

УДК 517.9

А. Ш. АКЫШ

(Институт математики и математического моделирования, МОН РК КН, г. Алматы, Республика Казахстан)

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА¹

Аннотация

В работе показана справедливость принципа максимума для уравнений Навье-Стокса (УНС). На основе чего в выбранном пространстве доказаны единственность слабых и существование сильных решений задачи для УНС в целом по времени $t \in [0, T]$, $\forall T < \infty$.

Ключевые слова: Системы нелинейных уравнений Навье-Стокса, принцип максимума для уравнений Навье-Стокса, единственность слабых решений уравнений Навье-Стокса, существование сильных решений уравнений Навье-Стокса.

Кілт сөздер: бейсызықты Навье-Стокс тендеулерінің жүйесі, Навье-Стокс тендеулері үшін максимум қағидасы, Навье-Стокс тендеулерінің әлсіз шешуінің жалқылығы, Навье-Стокс тендеулерінің әлді шешуінің болатындығы.

Keywords: nonlinear Navier-Stokes equations system, the principle of maximum for Navier-Stokes equations, uniqueness of weak generalized solutions of Navier-Stokes equations, existence of strong solutions of Navier-Stokes equations.

Введение. Основные нерешенные проблемы теории уравнений Навье-Стокса однородной жидкости приведены в [1–3] и др. В частности, в монографии О. А. Ладыженской ([1], стр. 13) приведены нерешенные проблемы математической теории уравнений Навье-Стокса. По-видимому, среди них главной является:

«Имеет ли место однозначная разрешимость "в целом" общей трехмерной начально-краевой задачи в каком-либо классе обобщенных решений без предположений малости об известных функциях и областях, заполненных жидкостью?»

В ряде работ автора [7–9] и др. приведены результаты поисковых исследований с целью обоснования принципа максимума для УНС. В итоге показана справедливость принципа максимума для УНС, что с математической точки зрения является ключевым.

Постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу для УНС [1] относительно вектора скорости $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3)$ и давления P в области $Q = (0, T] \times \Omega$:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{U} + (\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (1b)$$

$$\mathbf{U}(0, \mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}), \quad (1c)$$

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x})|_{\partial \Omega} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega, \quad (1d)$$

¹ Работа выполнена при поддержке Казахстанского фонда фундаментальных исследований, проект №0112РК00832.

где $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}_3$; Ω – выпуклая область, заполненная однородной жидкостью, а $\partial\Omega$ – граница области Ω , $t \in [0, T]$, $T < \infty$; $0 < \mu$ – динамический коэффициент вязкости; Δ , ∇ – операторы Лапласа и Гамильтона соответственно. Пусть $\mathbf{J}^0(\Omega)$ – пространство соленоидальных векторов, а $\mathbf{G}(\Omega)$ состоит из $\nabla\eta$, где η есть однозначная в Ω функция. Известно [4], ортогональное разложение, $\mathbf{L}_2(Q) = \mathbf{G}(Q) \oplus \mathbf{J}^0(Q)$, причем элементы $\mathbf{J}^0(Q)$ при $\forall t$ принадлежат $\mathbf{J}^0(\Omega)$; \mathbf{f} и Φ – вектор функции соответственно внешних сил и начальных данных удовлетворяющие следующим требованиям:

$$\text{i) } \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathbf{J}^0(Q); \quad \text{ii) } \Phi(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathbf{W}_{2,0}^1(\Omega) \cap \mathbf{J}^0(\Omega).$$

Принцип максимума. Векторное уравнение (1a) перепишем в виде системы скалярных уравнений:

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t} - \mu \Delta U_\alpha + (\mathbf{U}, \nabla U_\alpha) + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} = f_\alpha, \quad \alpha = \bar{1,3}, \quad (2)$$

где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение векторов.

Теорема 1. Пусть \bar{Q} замкнутая ограниченная область в \mathbb{R}_3 с границей $\partial\Omega$, и $Q = [0, T] \times \bar{\Omega}$ – цилиндрическая область в пространстве переменных t, \mathbf{x} . Предположим, что функции $\mathbf{U} \in \mathbf{C}(\bar{Q}) \cap \mathbf{C}^2(Q) \wedge P \in \mathbf{C}^1(Q)$ и удовлетворяют уравнениям (1a), (1b). Тогда, если при некотором α функция $f_\alpha(t, \mathbf{x}) \leq 0$ ($f_\alpha(t, \mathbf{x}) \geq 0$) в Q , то функция U_α принимает свой положительный максимум (отрицательный минимум) в цилиндре Q на нижнем основании $\{0\} \times \bar{\Omega}$ или на его боковой поверхности $[0, T] \times \partial\Omega$, т. е.

$$U_\alpha(t, \mathbf{x}) \leq \max \left\{ \sup_{t=0 \wedge \mathbf{x} \in \bar{\Omega}} U_\alpha(t, \mathbf{x}), \sup_{t \in [0, T] \wedge \mathbf{x} \in \partial\Omega} U_\alpha(t, \mathbf{x}) \right\}, \quad (t, \mathbf{x}) \in \bar{Q}, \quad (3a)$$

$$\left(U_\alpha(t, \mathbf{x}) \geq \min \left\{ \inf_{t=0 \wedge \mathbf{x} \in \bar{\Omega}} U_\alpha(t, \mathbf{x}), \inf_{t \in [0, T] \wedge \mathbf{x} \in \partial\Omega} U_\alpha(t, \mathbf{x}) \right\}, \quad (t, \mathbf{x}) \in \bar{Q} \right), \quad \alpha = \bar{1,3}. \quad (3b)$$

Для доказательства теоремы 1 нам нужны некоторые вспомогательные утверждения². Введем обозначение

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{U} - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

и применим операцию div к векторному уравнению (1a). Тогда, с учетом (1b), получаем задачу Неймана для уравнения Пуассона, связывающее давление P с вектором скорости \mathbf{U} :

$$-\Delta P = \text{div} \mathbf{I}, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, T], \quad \text{где } \mathbf{I} = (\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{U} \quad (4)$$

так как $\mathbf{Rn}|_{\partial\Omega} = 0$ и $\mathbf{In}|_{\partial\Omega} = 0$ соответственно в силу $\mathbf{R} \in \mathbf{J}^0(\Omega)$ и (1d), где \mathbf{n} есть единичный вектор внешней нормали в точке \mathbf{x} границы $\partial\Omega$.

По условию теоремы 1 функция $div \mathbf{I}$ непрерывна в ограниченной области Ω при $\forall t \in [0, T]$, тем самым

$$div \mathbf{I} \in L_p(\Omega), \quad p \geq 1 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5)$$

Кроме того $\int_{\Omega} div \mathbf{I} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{I} n dx = 0$, т.е. выполнено необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Неймана (4).

Решение задачи (4) представим в виде объемного потенциала

² Эти утверждения будут доказываться в допущениях теоремы 1.

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\operatorname{div} \mathbf{I}(\xi)}{r(\mathbf{x}, \xi)} d\xi, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (6)$$

Следуя [5], отметим одно общеизвестное свойство объемного потенциала (6).

Лемма 1. Если для плотности $\operatorname{div} \mathbf{I}$ имеет место (5), то функция $P(\mathbf{x})$, определяемая формулой (6), гармонична в каждой из областей, дополнительных к Ω .

Доказательство. Ясно, что внутри области Ω существует конечное или счетное множество областей $\Omega_j, j=1, 2, \dots$, дополнительных к Ω . Пусть Ω_j – одна из этих областей. Возьмем произвольную внутреннюю по отношению к Ω_j подобласть Ω_j^1 и пусть $\mathbf{x} \in \Omega_j^1$. Тогда в интеграле (6) расстояние r ограничено снизу положительным числом δ равным наименьшему расстоянию между точками границ областей Ω_j и Ω_j^1 . Откуда следует, на основании известной теоремы о свойствах интеграла типа потенциала, что $P(\mathbf{x}) \in C^\infty(\Omega_j^1)$; так как Ω_j^1 произвольная внутренняя подобласть Ω_j , то $P(\mathbf{x}) \in C^\infty(\Omega_j)$ и, в частности,

$$\Delta P(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{I}) \Delta_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} \right\} d\xi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_j, \quad (7)$$

т.е. функция P гармонична в области Ω_j . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для этого воспользуемся известным приемом [6, стр. 510]. Предположим от противного, т. е. функция $U_\alpha(t, \mathbf{x})$ достигает своего максимального значения в некоторой точке $M_0(t^0, \mathbf{x}^0)$ внутри области $\bar{Q} = [0, T] \times \bar{\Omega}$.

$$U_\alpha(M_0) > \max \left\{ \sup_{t=0 \wedge \mathbf{x} \in \bar{\Omega}} U_\alpha(t, \mathbf{x}), \sup_{t \in [0, T] \wedge \mathbf{x} \in \partial\Omega} U_\alpha(t, \mathbf{x}) \right\} = C \geq 0 \quad (8)$$

Обозначим $m = U_\alpha(M_0) - C > 0$ и введем функцию

$$H_\alpha(t, \mathbf{x}) = U_\alpha(t, \mathbf{x}) + \frac{m}{2} \left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Отсюда при всех (t, \mathbf{x}) из $\partial\Omega \times [0, T]$ или $\{0\} \times \bar{\Omega}$ имеем

$$H_\alpha(t^0, \mathbf{x}^0) \geq H_\alpha(t, \mathbf{x}) + \frac{m}{2}.$$

То есть функция $H_\alpha(t, \mathbf{x})$ также принимает свое максимальное значение в некоторой точке $M_1(t^1, \mathbf{x}^1) \in Q$, причем $H_\alpha(M_1) \geq H_\alpha(M_0) \geq m$. И пусть вместе с ним в момент времени t^1 функция $P(t, \mathbf{x})$ в какой-нибудь другой точке $\mathbf{x}^e \in \Omega$ достигает своего экстремального значения.

