 1

Значения  $N$ ,  $\langle S \rangle$  и  $\langle P_T^{\max} \rangle$

Реакция	Множественность	$N$	$\langle S \rangle$	$\langle P_T^{\max} \rangle$
$\bar{p}p \rightarrow ANN$	Все	12275	$0,365 \pm 0,010$	$0,704 \pm 0,019$
	$\geq 8$	3736	$0,459 \pm 0,022$	$0,731 \pm 0,036$
$\bar{p}p \rightarrow NAN$ заряжен. частицы	Все	50563	$0,211 \pm 0,003$	$0,552 \pm 0,007$
	$\geq 8$	2265	$0,359 \pm 0,022$	$0,612 \pm 0,039$
$\bar{p}p \rightarrow NAN$ заряжен. мезоны	Все	35409	$0,433 \pm 0,007$	$0,498 \pm 0,008$
	$\geq 8$	2265	$0,494 \pm 0,031$	$0,586 \pm 0,037$

В таблице приведены количество событий  $N$ , средние значения  $\langle S \rangle$  и  $\langle P_T^{\max} \rangle$  для группы событий, приведенных на рис. 1 и 2.

Сравнение сферисити событий с большой множественностью  $n \geq 8$  со сферисити событий со всеми множественностями указывает на то, что с ростом множественности события становятся более сферичными. Сферичность событий, вычисленная по заряженным мезонам для всех неаннигиляционных антипротон-протонных взаимодействий, выше, чем в антипротон-протонной аннигиляции, тогда как для событий с множественностью выше восьми сферичности совпадают в пределах трехкратной статистической ошибки.

Отметим, что в событиях антипротон-протонной аннигиляции наблюдаются более высокие значения максимального поперечного импульса  $P_T^{\max}$  по сравнению с неаннигиляционными антипротон-протонными взаимодействиями.

Этот новый экспериментальный факт нуждается в развитии новых теоретических подходов, поскольку указывает на отличие группы событий (а) от событий категории (с), где носителем максимального поперечного импульса являются именно заряженные  $\pi$ -мезоны.

Из сопоставления двумерных графиков на рис. 1b и 2b можно заключить, что вторичные протоны (антипротоны) существенно влияют на величину сферисити: в событиях с большой множественностью (рис. 1b) величина сферисити  $S$  определяется большим количеством пионов вылетающих изотропно в системе центра масс, в то время как в событиях с меньшим числом заряженных пионов (рис. 2b) влияние коллимированного разлета антипротонов (протонов) сильнее сказывается, что приводит к снижению сферичности. Это следует и из сравнения соответствующих средних значений сферисити  $\langle S \rangle$ , приведенных в таблице.

Полученные результаты приобретают важное значение при сопоставлении теоретических моделей описания неупругих взаимодействий антипротонов с нуклонами.

*Работа выполнена в рамках темы: «Изучение событий с предельно большой множественностью при ускорительных энергиях и в космических лучах» благодаря гранту МОН РК по приоритету: «Фундаментальные исследования в области естественных наук».*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин В. Г. и др. // Ядерная физика. – 1983. – Т. 37. Стр. 915.
- 2.. Боос Э.Г., Темирәлиев Т. и др. // Известия МОН-НАН РК. Сер. физ.-мат.. – 2000. – № 2. – Стр. 35.

*Э. Г. Боос, Т. Темирәлиев, М. Избасаров, В. В. Самойлов*

#### ИМПУЛЬСІ 22,4 ГЭВ/С АНТИПРОТОН-ПРОТОНДЫҚ ӘРЕКЕТТЕСТІКТЕРДЕ КӨПТІГІ АСА ЖОҒАРЫ ОҚИҒАЛАРДА ЗАРЯДТАЛҒАН БӨЛШЕКТЕРДІҢ БҰРЫШТЫҚ ҮЛЕСТІРІЛУІН ЗЕРТТЕУ

Антипротонның протонмен әрекеттестіктерінде зарядталған бөлшектер үшін оқиғалардың сфералығы зерттелді және көптігі ұлғайған сайын оқиғаның сфералығының арта түсетіні көрсетілді. Антипротон-протондық аннигиляция оқиғаларында бөлшектердің көлденең импульсі жоғары болатыны байқалды.

*E. G. Boos, T. Temiraliev, M. Izbasarov, V. V. Samoilov*

#### RESEARCH OF ANGULAR DISTRIBUTIONS OF THE CHARGED PARTICLES IN EVENTS WITH LARGE MULTIPLICITY IN ANTI-PROTON-PROTON INTERACTIONS AT THE MOMENTUM 22,4 GeV/c

Sphericity of events for the charged particles in antiproton-proton interactions was studied and it was shown that events become more spheric at multiplicity growth. In events of antiproton- proton annihilation particles with large transverse momentum are observed.



Е. А. ДАЙНЕКО<sup>1,2</sup>, Е. В. ЧАЙКО<sup>1</sup>, М. Т. ИПАЛАКОВА<sup>1</sup>,  
В. Г. ДМИТРИЕВ<sup>1</sup>, М. М. МАРАТОВ<sup>1</sup>

## РОЛЬ ВИРТУАЛЬНЫХ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ В ПРЕПОДАВАНИИ ЕСТЕСТВЕННО-НАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН

<sup>1</sup>Международный университет информационных технологий, г. Алматы,

<sup>2</sup>Институт прикладных наук и информационных технологий, г. Алматы

*В статье рассматривается применение информационных компьютерных систем в образовательный процесс. Обсуждаются преимущества и недостатки виртуальных лабораторных работ для преподавания естественно-научных дисциплин. Показано, что внедрение современных мультимедийных ресурсов и компьютерных технологий наряду с традиционными формами обучения, позволит повысить подготовку выпускников высших учебных заведений.*

**Ключевые слова:** виртуальная лабораторная работа, инновационные методы образования, информационные технологии, физика.