Теперь построим внутреннюю область Ω_e , дополнительной к Ω так, чтобы точки $M_1(t^1, \mathbf{x}^1) \in \Omega_e$ и $M(t^1, \mathbf{x}^e) \in \Omega_e$. Тогда, используя утверждения леммы 1, получим $\nabla P|_{\Omega_e} = 0$.

Теперь выпишем все необходимые условия максимума функции H_α в точке M_1 :

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial t} \geq 0; \quad \Delta H_\alpha \leq 0; \quad \nabla H_\alpha = 0; \quad \nabla P = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (2) с учетом условий (9) найдем для точки M_1 цепь неравенств

$$LH_\alpha \equiv \frac{\partial H_\alpha}{\partial t} - \mu \Delta H_\alpha + (\mathbf{H}, \nabla H_\alpha) + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha}(M_1) - f_\alpha + \frac{m}{2T} \geq \frac{m}{2T} > 0.$$

Это означает, что неравенство (8) неверно. Следовательно, справедливо (3а). Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1, следуя [6], нетрудно получить доказательство следующего утверждения:

Следствие. Если вектор-функций \mathbf{f}, Φ удовлетворяют условиям *i*) и *ii*), то для решений $U(t, \mathbf{x})$ задачи (1) справедлива оценка

$$\|\mathbf{U}\|_{C(Q)} \leq \|\Phi\|_{C(Q)} + T\|\mathbf{f}\|_{C(Q)} = A_1, \quad \forall T < \infty, \quad (10)$$

$$\text{где } \|\mathbf{U}\|_{C(\bar{Q})} = \max_{1 \leq \alpha \leq 3} \sup_{\bar{Q}} |U_\alpha(t, \mathbf{x})|.$$

Слабые обобщенные решения. Умножим уравнение (1а) на произвольную вектор-функцию $\mathbf{Z}(t, \mathbf{x}) \in C(\bar{Q}) \cap \mathbf{W}_2^1(Q) \cap \mathbf{J}^0(Q)$, равную нулю при $(t = T) \wedge (\mathbf{x} \in \partial\Omega)$. Произведение проинтегрируем по области Q и с помощью интегрирования по частям из первых двух и четвертого слагаемых производные перенесем с \mathbf{U} на \mathbf{Z} . В результате получим

$$\int_Q (-\mathbf{U} \mathbf{Z}_t + \mu \sum_{k=1}^3 \nabla U_k \nabla Z_k + (\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{U} \mathbf{Z}) \, d\mathbf{x} \, dt = \int_\Omega \Phi \mathbf{Z}(0, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_Q \mathbf{f} \mathbf{Z} \, d\mathbf{x} \, dt. \quad (11)$$

Снова уравнения (1а) умножим на градиент произвольной однозначной функции $\eta \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$. А затем проинтегрируем по области Q , используя из [4] ортогональности подпространств $\mathbf{G}(Q)$, $\mathbf{J}^0(Q)$ в итоге находим тождество

$$\int_Q \nabla P \nabla \eta \, d\mathbf{x} \, dt = - \int_Q (\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{U} \nabla \eta \, d\mathbf{x} \, dt. \quad (12)$$

Определение³ 1. Назовем слабым обобщенным решением начально-краевой задачи Навье–Стокса (1) вектор-функцию \mathbf{U} и функцию P из пространств

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &\in C(\bar{Q}) \cap L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \mathbf{W}_{2,0}^1(\Omega)) \cap \mathbf{J}^0(Q); \\ P &\in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)) \wedge \left(\int_\Omega P(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0, t \in [0, T] \right) \end{aligned} \quad (13)$$

и удовлетворяющие тождествам (11), (12) при любых

$$\mathbf{Z}(t, \mathbf{x}) \in C(\bar{Q}) \cap \mathbf{W}_2^1(Q) \cap \mathbf{J}^0(Q) \wedge (\mathbf{Z}|_{(t=T) \wedge (\mathbf{x} \in \partial\Omega)} = 0); \quad \eta(t, \mathbf{x}) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)).$$

Для справедливости этого определения все интегралы, входящие в (11),

(12) должны быть конечны для любых \mathbf{Z} , η из указанных классов.

Лемма 2 [7–9]. Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям **i)**, **ii)**, то для слабых обобщенных решений задачи (1) справедливы оценки:

$$\|\mathbf{U}\|_{L_\infty((0,T]; L_2(\Omega))}^2 \leq 2 \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}^2 + 4T^2 \|\mathbf{f}\|_{L_\infty((0,T]; L_2(\Omega))}^2 = A_1, \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^3 \int_0^t \|\nabla U_k(\tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 \, d\tau \leq \frac{1}{\mu} \|\Phi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{2T^2}{\mu} \|\mathbf{f}\|_{L_\infty(0,T; L_2(\Omega))}^2 = A_2, \quad (15)$$

$$\|\nabla P\|_{L_2(Q)}^2 \leq \|(\mathbf{U}, \nabla) \mathbf{U}\|_{L_2(Q)}^2 \leq 9A_1^2 A_2 \equiv A_3. \quad (16)$$

Из принципа максимума и полученных априорных оценок следует единственность решения задачи (1):

Теорема 2 [7–9]. Если входные данные \mathbf{f} и Φ удовлетворяют соответственно требованиям **i)**, **ii)**, тогда задача (1) имеет слабое единственное обобщенное решение \mathbf{U} и P удовлетворяющие тождествам (11), (12) при любых \mathbf{Z} и η из определения 1.

Сильные решения.

Определение 2. Если в области Q решение начально-краевой задачи Навье–Стокса (1) имеет всевозможные обобщенные производные того же порядка, что и сами уравнения, то это обобщенное решение называется сильным.

³ Здесь, благодаря принципу максимума, слабые решения рассматриваются в более узком классе функций, чем в [1].

Теорема 3[7–9]. Если входные данные задачи (1) удовлетворяют требованиям **i**), **ii**) и граница области $\partial\Omega \in C^2$, тогда у задачи (1) существует сильное единственное обобщенное решение \mathbf{U} и \mathbf{P} из пространств

$$\mathbf{U} \in \mathbf{W}_{2,0}^{2,1}(\Omega) \cap \mathbf{J}_{\infty}^0(\Omega); \mathbf{P} \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega)) \wedge \left(\int_{\Omega} \mathbf{P} dx = 0, \forall t \in [0, T] \right),$$

удовлетворяющие уравнениям (1a) и почти всюду в Ω и для них имеют место оценки:

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \mu \sum_{k=1}^3 \|\nabla \Phi_k\|_{L_2(\Omega)}^2 + 5A_3 + 2T \|f\|_{L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))}^2 \equiv A_5, \quad (17)$$

$$\|\Delta \mathbf{U}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq A_5 / \mu^2 \equiv A_6, \quad (18)$$

$$\|\nabla U_k\|_{L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))}^2 \leq A_5 / \mu \equiv A_7, \quad k = \overline{1, 3}; \quad (19)$$

$$\|\nabla \mathbf{P}\|_{L_{\infty}(0, T; L_2(\Omega))}^2 \leq 3A_1^2 A_7 \equiv A_{10}. \quad (20)$$

$$\|\mathbf{U}\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} \leq A_8 \|\Delta \mathbf{U}\|_{L_2(\Omega)}, \quad A_8 - const, \quad (21)$$

$$\|\mathbf{P}\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))} \leq A_p \|\Delta \mathbf{P}\|_{L_2(\Omega)} \leq A_c \|\mathbf{U}\|_{L_2(0, T; W_2^2(\Omega))}, \quad A_p, A_c - const. \quad (22)$$

Замечание. Теорема 2 о единственности слабых обобщенных решений задачи (1) справедлива для их сильных и классических решений.

Автор выражает благодарность профессорам Л. А. Алексеевой и Н. И. Мартынову за некоторые замечания и полезные советы по улучшению математической строгости работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
- 2 Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование гладкость // УМН. – 2003. – 58:2(350). – С. 45-78.
- 3 Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation // <http://claymath.org/MillenniumPrizeProblems/Navier-StokesEquations>. Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. P.1-5.
- 4 Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Сер. математическая. – 1954. – № 18. – С. 3-50.
- 5 Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. – 431 с.
- 6 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 520 с.
- 7 Akysh A.Sh. The maximum principle of the Navier-Stokes equation // <http://www.knu.kz> / Вестник КНУ им. академика Е. А. Букетова. – 2012. – № 2(66). – С. 4-16.
- 8 Akysh A.Sh. The maximum principle of the Navier-Stokes equation // USA. – 2012. – arXiv.org: 1204.2668v [math-ph]. – 16 page.
- 9 Акыш А.Ш. О принципе максимума для уравнений Навье-Стокса // Вестник Омского государственного университета. – 2013. – № 1. – С. 32-37.

REFERENCES

- 1 Ladyzhenskaja O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki vjazkoj neshzhimaemoj zhidkosti. – M.: Nauka, 1970. – 288 s.
- 2 Ladyzhenskaja O.A. Shestaja problema tysjacheletija: uravnenija Nav'e-Stoksa, sushhestvovanie gladkost' // UMN. – 2003. – 58:2(350). – S. 45-78.
- 3 Fefferman Ch. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation // <http://claymath.org/MillenniumPrizeProblems/Navier-StokesEquations>. Cambridge, MA: Clay Mathematics Institute, 2000. P.1-5.
- 4 Sobolev S.L. Ob odnoj novoj zadache matematicheskoj fiziki // Izvestija AN SSSR. Ser. vatematicheskaja. – 1954. – № 18. – S. 3-50.
- 5 Mihlin S.G. Linejnye uravnenija v chastnyh proizvodnyh. – M.: Vysshaja shkola, 1977. – 431 s.
- 6 Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoj fiziki. – M.: Nauka, 1976. – 520 s.
- 7 Akysh A.Sh. The maximum principle of the Navier-Stokes equation // <http://www.knu.kz> / Vestnik KarGU im. akademika E. A. Buketova. – 2012. – № 2(66). – S. 4-16.
- 8 Akysh A.Sh. The maximum principle of the Navier-Stokes equation // USA. – 2012. – arXiv.org: 1204.2668v [math-ph]. – 16 page.
- 9 Akysh A.Sh. O principe maksimuma dlja uravnenij Nav'e-Stoksa // Vestnik Oshskogo gosudarstvennogo universiteta. – 2013. – № 1. – S. 32-37.

Резюме

Ә. Ш. Ақыш

(ҚР БҒМ математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

НАВЬЕ-СТОКС ТЕНДЕУЛЕРІНІҢ ШЕШУІНІҢ ЭКСТРЕМАЛДЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ ЖӨНІНДЕ

Жұмыста үш өлшемді бейсызқты Навье-Стокс теңдеулері (НСТ) үшін максимум принципінің орындалатындығы көрсетілген. Осының негізінде таңдалынған кеңістікте NST-ға қойылған есептің барлық уақыт $t \in [0, T]$, $\forall T < \infty$ аралығында әлсіз шешуінің жалқылығымен қоса әлді шешуінің болатындығы дәлелденген.

Кілт сөздер: бейсызқты Навье-Стокс теңдеулерінің жүйесі, Навье-Стокс теңдеулері үшін максимум қағидасы, Навье-Стокс теңдеулерінің әлсіз шешуінің жалқылығы, Навье-Стокс теңдеулерінің әлді шешуінің болатындығы.

Summary

A. Sh. Akysheva

(Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan, Almaty, Republic of Kazakhstan)

ABOUT EXTREME PROPERTIES OF THE SOLUTION OF EQUATIONS NAVIER-STOKES

In the work the validity of principle of maximum for the Navier-Stokes equations (NSE) is shown. On what basis in the chosen space are proved uniqueness of weak generalized solutions and existence of strong solutions of a problem for NSE as a whole on time $t \in [0, T]$, $\forall T < \infty$.

Keywords: nonlinear Navier-Stokes equations system, the principle of maximum for Navier-Stokes equations, uniqueness of weak generalized solutions of Navier-Stokes equations, existence of strong solutions of Navier-Stokes equations.

Поступила 26.06.2013 г.

УДК 517.96

С. А. АЛДАШЕВ

(Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Республика Казахстан)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

В работе доказаны однозначные разрешимости краевых задач для многомерных гиперболических уравнений, которые являются обобщениями известных задач Коши, Дарбу и Гурса.

Ключевые слова: краевые задачи, многомерные, гиперболические уравнения.

Кілт сөздер: шеттік есептер, көп өлшемді, гиперболалық теңдеулер.

Keywords: regional tasks, the multivariate, hyperbolic equations.

Рассмотрим уравнение

$$g_1(t)\Delta_x u - g_2(t)u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u = 0, \quad (1)$$

где $tg_i(\theta) > 0, i = 1, 2$ при $t > 0$ и может обращаться в нуль при $t = 0$, Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m, m \geq 2$.

К уравнениям вида (1) принадлежат строго гиперболические, вырождающиеся гиперболические уравнения, а также уравнения, у которых одновременно вырождаются тип и порядок при $t = 0$, которые часто встречаются в задачах прикладного характера [1-3].

Пусть D_ε – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек (x, t) , ограниченная поверхностями

$$r = \int_0^t \sqrt{g_1(\xi) / g_2(\xi)} d\xi + \varepsilon, r = 1 - \int_0^t \sqrt{g_1(\xi) / g_2(\xi)} d\xi$$

и плоскостью $t = 0$, где $r = |x|$ – длина вектора

$$x = (x_1, \dots, x_m), 0 \leq t \leq t_0, t_0: (1 - \varepsilon) / 2 = \int_0^{t_0} \sqrt{g_1 / g_2} d\xi, \sqrt{g_1 / g_2} \in L(0, t_0), a 0 < \varepsilon < 1. \text{ Часть этих}$$

поверхностей, образующих границу D_ε , соответственно обозначим $S_\varepsilon, S_1, S^\varepsilon$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m - 1$.

ЗАДАЧА 1. Найти регулярное в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C(W_\varepsilon) \cap C^1(W_\varepsilon \cup S^\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$(\alpha_1 \sigma r u + \beta_1 \sigma r u_t)|_{S^\varepsilon} = \varphi(r, \theta), u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(r, \theta) \quad (2)$$

или

$$(\alpha_1 \sigma r u + \beta_1 \sigma r u_t)|_{S^\varepsilon} = \varphi(r, \theta), u|_{S_1} = \sigma_1(r, \theta). \quad (3)$$

ЗАДАЧА 2. Найти решение $u \in C(W_\varepsilon) \cap C^1(W_\varepsilon \cup S^\varepsilon) \cap C^2(W_\varepsilon)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta), \\ \alpha_2 \sigma r u \left(\frac{r + \varepsilon}{2}, \theta, \frac{r - \varepsilon}{2} \right) = \beta_2 \sigma r u_t(r, \theta, 0) + \beta(r, \theta), \varepsilon \leq r \leq 1.$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что уравнения $\alpha_i \sigma = 0, \beta_i \sigma = 0, i = 1, 2$ не имеют корней, кроме тождественно равных нулю, причем

$$\alpha_i^2 \sigma + \beta_i^2 \sigma \neq 0, i = 1, 2, \forall r \in [\varepsilon, 1], \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1}).$$

Задачи 1, 2 являются обобщениями задачи Коши, Дарбу для уравнения (1).

В качестве многомерного аналога задачи Гурса может быть рассмотрена следующая:

ЗАДАЧА 3. Найти регулярное в области D_ε решение уравнения (1), непрерывное в \bar{D}_ε и удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(r, \theta), u|_{S_1} = \sigma_1(r, \theta).$$

Сформулированные задачи в частных случаях исследованы в [4-6].

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно зависимых сферических функций порядка $n, 1 \leq k \leq k_n, k_n(m-2)!n! = (n+m-2)!(2n+m-2); W_2^l(S), l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева, а $\bar{S}^\varepsilon = \{(r, \theta) \in S^\varepsilon, \varepsilon < r < (1 + \varepsilon)/2\}$. Имеет место ([7]).

ЛЕММА 1. Если $f(r, \theta) \in W_2^l(S^\varepsilon)$ и $l > m - 1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta) \quad (4)$$

сходится абсолютно и равномерно.

Через $\varphi_n^k(r), \sigma_{\varepsilon n}^k(r), \bar{a}_{in}^k(r, t), \bar{a}_{in}^k(r, t), \bar{b}_n^k(r, t), \bar{c}_n^k(r, t), \rho_n^k, \bar{f}_n^k$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций

$$\varphi(r, \theta), \sigma_\varepsilon(r, \theta), a_i \rho(\theta), a_i f(\theta) \rho(\theta), b \rho(\theta), c \rho(\theta), \rho(\theta), f(\theta) \rho(\theta)$$

которые определяются по формуле

$$\varphi_n^k(r) = \int_{\Gamma_1} \varphi(r, \theta) Y_{n,m}^k(\theta) d\Gamma_1,$$

$$\tilde{g}_{jn}^k(t) = g_j(t) \rho_n^k, j = 1, 2,$$

причем

$$\rho(\theta) \in C^-(S^\varepsilon), \rho(\theta) \neq 0, f(\theta) = r_{x_i} = \frac{x_i}{r} \in C^-(S^\varepsilon),$$

Γ_1 – единичная сфера в $E_m, i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим множество функций

$$M_0^l(S^\varepsilon) = \left\{ \left(f(r, \theta) : f \in W_2^l(S^\varepsilon), \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_n} (\|f_n^k(r)\|_{C^2((\varepsilon, 1))}^2 + \|f_n^k(r)\|_{C([\varepsilon, 1])}^2) \exp 2n^3 < \infty, l > m - 1 \right) \right\},$$

$$M^l(S^\varepsilon) = \left\{ \left(f(r, \theta) : f \in W_2^l(S^\varepsilon), \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_n} (\|f_n^k(r)\|_{C^2((\varepsilon, 1))}^2 + \|f_n^k(r)\|_{C([\varepsilon, 1])}^2) (\exp 2 \exp n^3) \exp n^3 < \infty, l > m - 1 \right) \right\}.$$

Пусть

$$a_i, b \in W_2^l(D_\varepsilon) \cap C^1(\bar{D}_\varepsilon), l \geq m + 1, \left(\frac{a_i}{g} \right)_t, \left(\frac{b}{\sqrt{g_1 g_2}} \right)_t \in C(\bar{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon),$$

$$i = 1, \dots, m, c \in W_2^l(D_\varepsilon), l \geq m + 1, \left(\frac{c}{g_1} \right)_t \in C(D_\varepsilon),$$

$$\left(\frac{g_1}{g_2} \right)^{1/2} \in C^2([0, t_0]) \cap C^3((0, t_0)), \alpha_1(\sigma), \beta_1(\sigma) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap C^2((\varepsilon, 1)),$$

(*)

тогда справедлива

- ТЕОРЕМА 1. 1⁰. Если $\varphi(r, \theta) \in M^l(S^\varepsilon), \sigma_\varepsilon(r, \theta) \in M^l(S^\varepsilon), \sigma_1(r, \theta) \in M^l(S^\varepsilon | \bar{S}^\varepsilon)$, то задача 1 однозначно разрешима;
- 2⁰. Если $\varphi(r, \theta) \in M^l(S^\varepsilon), \sigma_\varepsilon(r, \theta) \in M^l(S^\varepsilon), \sigma_1(r, \theta) \in M^l(S^\varepsilon | \bar{S}^\varepsilon)$, то задача 3 является корректной.