**Введение.** В настоящее время в таких сферах деятельности как образование, наука, техника и технологии большой интерес представляют собой компьютерные информационные системы. Причем, непрерывное развитие науки, техники и технологии приводит к появлению новых информационных систем, а также к развитию и совершенствованию уже существующих. Что касается образования, то внедрение новых технологий, а также комплексная модернизация являются основными вопросами, которым уделяется особое внимание не только в Казахстане, но и во всем мире [1]. Авторы [2] считают, что основным направлением модернизации образования является применение новых информационных технологий, компьютеризация учебных заведений и инновационная деятельность профессорско-преподавательского состава высших учебных заведений.

Однако следует учитывать, что внедрение информационных технологий в образовательный процесс будет оправдано, если они эффективно дополняют существующие технологии обучения или имеют дополнительные преимущества по сравнению с традиционными формами обучения. Например, использование виртуальных лабораторных работ в преподавании естественно-научных дисциплин позволяет сделать лабораторные работы по физике, химии и биологии более живыми и интересными, повышая при этом качество высшего образования.

**Виртуальные лабораторные работы – преимущества и недостатки.** Виртуальная лабораторная работа представляет собой программно-аппаратный комплекс, позволяющий проводить опыты без непосредственного контакта с реальной установкой или при полном ее отсутствии [3].

При этом следует различать такие понятия как «виртуальная лаборатория» и «виртуальная удаленная лаборатория». Основой виртуальной лаборатории является компьютерная программа или связанный комплекс программ, осуществляющих компьютерное моделирование некоторых процессов [4]. Виртуальная удаленная лаборатория представляет собой сетевую организационную структуру нескольких групп ученых, которые принадлежат к различным научным центрам и связаны между собою отношениями взаимовыгодного сотрудничества, благодаря сети Интернет [5].

По сравнению с традиционными лабораторными работами виртуальные лабораторные работы имеют ряд преимуществ. Во-первых, нет необходимости покупать дорогостоящее оборудование и опасные радиоактивные материалы. Например, для лабораторных работ по квантовой или атомной или ядерной физике требуются специально оборудованные лаборатории. Виртуальные же лабораторные работы позволяют изучать такие явления как фотоэффект, опыт Резерфорда по рассеянию альфа-частиц, определение периода кристаллической решетки методом дифракции электронов, эффекты Зеемана и Штарка, ядерные реакторы и др.

Во-вторых, появляется возможность моделирования процессов, протекание которых недоступно в лабораторных условиях. В частности, большинство классических лабораторных работ по молекулярной физике и термодинамике представляют собой закрытые системы, на выходе которых измеряется некоторый набор электрических величин, из которых затем с помощью уравнений

электродинамики и термодинамики рассчитываются искомые величины. Все молекулярно-кинетические и термодинамические процессы, происходящие в опыте, при этом остаются недоступными для наблюдения. В ходе выполнения виртуальных лабораторных работ по этим разделам физики или химии студенты могут с помощью анимированных моделей наблюдать динамические иллюстрации изучаемых физических и химических явлений и процессов, недоступных для наблюдения в реальном эксперименте, при этом одновременно с ходом эксперимента наблюдать графическое построение соответствующих зависимостей физических и химических величин.

В-третьих, виртуальные лабораторные работы обладают более наглядной визуализацией физических или химических процессов по сравнению с традиционными лабораторными работами. Например, появляется возможность более подробно и наглядно изучать такие физические процессы, как движение заряженных частиц, создающих электрический ток или принцип работы  $p$ - $n$ -перехода. Также можно проникнуть в процессы, происходящие за доли секунды или длящихся в течение нескольких лет, например, изучение движения планет в поле тяготения центрального тела.

Еще одно преимущество виртуальных лабораторных работ по сравнению с традиционными заключается в безопасности. В частности, использование виртуальных лабораторных работ в случаях, где идет работа с высоким напряжением или опасными химическими реактивами.

Однако виртуальные лабораторные работы обладают и недостатками. Основным из них является отсутствие непосредственно контакта с объектом исследования, приборами, оборудованием. Совершенно невозможно подготовить специалиста, который видел технический объект только на экране компьютера. Или вероятно ли найдутся желающие пойти к хирургу, который ранее практиковался только на компьютере. Поэтому самым разумным решением является сочетание внедрения традиционных и виртуальных лабораторных работ в образовательном процессе с учетом их достоинств и недостатков.

**Применение виртуальных лабораторных работ в изучении физики.** Глубокое усвоение физики возможно путем изучения теории и в процессе ее применения для решения различных расчетных, качественных и экспериментальных задач. Если на лекционных занятиях студент знакомится с теоретическими вопросами, то на лабораторных занятиях применяются и теория, и, кроме того, формируются практические умения и навыки в проведении физических измерений, в обработке и представлении результатов.

Качественное выполнение и успешная защита результатов лабораторных работ студентами невозможны без самостоятельной предварительной подготовки к лабораторным занятиям. В процессе подготовки к очередному занятию, прежде всего, необходимо изучить по данному руководству описание выполняемой работы. Однако, ограничиться только этим нельзя, так как теоретическое введение к каждой работе не может рассматриваться как достаточный минимум для глубокого понимания физических основ работы. Поэтому необходимо к каждой работе читать материал, соответствующий теме работы, по учебнику. Нельзя приступать к работе без усвоения ее основных теоретических положений, не осознав логики процедуры измерений, не умея пользоваться измерительными приборами, относящимися к данной работе. Приступая к работе, студент должен твердо представлять цель данной работы, общий план работы, т.е. последовательность действий при проведении измерений. Это является главным основанием для преступления к работе при собеседовании с преподавателем в начале занятия.

Для обеспечения качественного и мобильного образования в Международном университете информационных технологий разработан и внедрен проект по инновационной подготовке студентов – виртуальная компьютерная лаборатория по физике (рис. 1), которая включает в себя четыре основные лабораторные работы из разделов «Механика», «Молекулярная физика», «Электричество и магнетизм».

Виртуальная компьютерная лаборатория содержит инструкции и методические указания к выполнению работ, построенных единообразно по следующей форме: цель работы, теоретический материал, экспериментальная установка, порядок выполнения работы, отчет. Кроме того, в каждой лабораторной работе содержится тест, который включает в себя оценку базовых знаний, необходимых для успешного выполнения работы, и итоговый тест, который направлен на контроль остаточных знаний по результатам выполнения лабораторной работы.

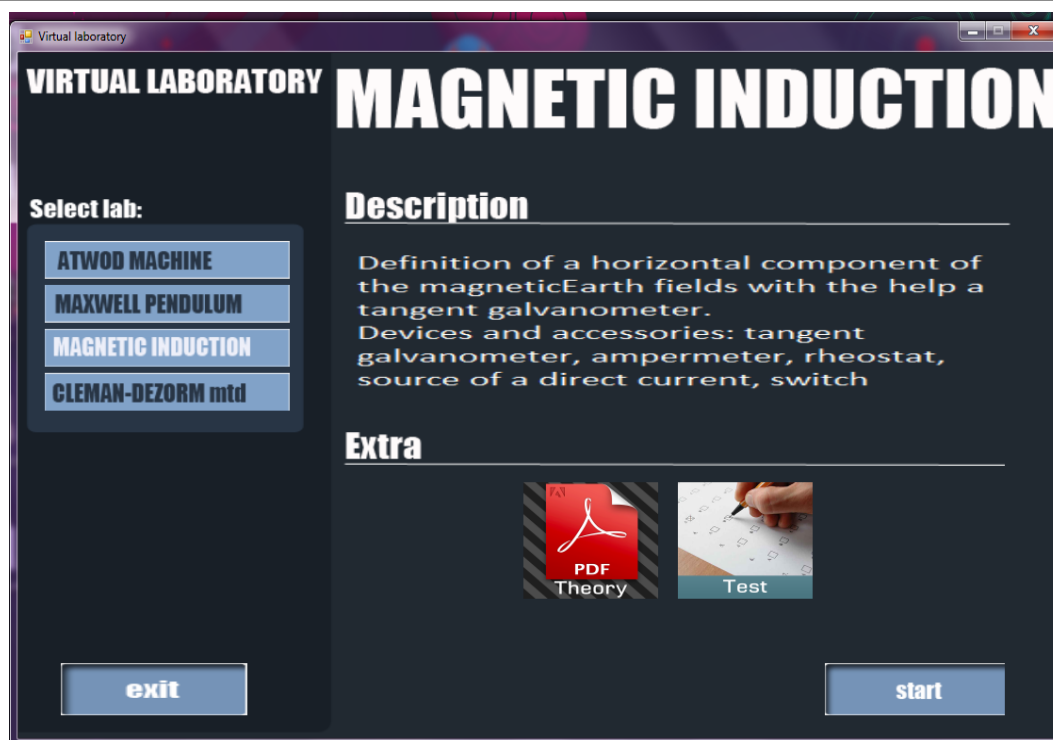


Рис. 1. Фрагмент виртуальной компьютерной лаборатории по дисциплине «Физика-1»

Теоретический материал в данной виртуальной лабораторной работе сопровождается в виде электронного учебника, т.е. материал представлен в форме гипертекста, который содержит наглядные динамические и графические объекты, а также ссылки и подсказки, анимационные средства, справочные данные, которые позволяют расширить возможности студента при ответах на поставленные вопросы.