ТЕОРЕМА 2. Если $\tau(r, \theta), \beta(r, \theta) \in M^l(S^\varepsilon), \alpha_2(r), \beta_2(\sigma) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cap C^1((\varepsilon, 1))$,

то задача 2 имеет единственное решение.

Доказательство теоремы 1.

Сначала рассмотрим задачу (1), (2) при $\beta_1(\sigma) \neq 0, \forall \sigma \in [\varepsilon, 1]$. В сферических координатах $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$ уравнение (1) имеет вид

$$g_1(t) \left(u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \Delta u \right) - g_2(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) u_{x_i} + b(r, \theta, t) u_t + c(r, \theta, t) u = 0,$$

где

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{P_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{\sin^{m-j-1} \theta_j}{\partial \theta_j} \right),$$

$$P_1 = 1, P_j = (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{j-1})^2, j > 1.$$

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C(\mathcal{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon \cup S^\varepsilon) \cap C^2(\mathcal{D}_\varepsilon)$,

то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_n} v_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где $v_n^k(r, t)$ – функции подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), полученное выражение сначала умножив на $\rho(\theta)$, а затем проинтегрировав по единичной сфере Γ_1 , получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left[\rho_n^k \left(g_1 \left(v_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} v_{nr}^k - \frac{\lambda}{r^2} v_n^k \right) - g_2 v_{ntt}^k \right) + \sum_{i=1}^m \int_{\Gamma_1} a_i \rho(\theta) \times \right. \\ \left. \times \left(v_{nx_i}^k Y_{n,m}^k(\theta) + v_n^k \frac{\partial}{\partial x_i} Y_{n,m}^k(\theta) \right) d\Gamma_1 + \tilde{b}_n^k v_{nt}^k + \tilde{c}_n^k v_n^k \right] = 0, \lambda = n(n+m-2) \quad (7)$$

Известно, что [7, 8]

$$Y_{0,m}^k(\theta) = const, \frac{\partial}{\partial x_i} Y_{n,m}^k(\theta) = \frac{\partial Q_n^k}{\partial x_i} \Big|_{r=1} - nr_{x_i} Y_{n,m}^k(\theta), \quad (8)$$

здесь $Q_n^k(x) = r^n Y_{n,m}^k(\theta)$ – гармоническая функция от x , причем $\frac{\partial Q_n^k}{\partial x_i} \Big|_{r=1}$ – есть m -мерная сферическая функция $Y_{n-1,m}^k(\theta)$ порядка $n-1$.

Учитывая (8) уравнение (7) можем записать в виде

$$\begin{cases} \tilde{g}_{10}^1 v_{0rr}^1 - \{ \tilde{g}_{20}^1 v_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} \tilde{g}_{10}^1 + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^1 \right) v_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 v_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 v_0^1 \} = 0 \\ \tilde{g}_{1n}^k v_{nrr}^k - \{ \tilde{g}_{2n}^k v_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r} \tilde{g}_{1n}^k + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{in}^k \right) v_{nr}^k + \tilde{b}_n^k v_{nt}^k + \\ + \left[\tilde{c}_n^k - \frac{\lambda}{r^2} \tilde{g}_{1n}^k + \sum_{i=1}^m (\hat{a}_{i,n-1}^k - n \hat{a}_{in}^k) \right] v_n^k \} = 0, k = \overline{2, k_n}, n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, многомерное уравнение (1) сведено к двумерным уравнениям.

Каждое уравнение системы (9) можно записать в виде

$$\tilde{g}_{1n}^k v_{nrr}^k - \tilde{g}_{2n}^k v_{ntt}^k + a_n^k v_{nr}^k + \tilde{b}_n^k v_{nt}^k + c_n^k v_n^k = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

где

$$a_n^k = \begin{cases} \frac{m-1}{r} \tilde{g}_{10}^k + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{i0}^k, k = 1, n = 0 \\ \frac{m-1}{r} \tilde{g}_{1n}^k + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{in}^k, k = \overline{2, k_n}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$c_n^k = \begin{cases} \tilde{c}_0^k, k = 1, n = 0 \\ \tilde{c}_n^k - \frac{\lambda}{r^2} \tilde{g}_{1n}^k + \sum_{i=1}^m \hat{a}_{i,n-1}^k - n \hat{a}_{in}^k, k = \overline{2, k_n}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

В уравнении (10), произведя замену переменных

$$\xi = \frac{1}{2} \left(r + \int_0^t \sqrt{g_{1n}^k / g_{2n}^k} d\mu \right), \eta = \frac{1}{2} \left(r - \int_0^t \sqrt{g_{1n}^k / g_{2n}^k} d\mu \right),$$

получим

$$v_{n\xi\eta}^k + \bar{a}_n^k(\xi, \eta) v_{n\xi}^k + \bar{b}_n^k(\xi, \eta) v_{n\eta}^k + \bar{c}_n^k(\xi, \eta) v_n^k = 0, \quad (11)$$

где

$$\bar{a}_n^k(\xi, \eta) = \frac{a_n^k(r, t)}{2\sqrt{\tilde{g}_{1n}^k \tilde{g}_{2n}^k}} - \left(\sqrt{\frac{\tilde{g}_{1n}^k(t)}{\tilde{g}_{2n}^k(t)}} \right)_t,$$

$$\bar{b}_n^k(\xi, \eta) = \frac{a_n^k(r, t)}{2\tilde{g}_{1n}^k} - \frac{\tilde{b}_n^k(r, t)}{2\sqrt{\tilde{g}_{1n}^k \tilde{g}_{2n}^k}} + \left(\sqrt{\frac{\tilde{g}_{1n}^k(t)}{\tilde{g}_{2n}^k(t)}} \right)_t, \quad \bar{c}_n^k(\xi, \eta) = \frac{c_n^k(r, t)}{\tilde{g}_{1n}^k}.$$

при этом условие (2) для функций $v_n^k(\xi, \eta)$, с учетом леммы 1, переписывается в виде

$$\begin{aligned} a_0(\xi)\tau_n^k(\xi) + b_0(\xi)v_n^k(\xi) &= \tilde{\varphi}_n^k(\xi), \quad v_n^k\left(\xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varphi_{\varepsilon n}^k(\xi), \\ a_0(\xi) &= \alpha_1(2\xi), \quad \tau_n^k(\xi) = v_n^k(\xi, \xi), \quad b_0(\xi) = \sqrt{2}\beta_1(2\xi), \quad v_n^k(\xi) = \frac{\partial v_n^k}{\partial N}\Big|_{\xi=\eta} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_n^k}{\partial \xi} - \frac{\partial v_n^k}{\partial \eta} \right)\Big|_{\xi=\eta}, \quad \tilde{\varphi}_n^k(\xi) = (2\xi)^{m-1/2} \tilde{\varphi}_n^k(2\xi), \quad \varphi_{\varepsilon n}^k(\xi) = \\ &= \left(\xi + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{m-1/2} \tilde{\sigma}_{\varepsilon n}^k\left(\xi + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \frac{\varepsilon}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Используя общее решение уравнения (11) ([9]), нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (11) имеет вид

$$\begin{aligned} v_n^k(\xi, \eta) &= \frac{1}{2}\tau_n^k(\eta)R_n(\eta, \eta; \xi, \eta) + \frac{1}{2}\tau_n^k(\xi)R_n(\xi, \xi; \xi, \eta) + \\ &+ 2 \left[\bar{a}_n^k(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \xi_1}{\partial N} + \bar{b}_n^k(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \eta_1}{\partial N} \right] \Big|_{\xi_1=\eta_1} R_n(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta) \tau_n^k(\xi_1) d\xi_1, \end{aligned} \quad (13)$$

где $R_n(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)$, $n = 0, 1, \dots$ – функция Римана уравнения (11), существование которой доказано в [9].

Из уравнения (13) при $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$ с учетом условия (12) получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$q_n^k(\xi) = \tau_n^k(\xi) + \int_{\varepsilon/2}^{\xi} G_n(\xi, \xi_1) \tau_n^k(\xi_1) d\xi_1, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} R_n\left(\xi, \xi; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) q_n^k(\xi) &= 2\varphi_{\varepsilon n}^k(\xi) - \varphi_{\varepsilon n}^k\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) R_n\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\xi} \frac{\tilde{\varphi}_n^k(\xi_1)}{b_0(\xi_1)} R_n\left(\xi_1, \xi_1; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) d\xi_1, \quad R_n\left(\xi, \xi; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) G_n(\xi, \xi_1) = \\ &= \sqrt{2} \left\{ -\frac{a_0(\xi_1)}{b_0(\xi_1)} R_n\left(\xi_1, \xi_1; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial N} R_n(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) \right\} \Big|_{\xi_1=\eta_1} + \\ &+ 2 \left[\bar{a}_n^k(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \xi_1}{\partial N} + \bar{b}_n^k(\xi_1, \eta_1) \frac{\partial \eta_1}{\partial N} \right] \Big|_{\xi_1=\eta_1} R_n\left(\xi_1, \xi_1; \xi, \frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Учитывая определение функции Римана и $R_n(\xi, \xi_1; \frac{\xi}{2}) > 0$ из уравнения (14) найдем единственным образом

$$\tau_n^k(\xi) = q_n^k(\xi) - \int_{\xi/2}^{\xi} R_n(\xi, \xi_1; -1) q_n^k(\xi_1) d\xi_1, \quad (15)$$

где $R_n(\xi, \xi_1; -1)$ – резольвента ядра $G_n(\xi, \xi_1), n = 0, 1, \dots$.

Таким образом, решение задачи (11), (12) запишется в виде (13), где $\tau_n^k(\xi), v_n^k(\xi)$ определяются соответственно из формул (15), (12).

Следовательно, функция (6) является единственным решением задачи (1), (2), где $v_n^k(r, t), k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots$ находятся по формуле (13).

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1), а также на заданные функции $\alpha_1(r), \beta_1(r), \varphi(r, \theta), \sigma_\varepsilon(r, \theta)$, и тот факт, что функция Римана есть решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода, а также оценки [7]

$$k_n \leq cn^{m-2}, |Y_{n,m}^k(\theta)| \leq cn^{\frac{m}{2}-1}, c = const > 0$$

можно доказать, что полученное решение $u(r, \theta, t)$ в виде (6) принадлежит классу $C(W_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon \cup S_\varepsilon) \cap C^2(W_\varepsilon)$.

Таким образом, задача (1), (2) имеет единственное решение.

Однозначные разрешимости задачи (1), (2) при $\beta_1(r) \equiv 0$, а также задач 2, 3 устанавливаются аналогично.

Отметим, что в теоремах 1, 2 принадлежность заданных функций к классу $M(S)$ являются существенными и их нарушения могут привести к некорректности решения рассматриваемых задач (см. примеры в [5]).

Мы теперь рассмотрим уравнение (1) в тех случаях, когда ее коэффициенты не удовлетворяют условию (*). К таким уравнениям, например, относятся уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона (Э-Д-П)

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{k}{t} u_t = 0, k = const, \quad (16)$$

а также обобщенное уравнение Э-Д-П

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{k(t)}{t^2} u_t = 0, \alpha = const > 0,$$

если $\frac{k(t)}{t^2} \in C([0, t_0])$.

Краевые задачи для уравнения (16) исследованы в [5].

Рассмотрим уравнение

$$g_1(t) \Delta_x u - t^l u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(t) u_{x_i} + b(t) u_t + c(t) u = 0, \quad (17)$$

$l = const \geq 0$, относительно ее коэффициентов будем предполагать, что $g_1, a_i, c \in C([0, t_0]), i = 1, \dots, m, (g_1/t^l)^{1/2} \in L(0, t_0), b(t) = p(t) - qt^l - -lt^{l-1}, q = const$,

$p(t)$ – положительная непрерывная функция в \bar{D}_ε , причем $qt^l - p(t) \geq 0$.

ЗАДАЧА 4. В области D_ε найти решение $u(x, t)$ уравнения (17) из класса $u \in C(W_\varepsilon) \cap C^2(W_\varepsilon) \cap W_2^1(W_\varepsilon) \cap W_2^1(\partial D_\varepsilon)$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\varepsilon} = 0, u|_{S_1} = 0 \quad (18)$$

или

$$u_t|_{S_\varepsilon} = 0, u|_{S_1} = 0. \quad (19)$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3. Если коэффициенты уравнения (16) удовлетворяют одному из следующих условий:

- 1) $g_1(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ или $r \sum_{i=1}^m a_i(\mathbf{0}) < (1-m)g_1(\mathbf{0})$;
- 2) $\frac{t^l}{g_1}, \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{g_1}, \frac{c}{g_1}, \frac{p}{g_1} \in C(\bar{D}_\varepsilon)$;
- 3) $\frac{g_1}{q(r,t)}, \frac{\sum_{i=1}^m a_i}{g_1}, \frac{c}{g_1}, \frac{t^l}{q(r,t)}, \frac{p}{q(r,t)} \in C(\bar{D}_\varepsilon), q(r,t) = r \sum_{i=1}^m a_i + (m-1)g_1$,

причем $q(r,t) < 0$ при $t \neq 0$, то решение задачи 4 единственно.

Доказательство. Решение задачи (17), (18) будем искать в виде ряда (6), тогда как в случае задачи 1, приходим к задаче Дарбу для уравнения

$$\rho_n^k g_1(t) v_{nrr}^k - \rho_n^k t^l v_{nct}^k + a_n^k v_{nr}^k + b_n^k v_{nt}^k + c_n^k v_n^k = 0 \quad (20)$$

с граничным условием

$$v_n^k(r, \mathbf{0}) = 0, \quad v_n^k \left(1 - \int_0^t \sqrt{g_1/\xi^l} d\xi, t \right) = 0, \quad (21)$$

где

$$a_n^k(r, t) = \rho_n^k \left(\frac{m-1}{r} g_1(t) + \sum_{i=1}^m a_i \right), b_n^k(t) = \rho_n^k b(t), k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots,$$

$$c_n^k(r, t) = \begin{cases} \rho_n^k c(t), k = 1, n = 0 \\ \rho_n^k \left(c - \frac{\lambda}{r^2} g_1 \right) + \sum_{i=1}^m (\rho_{n-1}^k - n \tilde{f}_n^k) a_i, k = \overline{2, k_n}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

При выполнении условия теоремы 3 из результатов работы [10] следует, что задача (20), (21) имеет только тривиальное решение.

Следовательно, решение (17), (18) $u(x,t) \equiv 0$.

Справедливость теоремы 3 для задачи (17), (19) доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
- 2 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математической модели. – М.: Наука, 1973. – 416 с.
- 3 Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
- 4 Алдашев С.А. // ДАН СССР. – Т. 265, № 6. – С. 1289-1292.
- 5 Алдашев С.А. // Zeitschrift fur Analysis und Anwen – dungen. – 1985. – Bd. 4(2). – S. 97-106.
- 6 Алдашев С.А. Тезисы Всесоюзной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Ашхабад, 1986.
- 7 Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
- 8 Calderon A.P. // Zygmund Q.-Amez .Y. Math. – 1957. – Vol. 79, № 4. – P. 901-921.
- 9 Бицадзе А.В. Уравнения смешного типа. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164 с.
- 10 Алдашев С.А. // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 6. – С. 985-991.

REFERENCES

- 1 Tihonov A.N., Samarskij A.A. Urovnjenija matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1972. 735 s.
- 2 Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Problemy gidroinamiki i ih matematicheskoy modeli. M.: Nauka, 1973. 416 s.
- 3 Bicadze A.V. Nekotorye klassy urovnjenij v chastnyh prozvodnyh. M.: Nauka, 1981. 448 s.
- 4 Aldashev S.A. DAN SSSR, t. 265, № 6. C. 1289-1292.
- 5 Aldashev S.A. Zeitschrift fur Analysis und Anwen – dungen. 1985. Bd. 4(2). S. 97-106.
- 6 Aldashev S.A. Tezisy vsesojuznoj konferencii «Differencial'nye uravnenija i ih prilozhenija». Ashhabad, 1986.
- 7 Mihlin S.G. Mnogomernye singuljarnye integraly i integral'nye uravnenija. M.: Fizmatgiz, 1962. 254 s.
- 8 Calderon A.P. Zygmund Q.-Amez .Y. Math. 1957. Vol. 79, № 4. P. 901-921.
- 9 Bicadze A.V. Uravnenija smeshnogo tipa. M.: Izd. AN SSSR, 1959. 164 s.
- 10 Aldashev S.A. Differencial'nye uravnenija. 1983. T. 19, № 6. S. 985-991.

Резюме

С. А. Алдашев

(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

**КӨПӨЛШЕМДІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ АРНАЛҒАН
ШЕТТІК ЕСЕПТЕР**

Мақалада көпөлшемді гиперболаалық теңдеулерге арналған шеттік есептердің бір мәнді шешімі барлығы дәлелденген. Бұл есептер белгілі Коши, Дарбу және Гурс есептерінің жалпыланған түрлері.

Кілт сөздер: шеттік есептер, көп өлшемді, гиперболаалық теңдеулер.

Summary

S. A. Aldashev

(Kazakh national pedagogical university named after Abai, Almaty, Republic of Kazakhstan)

**REGIONAL TASKS
FOR THE MULTIVARIATE HYPERBOLIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER**

In work are proved unequivocal to resolvability of regional tasks for the multivariate hyperbolic equations which are generalizations of known tasks Koshi, Darbu and Gursa.

Keywords: regional tasks, the multivariate, hyperbolic equations.

Поступила 5.07.2013г.