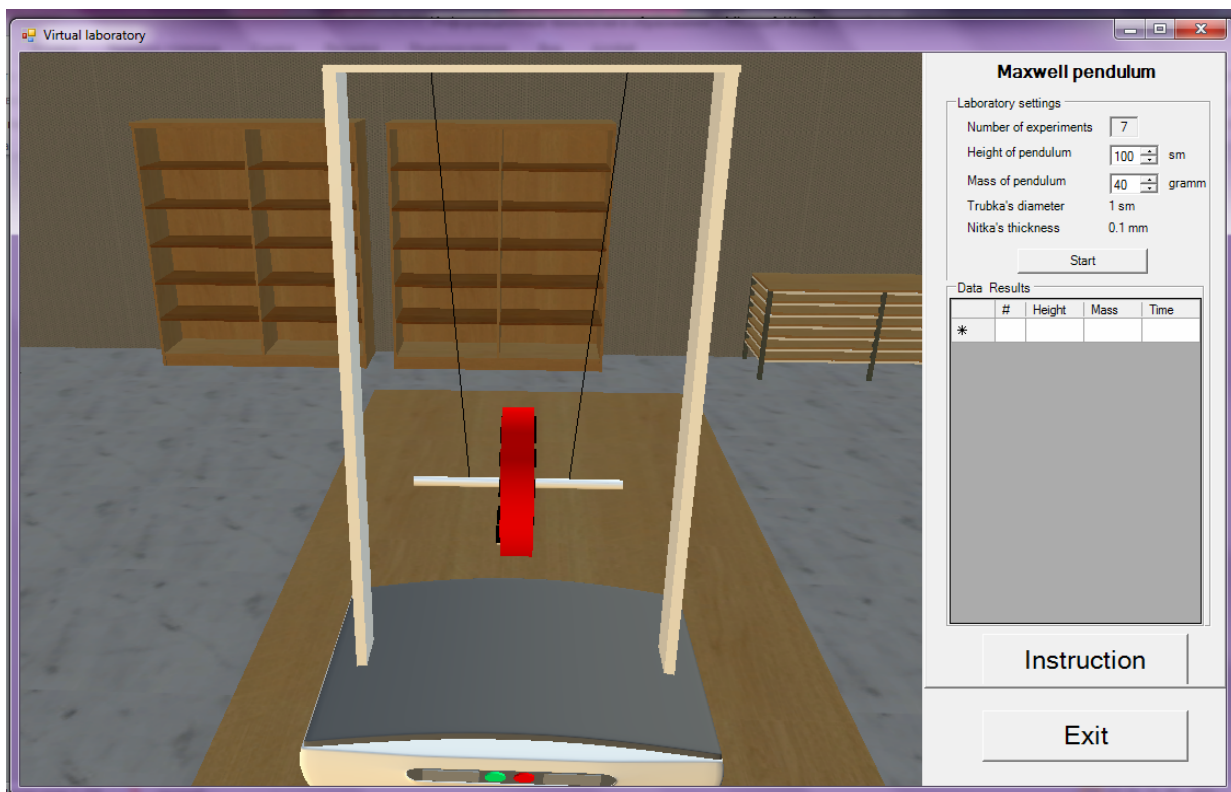
В состав виртуальной лабораторной работы входят структурированные описания технических объектов, внутри которых размещаются графические иллюстрации (фотографии, схемы, рисунки) и гиперссылки, под которыми «спрятаны» дополнительные графические иллюстрации аналогичного типа, а также видео- и аудиофрагменты, анимации. Для повышения эффективности восприятия учебного материала использовались также специальные технологические приемы, например flash-анимаций (рис. 2, а и б), позволяющих видеть экспериментальную установку в целом и иметь возможность рассматривать его мелкие детали. В конце описания каждой лабораторной работы даются вопросы для самоконтроля и тренинга по пройденному материалу с краткими комментариями, «спрятанными» под гиперссылками, что позволяет активизировать процесс усвоения учебного материала, делая его интерактивным, и помогает при подготовке к рубежным контролям и экзаменам.

Результаты измерений студенты оформляют в виде краткого отчета. В виртуальной лабораторной работе имеются примерные формы отчетов. В них показано, какие именно таблицы, графики, расчеты обязательны в отчетах. Отчеты должны содержать выводы, сделанные на основании полученных результатов. Если есть необходимость, студент имеет право корректировать форму отчета, добиваясь максимальной наглядности представления результатов. При обработке результатов измерений следует уделять большое внимание расчету погрешностей измерений и критическому анализу полученных результатов, который должен быть представлен в выводах.

Наличие отчетов и их защита являются основанием для зачета каждой лабораторной работы по предмету «Физика-1».



а)



б)

Рис. 2. Пример flash-анимаций для понимания принципа работы маятника Максвелла

**Заключение.** Таким образом, в ходе внедрения современных мультимедийных средств в образовательный процесс наряду с освоением будущими специалистами новых технологий, необходимо с помощью средств информационных и телекоммуникационных технологий усилить подготовку специалистов естественно-научных специальностей, опирающихся на знание и понимание фундаментальных физических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черемисина Е.Н., Антипов О.Е., Белов М.А. Роль виртуальной компьютерной лаборатории на основе технологии облачных вычислений в современном компьютерном образовании // Дистанционное и виртуальное обучение. – 2012. – № 1. – С. 50-64.
2. Rittinghouse J., Ransome J. Cloud Computing: Implementation, Management, and Security. – CRC Press, 2010.
3. Кудинов Д.Н. Перспективы разработки виртуальных работ на базе комплекса программ T-FLEX // Современные проблемы науки и образования. – 2009. – № 6. – С. 71-74.
4. Трухин А.В. Виды виртуальных компьютерных лабораторий // Открытое и дистанционное образование. – 2003. – № 3(11). – С. 12-21.
5. Проект «Виртуальная лаборатория по фундаментальным и прикладным проблемам теории упругости» // Международный научно-технический центр.

*Е. А. Дайнеко, Е. В. Чайко, М. Т. Ипалакова, В. Г. Дмитриев, М. М. Маратов*

ЖАРАТЫЛЫСТАНУ-ҒЫЛЫМИ ПӘНДЕРДІ ОҚЫТУДАҒЫ АУАНИ (ВИРТУАЛЬНҒЫ)  
ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТАРДЫҢ РӨЛІ

Мақалада білім беру үдерістерінде ақпараттық компьютерлік жүйені қолдану қарастырылған. Жаратылыстану-ғылыми пәндерді оқыту үшін ауани зертханалық жұмыстардың басымдықтары мен кемшіліктері талқыланған. Қазіргі заманғы мультимедиялық ресурстар мен компьютерлік технологияларды дәстүрлі оқыту түрлерімен қатар қолдану жоғары оқу орны түлектерінің дайындығын жоғарылатуға мүмкіндік беретіні көрсетілген.