УДК 517.956

Д. М. ЖОЛТАЕВ^{1,2}, А. БАЙКОНЫС², Г. ОРАЛСЫН¹

¹Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Республика Казахстан,

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

**ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ**

Аннотация

В работе [1] найдены граничные условия объемного потенциала для уравнения Пуассона в любой ограниченной области Ω многомерного евклидова пространства. Граничные условия объемного потенциала для бигармонического уравнения были получены в работе [2], а также было показано, что решение полученной граничной задачи совпадает с объемным потенциалом. В данной работе исследовано уравнение Трикоми в эллиптической области и получены аналогичные результаты: получены граничные условия объемного потенциала для уравнения в эллиптической области. Доказано, что полученная нелокальная граничная задача для эллиптического уравнения типа Трикоми имеет единственное решение, которое совпадает с объемным потенциалом в области определения оператора.

Ключевые слова: объемный потенциал, эллиптическое уравнение, фундаментальное решение, уравнение Трикоми.

Кілт сөздер: көлемдік потенциал, эллиптикалық теңдеу, іргелі шешім, Трикоми теңдеуі.

Keywords: volume potential, elliptic equation, fundamental solution, Tricomi equation.

Рассмотрим в области $\Omega \in R^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$ следующее уравнение Трикоми

$$Eu = y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad y > 0, \quad (1)$$

В области Ω рассмотрим объемный потенциал

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} q(x, y; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi. \quad (2)$$

Здесь q – фундаментальное решение уравнения (1) в эллиптической полуплоскости, задаваемое выражением [1, стр. 155]

$$q(x, y; \tau, \xi) = k \left(\frac{4}{3} \right)^{4\beta-2} (r_1^2)^{-\beta} (1-\sigma)^{1-2\beta} F(1-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma), \quad (3)$$

где F – гипергеометрическая функция, и

$$\left. \begin{aligned} r^2 \\ r_1^2 \end{aligned} \right\} = (x-\tau)^2 + \frac{4}{9} \left(y^2 \mp \xi^2 \right)^2,$$

$$\sigma = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad \beta = \frac{1}{6}, \quad k = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{3} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}.$$

Т.е. q удовлетворяет следующему уравнению:

$$y \frac{\partial^2 q(x, y; \tau, \xi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q(x, y; \tau, \xi)}{\partial y^2} = \delta(\varphi - \psi),$$

где $\varphi = (x, y)$, $\psi = (\tau, \xi)$, δ – дельта-функция Дирака.

Теорема 1. Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ объемный потенциал (2) и удовлетворяет граничным условиям на $\partial\Omega$

$$\frac{u}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (4)$$

где q – фундаментальное решение уравнения (1) в эллиптической плоскости. Обратно, если решение уравнения (1) из класса $w_2^2(\Omega)$ удовлетворяет граничным условиям (4), то оно определяет объемный потенциал по формуле (2).

Доказательство. Применяя к функции $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$ формулу Грина при любом $(x, y) \in \Omega$, получим равенство

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \iint_{\Omega} q(x, y; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi = \iint_{\Omega} q E u d\tau d\xi = \\ &= \int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + \iint_{\Omega} u E q d\tau d\xi = \\ &= \int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned}$$

Отсюда вытекает тождество

$$\int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (5)$$

Из (5), по свойству потенциалов простого и двойного слоя согласно лемме Геллерстедта [1, стр. 155], при $(x, y) \rightarrow \partial\Omega$, находим

$$\frac{u}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (6)$$

Итак, равенство (6) является граничным условием объемного потенциала (2).

Далее, предельным переходом несложно показать, что формула (6) остается справедливой и для всех $u \in W_2^2(\Omega)$.

Обратно покажем, что если решение u_1 уравнения (1) удовлетворяет граничному условию (4), то оно совпадает с объемным потенциалом (1).

Действительно, если это не так, то функция $v = u - u_1 \in W_2^2(\Omega)$, где u – объемный потенциал (2), удовлетворяет однородному уравнению

$$Ev = y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

и однородному условию:

$$\frac{v(x, y)}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (4')$$

Применив формулу Грина к функции $v \in W_2^2(\Omega)$, как и выше, убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega} q(x, y; \tau, \xi) E v \, d\tau d\xi = \int_{\partial\Omega} q(\xi v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + \iint_{\Omega} v E q \, d\tau \, d\xi = \\ &= \int_{\partial\Omega} q(\xi v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + v(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Т.е.

$$\int_{\partial\Omega} q(\xi v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (7)$$

Отсюда при $(x, y) \rightarrow \partial\Omega$, находим

$$0 = \frac{v(x, y)}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + v(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (8)$$

Так как функция v удовлетворяет условию (4'), то мы имеем из (8)

$$v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Подведем итоги:

$$y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (9)$$

$$v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Из единственности решения задачи Дирихле для уравнения (9) вытекает, что $v = u - u_1 \equiv 0$, $\forall (x, y) \in \Omega$, т.е. u_1 совпадает с объемным потенциалом (2).

Теорема 1 доказана.

Пример.

Рассмотрим одномерный потенциал в интервале $\Omega = (0,1)$

$$u(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} |x - y| f(y) dy, \quad (11)$$

Который удовлетворяет

$$u''(x) = f(x). \quad (12)$$

Требуется найти граничные условия для следующего одномерного потенциала

$$u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (13)$$

фундаментальное решение которого выражается формулой [4, стр. 198]:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} |x|. \quad (14)$$

Решение. Подставляя значение $f(y)$, находим

$$u(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} |x - y| u''(y) dy = \int_0^x \frac{1}{2} |x - y| u''(y) dy - \int_x^1 \frac{1}{2} |x - y| u''(y) dy =$$

$$= \frac{1}{2}[-xu'(0) + u(x) - u(0) - (x-1)u'(1) - u(1) + u(x)] =$$

$$= u(x) - \frac{1}{2}[xu'(0) + u(0) + (x+1)u'(1) + u(1)].$$

Следовательно, граничные условия объемного потенциала имеют следующий вид:

$$\begin{cases} u'(0) + u'(1) = 0, \\ -u'(1) + u(0) + u(1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Следовательно, уравнение (13), где $u(x)$ определено по формуле (11) однозначно определяет граничные условия (15). С другой стороны, задача (13), (15) однозначно определяет объемный потенциал (11).

Заключение. Одной из самых сложных проблем математической физики является нахождение явного решения граничной задачи для любой области Евклидового пространства. Например, в случае классической граничной задачи для уравнения Трикоми мы можем найти ее решение в явном виде лишь для некоторых канонических областей Евклидового пространства. Новизна данной работы состоит в том, что мы показали, что полученная новая граничная задача для уравнения Трикоми является разрешимой в явном виде. Из теоремы 1 сразу же следует, что если мы будем рассматривать следующую нелокальную граничную задачу для уравнения Трикоми в эллиптической области:

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad y > 0,$$

$$\frac{u}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

то эта задача является разрешимой в явном виде для любой ограниченной области Евклидового пространства. Более того, фундаментальное решение данной задачи:

$$q(x, y; \tau, \xi) = k \left(\frac{4}{3} \right)^{4\beta-2} (r_1^2)^{-\beta} (1-\sigma)^{1-2\beta} F(1-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma)$$

является ее функцией Грина для любой ограниченной области.

Авторы выражают благодарность своему учителю, д.ф.-м.н., профессору, академику НАН РК, уважаемому Т. Ш. Кальменову за постановку задачи и за постоянное внимание в процессе написания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Сураган Д., Несипбаев Е.Х. Граничные условия объемного потенциала для бигармонического уравнения // Известия НАН РК. – 2013. – Т. 287, № 1. – С. 46-52.
- 2 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 428, № 1. – С. 16-19.
- 3 Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970.
- 4 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

REFERENCES

- 1 Kal'menov T.Sh., Suragan D. K spektral'nym voprosam ob'emnogo potentsiala, Doklady akademii nauk, 2009, t. 428, №1, str. 16-19. (in Russ).
- 2 Suragan D., Nesipbaev E.H. Granichnye uslovija ob'emnogo potentsiala dlja bigarmonicheskogo uravnenija, Izvestija NAN RK 2013, t. 287, № 1, -p.46-52. (in Russ)
- 3 Smirnov M.M. Uravnenija smeshannogo tipa, izd-vo Nauka, M., 1970 (in Russ).
- 4 Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoi fiziki, izd-vo Nauka, M., 1981 (in Russ).

Резюме

Д. М. Жолтаев, А. Байқоныс, Г. Оралсын

¹ҚР БҒМ математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы,
²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ТРИКОМИ ТЕНДЕУІ ҮШІН КӨЛЕМДІК ПОТЕНЦИАЛДЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ

[1] жұмыста кез-келген Ω облыс үшін Пуассон тендеуі үшін көлемдік потенциалдың шекаралық шарттары табылған. [2] жұмыста бигармоникалық тендеу үшін көлемдік потенциалдың шекаралық шарттары табылған, сонымен бірге алынған шекаралық есептің шешімі көлемдік потенциалмен дәл келетінін көрсетілген. Осы жұмыста Трикоми түрдегі азғындайтын эллиптикалық тендеу зерттелген. Эллиптикалық облыста көлемдік потенциалдың шекаралық шарттары алынған. Трикоми тендеуі үшін эллиптикалық облыста алынған локалды емес шекаралық есеп жалғыз шешімі болатындығы дәлелденген. Ол оператордың анықтау облысында көлемдік потенциалменен дәл келеді. Жұмыста алынған нәтижелердің көрнекілігі үшін мысал қарастырылады.