**Негіз сөздер:** ауани зертханалық жұмыс, білім берудің инновациялық әдістері, ақпараттық технологиялар, физика.

*Y.A Daineko, Y.V. Chaiko, M.T. Ipalakova, V.G. Dmitriyev, M.M. Maratov*

THE ROLE OF VIRTUAL LABORATORY SESSIONS  
IN TEACHING NATURAL AND SCIENCE DISCIPLINES

The article considers the using of information computer systems within the framework of educational process. The benefits and drawbacks of the virtual laboratory sessions for the teaching of the natural and science disciplines are discussed. The article shows that the introduction of the modern multimedia resources along with the traditional learning forms allows improving the teaching quality of the students of the higher education institutions.

**Key terms:** virtual laboratory session, innovative education methods, information technologies, physics.

Л. А. ХАДЖИЕВА, Р. А. АЯПБЕРГЕНОВ

## РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БУРОВЫХ ШТАНГ НЕГЛУБИННОГО БУРЕНИЯ ПРИ ИХ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

*Исследуются резонансные колебания буровой штанги неглубинного бурения по основной частоте. Допускается конечность упругих деформаций штанги. Рассмотрена модель плоского изгиба буровой штанги. Проведен численный анализ влияния форм колебаний штанги и ее параметров на амплитудно-частотные характеристики.*

Из практики бурения скважин известно, что технико-экономические показатели буровых работ зависят от множества факторов: характеристик буровых машин и инструментов, режимов их работы, крепости породы, организации труда и т.д. На режимы работы буровых машин оказывают существенное влияние устойчивость движения и прочность буровых штанг. Другим влияющим фактором может быть уход буровой штанги от первоначального состояния за счет начальных несовершенств самой штанги, ее начальной кривизны, больших деформации в результате внешнего динамического воздействия и др. Поэтому изучение колебаний буровых штанг и их устойчивости в целях оптимальных, безаварийных режимов работы представляет научный и практический интерес.

Целью работы является моделирование основного резонанса буровой штанги при допущении конечности упругих перемещений. Последнее вызвано увеличением длины штанги в процессе бурения скважины, что ведет к ее гибкости, и соответственно, возможности появления конечных перемещений под действием больших переменных инерционных сил и моментов, осевых нагрузок и др. факторов, с которыми нельзя не считаться. Большинство же известных динамических моделей буровых штанг линейны и основаны на допущении малости их упругих деформаций. В связи с чем, возникает необходимость совершенствования динамических моделей буровых штанг для определения ее оптимальных безаварийных режимов работы.

В работе исследуется нелинейная модель движения буровых штанг неглубинного бурения (до 500 м). Буровая штанга состоит из отдельных секций, соединенных при помощи конической резьбы. Нижняя секция штанги несет буровой снаряд, коронка которого находится в контакте с горной породой. Под действием продольной силы  $N$  и крутящего момента  $M$  буровая штанга совершает колебания, которые могут сопровождаться потерей устойчивости. Среди колебательных процессов можно выделить крутильные, продольные, поперечные вынужденные и параметрические колебания. Наибольшую опасность с точки зрения прочности и надежности режима работы механической системы представляют ее параметрические колебания.

Здесь рассматривается плоский изгиб буровой штанги. Полагая упругие деформации конечными, в рамках теории конечных деформаций В. В. Новожилова [1] исследуется геометрически нелинейная модель упругих колебаний буровой штанги:

$$EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \left( 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x, t) \frac{\partial V}{\partial x} \right] + K_1 V = -\rho F \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $K_1 = \rho F \omega^2$ ;  $\omega$  – скоростью вращения буровой штанги;  $\rho$  – удельная масса материала;  $F$  – площадь поперечного сечения;  $EJ$  – жесткость штанги относительно осей  $y$ ;  $V$  – перемещение точек упругой линии штанги в плоскости  $XOY$ .

Граничные условия модели (1) определяются условиями закрепления буровой штанги на концах. Здесь принимаются условия шарнирного опирания на концах штанги, так как в силу податливости грунтов в зоне их контакта со штангой реализуется упругое защемление, близкое к шарнирному опиранию. Верхний конец штанги соединен с механизмом ее подачи. Полагая его также шарнирно закрепленным, задаем краевые условия – равенство нулю перемещений и моментов на концах, т.е.:

$$V = EJ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (2)$$

$$V = EJ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = L.$$

Для исследования резонансных колебаний буровой штанги по основной частоте ее динамическая модель (1)–(2) используется прямой метод Бубнова-Галеркина, согласно которого решение определяется как

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^n f_k(t) V_k(x) \quad (3)$$

Краевым условиям (2) удовлетворяет решение:

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^n f_k(t) \sin \frac{kx\pi}{L} \quad (4)$$

Согласно (4), модель (1)–(2) приводится к виду:

$$\ddot{f} + C_k^2 f + \beta f^3 = F \cos \Omega t. \quad (5)$$

В случае введения безразмерного параметра времени  $\tau = t\omega_0$ , где  $\omega_0$  – частота собственных колебаний системы, коэффициенты уравнения (5) имеют вид:

$$C_k = \frac{k^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{m} \left(1 - \frac{N_0}{N_k}\right)}, \quad N_k = \frac{k^2 \pi^2 EJ}{L^2}, \quad \beta = \frac{3Ek^4 \pi^4}{8\rho L^4},$$

$$m = \frac{\rho \pi (D^2 - d^2)}{4}, \quad F = \frac{4F_0}{k\pi m}, \quad J = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right),$$

$D$  – наружный,  $d$  – внутренний диаметры буровой штанги.