Кілт сөздер: көлемдік потенциал, эллиптикалық тендеу, іргелі шешім, Трикоми тендеуі.

Summary

D. M. Zholtayev, A. Baykonys, G. Oralsyn

¹Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan, Almaty
²Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

BOUNDARY CONDITIONS OF THE VOLUME POTENTIAL FOR THE TRICOMI EQUATION

In the paper [1] the authors found boundary conditions of the volume potential for the Poisson equation in any bounded domain Ω of multidimensional Euclidean space. In work [2] it was found that boundary conditions of the volume potential for the bi-harmonic equation, also it was proved that the solution of obtained boundary-value problem coincides with the volume potential. In this paper we investigate Tricomi type degenerated elliptic equations. Boundary conditions for this equation in elliptic domain are obtained here. Also we show that the obtained non-local problem for the Tricomi degenerated elliptic equation has a unique solution which coincides with the volume potential in the definition domain of the operator. For the visualization we also consider an example.

Keywords: volume potential, elliptic equation, fundamental solution, Tricomi equation.

Поступила 25.06.2013 г.

УДК 538.9, 539.21:537.1

Isa Kh. ZHAREKESHEV

(Al-Farabi Kazakh National University, Almaty. Republic of Kazakhstan. Email: isa2020@mail.ru)

**ELECTRON DENSITY OF STATES AND LOCALIZATION
OF TWO-DIMENSIONAL DISORDERED SYSTEMS
IN QUANTIZED MAGNETIC FIELDS**

Summary

We study numerically non-interacting electrons moving on a two-dimensional lattice with a uniform magnetic field and a random site potential. The electron localization and the density of states are investigated by using the method of transfer-matrices and by the direct diagonalization technique. For numerical simulations the Ando model with the diagonal disorder is used. The first preliminary data have been obtained for different sizes of the system and various values of the magnetic field. The localization length exhibits Shubnikov-de-Haas oscillations. The density of

states shows several Landau bands separated by the energy gaps. With increasing the disorder the Landau bands becomes broader and overlap with each other. The application of the obtained results to the integer quantum Hall effect is discussed.

Keywords: electron conductivity, critical phenomena, two-dimensional electron gas, quantum Hall effect, electron localization.

Кілт сөздер: электрондық өткізгіштік, критикалық құбылыс, екі өлшемдегі электрондық газ, Холлдың кванттық эффектісі, электрондық локализациясы.

Ключевые слова: электронная проводимость, критические явления, двумерный электронный газ, квантовый эффект Холла, электронная локализация.

Introduction. The prediction of the absence of the delocalized states for non-interacting electrons in a disordered two-dimensional system in the limit of the vanishing magnetic field has been made in a seminal paper of “gang of four” [1]. This has been a birth of the celebrating scaling theory in condensed matter physics. Later on Klaus von Klitzing and coworkers have discovered a quantum Hall effect [2]. The key point of this phenomenon is a quantization of the Hall resistance occurring at very low temperatures close to the absolute zero and in an extremely high magnetic field. For this discovery von Klitzing has been honored by the Nobel price for physics in 1984.

This latter event has been followed by the discovery of the fractional quantum Hall effect (FQHE), observed experimentally by Tsui, Störmer and Gossard [3]. The FQHE has also won the Nobel Price in 1999 jointed by a theoretician Prof. Robert Laughlin who has elaborated an analytical explanation for the fractional version of the effect. That is why the discovery made by K. von Klitzing is referred to as the integer quantum Hall effect, i.e. IQHE (or ordinary QHE, respectively). IQHE was found in two-dimensional (2D) electron or hole layers of the spatial charge in the metal-insulator-semiconductor structures (MIS) and in the heterojunctions with modulated doping.

The quintessence of the effect is that in the low temperature Hall conductivity σ_H of the 2D degenerated electron gas in a strong magnetic field B , which is measured as a function of magnetic field intensity B or of the concentration of the two-dimensional carriers N_s , one can observe a number of plateaus. This is shown in Fig. 1 as an example of the dependence of the Hall resistance R_H on the concentration N_s . The relation $R_H = 1/\sigma_H$ is valid in the region of a plateau. Exactly on the plateau we have

$$\sigma_H = \nu e^2/h. \quad (1)$$

Here e and h are fundamental constants, i.e. the elementary charge and Planck’s constant, respectively, ν is filling factor which is equal to $\nu = N_s/N_L$, with N_L being the number of the electron states in the Landau level measured per square unit.

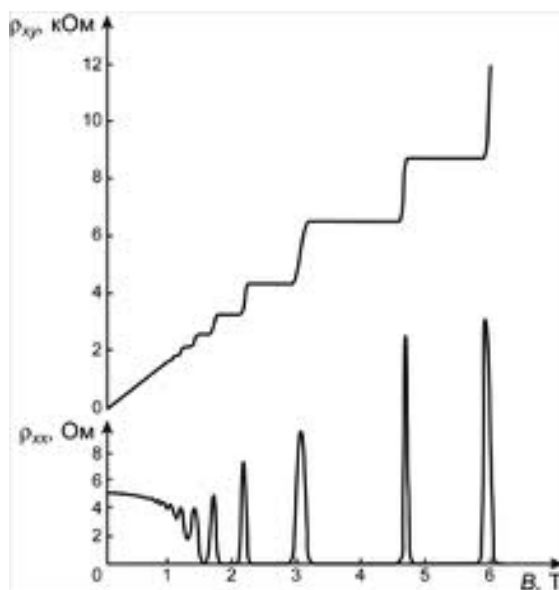


Figure 1 – The quantum Hall effect in the GaAs heterostructure. The dependence of the tensor of the Hall resistance: the transversal ρ_{xy} (on the top) and the longitudinal ρ_{xx} (on the bottom) on the strength of the external magnetic field B . The temperature is equal to $T=8$ mK [5]

$$N_L = 1/2\pi\lambda^2 = eB/ch = B/\Phi_0, \quad (2)$$

where c is the light speed and $\lambda=(ch/eB)^{1/2}$ is the magnetic length and $\Phi_0 = ch/e$ is the magnetic flow quantum. For the first time the observation of the quantum Hall plateaus have been observed and measured in the Si-MOS right-angle structure at the temperature $T=1.5$ K [1] as a function of the gate voltage V_G . The latter is proportional to the filling factor N_s . The similar “jumping” picture has been obtained later on the heterostructures GaAs/Al_{0.3}Ga_{0.7}As as a direct field dependence of the Hall resistance tensor ρ_{xy} at the temperature $T=8$ mK [4, 5].

Model of the numerical simulations. The study of electronic states in disordered systems is inevitable to understand electronic transport properties in conducting materials. Most directly the electronic states are described by their wave functions. Since the wave functions and the energies are both obtained by solving the eigenvalue problem for the disordered Hamiltonian, it is quite natural to expect that the energy spectrum involves some information on the eigenfunctions. In disordered systems the spatial symmetries which exist in pure systems are completely lifted. The fundamental symmetries under the operation of the time reversal can persist. The importance of them in the problem of the Anderson localization were first pointed out by Wegner [6,7] in the treatment of weakly localized regime. The link between the level statistics and the fundamental symmetry was originally proposed in nuclear physics in order to explain complicated energy spectra in some heavy nuclei [8-11], and then it has been applied to the problems of metallic fine particles [12, 13] and quantum chaos [14,15].

Although substantial progress in the understanding of critical behaviour at the disorder-induced IQHE-to-insulator transition has been achieved, nevertheless several issues are still considered as being open and unsolved. The first issue of them is knowledge of the density of states. The second one is the electron localization in the centre of the Landau bands. We use the famous Ando model with the diagonal disorder [16]

$$H = \sum_r \epsilon_r |r\rangle\langle r| + \sum_{\Delta} t_{r,r+\Delta} |r\rangle\langle r+\Delta|. \quad (3)$$

The onsite energies are measured in units of the hopping integral $t_{r,r+\Delta}$, while the length scale is measured in the units of the lattice constant, i.e. $a=1$. The electron states denoted by $|r\rangle$ correspond to the lattice sites of the simple square lattice. The random energies ϵ_r are governed by the following distribution law

$$P(\epsilon) = \begin{cases} W^{-1}, & |\epsilon| \leq W/2, \\ 0, & |\epsilon| > W/2. \end{cases} \quad (4)$$

The hopping elements between neighboring states r and $r+\Delta$ are considered and have the following form [17, 18]:

$$t_{r,r+\Delta} = \begin{cases} \exp(\mp 2\pi i \alpha z), & \Delta \in \{\pm e_y\}, \\ 1, & \Delta \in \{\pm e_x, \pm e_z\} \end{cases} \quad (5)$$

where the magnetic field B enters the problem through the factor $\alpha = N_L = \frac{eB}{hc}$, for simplicity we choose

the standard gauge, namely $\vec{A} = (0, -Bz, 0)$.