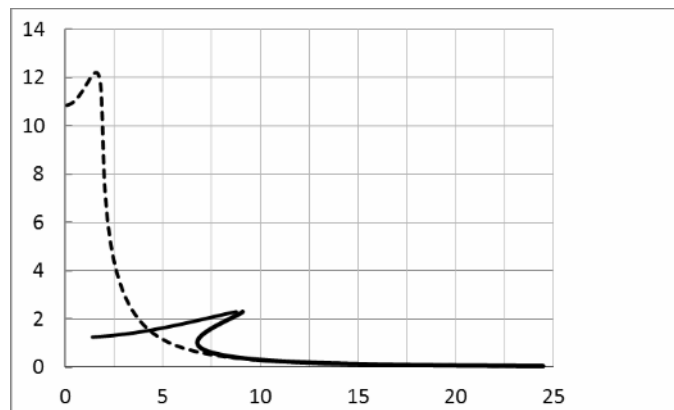
Методом гармонического баланса [2] моделируется резонанс по основной частоте. При этом решение (5) задается как

$$f(\tau) = r_1 \cos \bar{\Omega} \tau. \quad (6)$$

$r_1$  – амплитуда резонансных колебаний по основной частоте  $\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}$ .

Получены АЧХ гармонических колебаний и проведен их численный анализ с целью выявления влияния параметров буровой штанги на резонансные частоты.

Установлено, что увеличение длины стальной буровой штанги оказывает существенное влияние на АЧХ колебаний системы (рис. 1). На графике по горизонтали откладываются безразмерные частоты колебаний  $\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0}$ , а по вертикали амплитуда резонансных колебаний  $r_1$ .

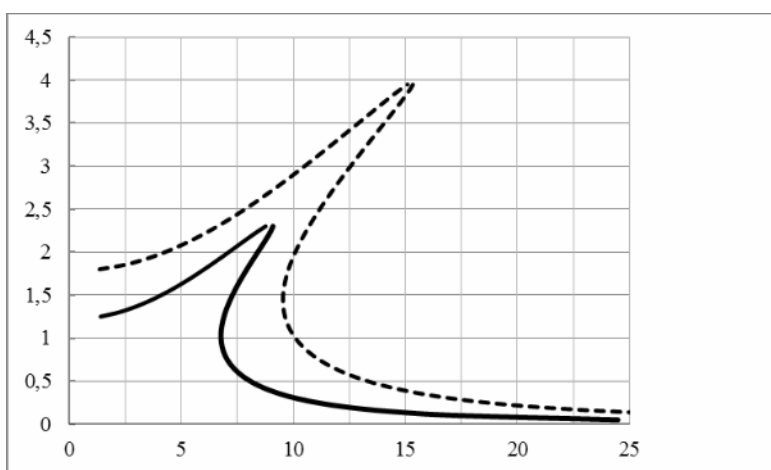


**Рис. 1.** АЧХ основного резонанса буровой штанги при  $\kappa=1$ ;  $E_c = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\rho_c = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $l = 500$  м;  $d = 0,12$  м;  $D = 0,2$  м;  $F_0 = 100$ ;  $N_0 = 2200$  Па; \_\_\_\_\_  $L = 100$  м; \_\_\_\_\_  $L = 500$  м

В случае меньшей длины (100 м) влияние геометрической нелинейности проявляется в виде «затягивания кривой» АЧХ в область больших частот, то есть резонанс следует ожидать на больших частотах. В случае удлинения штанги (500м) виден существенный скачок амплитуды уже в области основного резонанса, характерного для линейного случая, то есть вблизи единицы. Это говорит о том, что в случае большой длины штанги результаты исследований нелинейной модели близки к результатам линейных моделей [2].

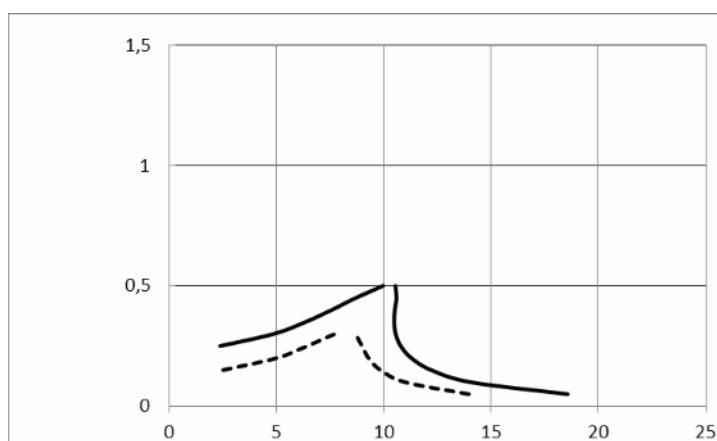
Исследовано влияние постоянной осевой силы  $N_0$  на АЧХ колебаний. Установлено ее незначительное влияние на величины АЧХ.

В практике бурения используется дюралюминий. Исследования показали, что АЧХ дюралюминиевой буровой штанги (штриховая линия, рис. 2) имеет большие величины, чем для стальной штанги (сплошная линия, рис. 2). При этом их АЧХ носят ярко выраженный нелинейный характер.



**Рис. 2.** Влияние свойств материала буровой штанги на АЧХ основного резонанса буровой штанги при  $\kappa = 1$ ;  $L = 100$  м;  $d = 0,12$  м;  $D = 0,2$  м;  $F_0 = 100$ ;  $N_0 = 2200$  Па; \_\_\_\_\_  $E_c = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\rho_c = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; \_ \_ \_  $E_d = 0,7 \cdot 10^5$  МПа;  $\rho_d = 2698,9$  кг/м<sup>3</sup>.

В работе рассмотрено влияние форм изгиба штанги на ее АЧХ (рис. 3). Установлено, что при основной форме изгиба (рис. 1, 2) амплитуда колебаний буровой штанги превышает амплитуды колебаний штанги с большими формами изгиба (рис. 3,  $\kappa = 2$ ).



**Рис. 3.** АЧХ основного резонанса буровой штанги при второй форме изгиба штанги  $\kappa = 2$ ;  $E_c = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\rho_c = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $l = 500$  м;  $d = 0,12$  м;  $D = 0,2$  м;  $N_0 = 2200$  Па;  $L = 100$  м; \_\_\_\_\_  $F_0 = 100$ ; \_ \_ \_ \_  $F_0 = 50$

Анализ результатов численного моделирования основного резонанса показал, что постоянное осевое усилие и формы изгиба, отличные от первой, не оказывают существенного влияния на АЧХ колебательного процесса.



ЛИТЕРАТУРА

1. Новожиллов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. –211 с.
2. Вибрации в технике. Справочник: в 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 352 с.

*Л. А. Хаджиева, Р. А. Аяпберген*

ЖАЗЫҚТЫҚ ИЛУ КЕЗІНДЕГІ ТАЯЗ БҰРҒЫЛАУДА  
БҰРҒЫЛАУ ШТАНГІНІҢ РЕЗОНАНСТЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕРІ

Бұрғылау штангінің негізгі жиілігі бойынша резонанстық тербелістері зерттелінеді. Штангінің серпімді деформациясының ақырлығы ескеріледі. Бұрғылау штангінің жазықтық иілу моделі қарастырылған. Штангінің тербелістер формалары мен оның параметрлерінің амплитудалық-жиілік сипаттамаларына әсер етуінің сандық талдауы жүргізілген.

*L. A. Hadzhiyeva, R. A. Ayapbergenov*

RESONANT VIBRATIONS OF CHISEL BARS  
OF NOT DEEP DRILLING AT THEIR PLANE BENDING

Resonant vibrations of a chisel bar of not deep drilling on the basic frequency are investigated. Finiteness of elastic deformations of a bar is supposed. The model of a plane bending of a chisel bar is considered. The numerical analysis of influence of forms of vibrations of a bar and its parametres on peak-frequency characteristics is carried out.

МАЗМҰНЫ

**Плазма, газ және сұйықтар физикасы**

<i>Асқарова А.С., Бөлегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекмұхамет А., Бекетаева М.Т., Оспанова Ш.С.</i> Сандық зерттеу үдерістерінің дисперсиясы және сұйық отынның жануы.....	3
<i>Асқарова А.С., Березовская И.Э., Бөлегенова С.А., Максимов В.Ю.</i> Нақты геометрия аймағында жану кезіндегі жылу массатасымалдану үдерістерін зерттеу.....	8
<i>Ерімбетова Л.Т., Дәулетов А.Е., Мұхаметкәрімов Е.С., Құдышев Ж.А.</i> Өткізгіш тозаң бөлшектері бар плазманың таралу функциялары.....	12
<i>Мұқамеденқызы В., Федоренко О.В., Әсембаева М.К.</i> Массатөкізбейтін қабырғалары бар жазық вертикаль каналдағы молекулалық массатасымалдаудың шекарасын анықтау.....	19

**Атомдық ядро және элементарлық бөлшектер физикасы**

<i>Тоқтарбай С., Кеведо Э., Әбішев М.</i> Эйнштейн теңдеуінің ішкі шешімдері.....	22
<i>Жауғашева С.А., Айтқазин М.Б., Әубәкірова С.К.</i> Бете-Солпитер жуықтауында нуклон-нуклондық әсерлесуді зерттеу.....	28
<i>Дінейхан М., Жауғашева С.А., Сайдуллаева Г.Г., Хабыл Н.</i> X(3872) мезонның ыдырау енін ковариантты кварктік үлгі аясында анықтау.....	32
<i>Дінейхан М., Жауғашева С.А., Сайдуллаева Г.Г.</i> X(3872) мезонның радиациялық ыдырауы коварианттық кварктік үлгіде.....	39

**Математикалық физика**

<i>Әлімжанов А.М.</i> Шектен арғы деформацияланатын кен жынысы қатпарларында жүргізілген дөңгелек цилиндрлі қазба үшін жазық деформация қойылымындағы осесимметрлік емес есеп.....	47
<i>Алексеева Л.А.</i> Твисторлық костолқынды теңдеу және оның талдап қорытылған шешімі.....	56
<i>Боос Э.Г., Темірәлиев Т., Избасаров М., Самойлов В.В.</i> Импульсі 22,4 ГэВ/с антипротон-протондық әрекеттестіктерде көптігі аса жоғары оқиғаларда зарядталған бөлшектердің бұрыштық үлестірілуін зерттеу.....	62
<i>Дайнеко Е.А., Чайко Е.В., Ипалакова М.Т., Дмитриев В.Г., Маратов М.М.</i> Жаратылыстану-ғылыми пәндерді оқытудағы ауани (виртуальный) зертханалық жұмыстардың рөлі.....	65
<i>Хаджиева Л.А., Аяпбергенов Р.А.</i> Жазықтық иілу кезіндегі таяз бұрғылауда бұрғылау штангінің резонанстық тербелістері.....	70

## СОДЕРЖАНИЕ

**Физика плазмы, газов и жидкостей**

<i>Аскарлова А.С., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекмухамет А., Бекетаева М.Т., Оспанова Ш.С.</i>	
Численное исследование процессов дисперсии и горения жидких топлив.....	3
<i>Аскарлова А.С., Березовская И.Э., Болегенова С.А., Максимов В.Ю.</i> Исследование процессов теплопереноса при наличии горения в областях реальной геометрии.....	8
<i>Еримбетова Л.Т., Давлетов А.Е., Мухаметкаримов Е.С., Кудышев Ж.А.</i> Радиальные функции распределения проводящих макрочастиц в пылевой плазме.....	12
<i>Мукамеденкызы В., Федоренко О.В., Асембаева М.К.</i> Определение границы молекулярного массопереноса для плоского вертикального канала с массонепроницаемыми стенками.....	19

**Физика атомного ядра и элементарных частиц**

<i>Токтарбай С., Кеведо Э., Абишев М.</i> Внутреннее решение уравнений Эйнштейна.....	22
<i>Жаугашева С.А., Айтказин М.Б., Аубакирова С.К.</i> Исследование нуклон-нуклонных взаимодействий в подходе бете-солпитера.....	28
<i>Динейхан М., Жаугашева С.А., Сайдуллаева Г.Г., Хабыл Н.</i> Определение ширины распадов X(3872) мезона в рамках ковариантной модели кварков.....	32
<i>Динейхан М., Жаугашева С.А., Сайдуллаева Г.Г.</i> Радиационный распад X(3872) мезонов в рамках ковариантной модели кварков.....	39

**Математическая физика**

<i>Алимжанов А.М.</i> Плоская неосесимметричная задача для запредельно деформируемого массива горных пород с круговой цилиндрической выработкой.....	47
<i>Алексеева Л.А.</i> Твисторное биволновое уравнение и его обобщенные решения.....	56
<i>Боос Э.Г., Темиралиев Т., Избасаров М., Самойлов В.В.</i> Исследование угловых распределений заряженных частиц в событиях с большой множественностью в антипротон-протонных взаимодействиях при импульсе 22,4 ГэВ/с.....	62
<i>Дайнеко Е.А., Чайко Е.В., Ипалакова М.Т., Дмитриев В.Г., Маратов М.М.</i> Роль виртуальных лабораторных работ в преподавании естественно-научных дисциплин.....	65
<i>Хаджиева Л.А., Аялбергенов Р.А.</i> Резонансные колебания буровых штанг неглубинного бурения при их плоском изгибе.....	70

CONTENTS

**Physics of plasma, gases and liquids**

<i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Bekmukhamet A., Beketaeva M.T., Ospanova Sh.S.</i> Numerical study of dispersion and burning of liquid fuel.....	3
<i>Askarova A.S., Berezovskaya I.E., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu.</i> Investigation of heat and mass transfer in the presence of burning in the fields of real geometry.....	8
<i>Erimbetova L.T., Davletov A.E., Mukhametkarimov Ye.S., Kudyshev Zh.A.</i> Radial distribution function of conductive dust particles in plasmas.....	12
<i>Mukamedenkyzy V., Fedorenko O.V., Asembaeva M.K.</i> Determination of the molecular mass transfer boundary for the plane vertical channal with the mass resistible walls.....	19

**Nuclear physics and elementary particles physics**

<i>Toktarbay S., Kevedo E., Abishev M.</i> Internal solution of Einstein's equations.....	22
<i>Zhaugasheva S.A., Aitkazin M.B., Aubakirova S.K.</i> Research of nucleon-nucleon interactions in an approach of Bete-Solpiter.....	28
<i>Dineykan M., Zhaugasheva S.A., Saidullaeva G.G., Khabyl N.</i> Determinations of the decay widths of X (3872) meson in the covariant quark model.....	32
<i>Dineykan M., Zhaugasheva S.A., Saidullaeva G.G.</i> Radiative decay of X (3872) mesons in the covariant quark model....	39

**Mathematical physics**

<i>Alimzhanov A.M.</i> Plane non-axisymmetric problem for the over-limiting deformable rock massif with round cylindrical working.....	47
<i>Alexeyeva L.A.</i> The twistor biwave equation and its generalized solutions.....	56
<i>Boos E.G., Temiraliyev T., Izbasarov M., Samoilov V.V.</i> Research of angular distributions of the charged particles in events with large multiplicity in antiproton-proton interactions at the momentum 22,4 GeV/c.....	62
<i>Daineko Y.A., Chaiko Y.V., Ipalakova M.T., Dmitriyev V.G., Maratov M.M.</i> The role of virtual laboratory sessions in teaching natural and science disciplines.....	65
<i>Hadzhiyeva L.A., Ayapbergenov R.A.</i> Resonant vibrations of chisel bars of not deep drilling at their plane bending.....	70

Редактор *М. С. Ахметова, Ж. М. Нургожина*  
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 29.11.2012.  
Формат 60x88<sup>1/8</sup>. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
4,75 п.л. Тираж 300. Заказ 5.