The density of states. We study the single-electron density of states of two-dimensional disordered systems in the presence of quantized magnetic field under various conditions. According to the definition of the density of states

$$\rho(E) = \frac{1}{L^3} \sum_n \delta(E - e_n), \quad (6)$$

Here $\rho(E)$ is a global quantity, which is averaged of the whole surface of the two-dimensional electron gas. The discrete energies have been calculated by the straightforward diagonalisation of the Ando Hamiltonian (3). Figures 1 and 2 demonstrate the spectral density of states $\rho(E)$ at various disorder W of the random potential for the 2D system of linear size $L=50$ with fixed magnetic field $\alpha=0.1$ and $\alpha=0.01$, respectively. The plots exhibit periodic behaviour, which is typical for the discrete lattice model. In both figures one observes the oscillating behaviour of the density of states. Close to the band edge the Landau bands are well separated by the energy gaps. With increasing the disorder W the Landau bands start to

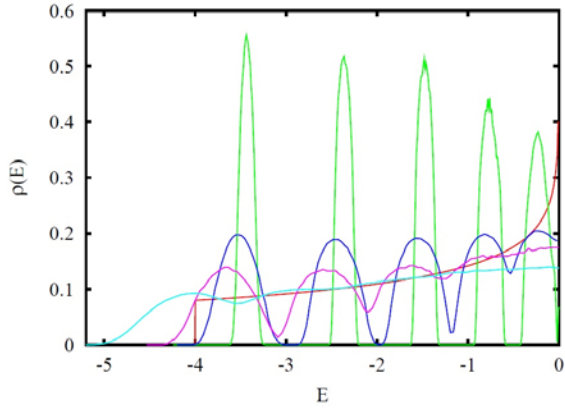


Figure 2 – Density of states $\rho(E)$ of two-dimensional electron gas in a quantized magnetic field of the magnitude $\alpha=0.1$ for various disorder degree W : 1 – 0.7; 2 – 2.0; 3 – 3.0; 4 – 5.0. The size of the square sample is $L \times L = 50 \times 50$. The results are obtained after ensemble averaging over 200 realizations. The density of states of the tight-binding model ($W=0$) is also shown by a non-oscillating line

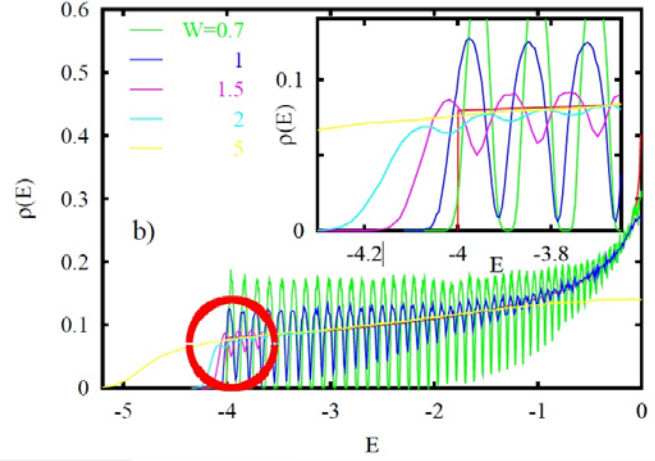


Figure 3 – Density of states $\rho(E)$ of two-dimensional electron gas in a quantized magnetic field of the magnitude $\alpha=0.01$ for various disorder degree W : 1 – 0.7; 2 – 1.0; 3 – 1.5; 4 – 2.0; 5 – 5.0. The size of the square sample is $L \times L = 50 \times 50$. The results are obtained after ensemble averaging over 200 realizations. The density of states of the tight-binding model ($W=0$) is also shown by a non-oscillating line. The inset shows the enlarged area of the density of states marked by the red circle

overlap with each other, their heights diminish. Finally, for larger W the gaps disappear entirely. Although the shapes of the density of states in Figure 1 and in the inset of Figure 2 are similar to each other, nevertheless $\rho(E)$ can not be mapped by a scaling transformation $f(\alpha, W)$.

The localization length. The proposed numerical technique for calculation of the localization of the electronic states is based on the evaluating the Green's functions $g_E(L)$ within the single particle approximation. Here the electron transport occurs with energy E in a bar-shaped disordered system of a length L and of a finite width M . Our system should be in a thermodynamic equilibrium. For that it is connected to the two semi-infinite perfect leads (thermal baths).

The localization length Λ can be obtained in the quasi-1D limit of a long 2D stripe with the length $L \gg 1$, using the Oseledec's theorem. Then one has the following definition:

$$\frac{1}{\Lambda(W, E)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln |g_E(L)|}{L}, \quad (7)$$

Thus, the inverse localization length is simply the exponential decay rate of the spatial extension of $g_E(L)$. In practice, the study of the Green's functions is mapped into the equivalent transfer-matrix calculations. The latter yields the smallest positive Lyapunov exponent identified as Λ^{-1} . Due to the convergence process of the underlying iteration procedure in the limit of large L , the statistical quantity Λ becomes self-averaging [19]. We use the transfer-matrix method developed in the paper [18], which has been successfully applied for three-dimensional disordered systems subject under high magnetic fields. In contrast to the method of calculation of the density of states performed in the previous section, which is based on the eigenvalue solvers, here we apply the scattering approach for computing the transport of the electron waves through the disordered region. While the quest for the eigenvalues requires the square geometry of the system (i.e. finite in both directions), the transfer matrix method operates on a single spatial scale, namely on the width L of the quasi-one-dimensional stripe, whose length tends to infinity. This approach provides more convenient conditions for the thermodynamic limit, rather than direct diagonalisation technique.

All the data for the reduced localization length Λ obtained by the transfer-matrix-method have accuracy between 0.1% and 0.3% for the size L ranging from 20 up to 200. Further increase of the system size above $L = 400$ requires an improvement of the statistical accuracy of the raw data. In fact, the computing time increases as L^5/ε^2 , where $\varepsilon = k \delta \Lambda_L / \Lambda_L$ is the relative statistical accuracy. The coefficient of proportionality k depends on the type of the boundary conditions and on computing details (that are the efficiency of the computer and the optimization of the algorithm).

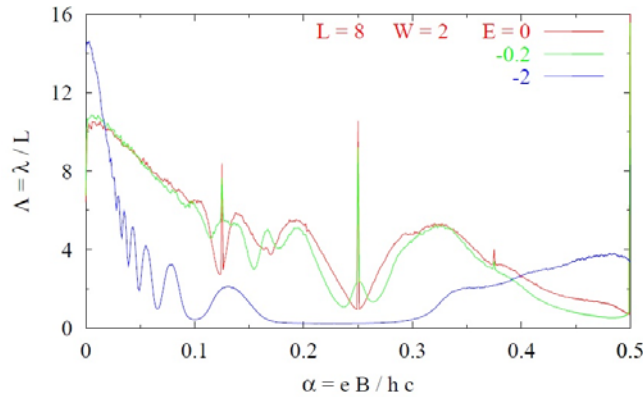


Figure 4 – Renormalized localization length Λ as a function of a magnetic field α at the disorder degree $W = 2$ for various energy $E = 0; -0.2; 2.0$. Data correspond to the energy $E = 0$ for size $L \times L = 8 \times 8$ of a two-dimensional disordered system

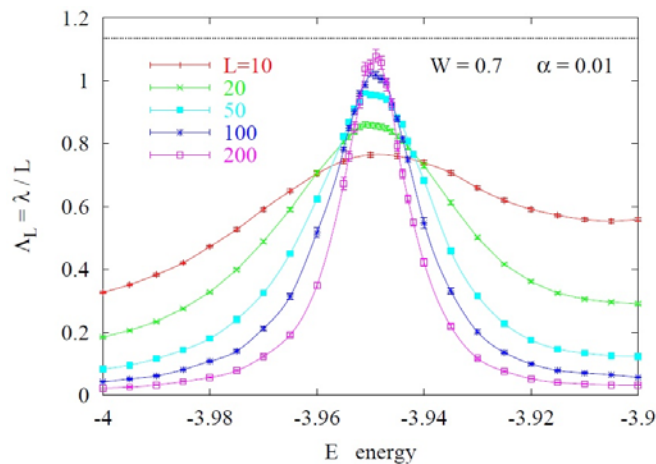


Figure 5 – Renormalized localization length Λ as a function of the electron energy E in a fixed magnetic field $\alpha=0.001$ in the vicinity of the lowest Landau level at the disorder degree $W = 0.7$ for various system size L :
1 – 10, 2 – 20, 3 – 50, 4 – 100, 5 – 200

In this paper we have proposed the numerical method for the calculation of the density of states and the localization length. The first raw results have been obtained for different sizes and the magnetic field. Although the preliminary data are given without detailed analysis and physical discussion, these will be provided elsewhere. Concerning the level statistics we show that the compressibility of the electron spectrum is connected to the multifractal properties of the wave functions [20]. We shift these and other relations to the problem of the quantum Hall effect for the nearest future.

REFERENCES

- 1 Abrahams E., Anderson P.W., Licciardello D.C., Ramakrishnan T.V. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions // *Phys. Rev. Lett.* – 1979. – Vol. 42, N 10. – P. 673-676.
- 2 Klitzing von K., Ebert G. // In: *Two-dimensional systems, Heterostructures and Superlattices* / Ed. by G. Bauer, F. Kuchar, H. Heinrich. Berlin - Heidelberg – N.Y. – Tokyo, 1984. – P. 243-252.
- 3 Tsui D.C., Stormer H.L., Gossard A.C. Fractional quantum Hall effect // *Phys. Rev. Lett.* 1982. – Vol. 48, N 22. – P. 1559-1562.
- 4 Prange R. and Girvin S. *The Quantum Hall Effect* // Springer Verlag, Berlin, 1990. – 213 p.
- 5 Hajdu J. *Introduction to the Theory of the Quantum Hall Effect*. VCH Verlag, 1994. – 308 p.; Klitzing von K., Ebert G. // *Physica*. – 1983. – Vol. 117B/118B. – P. 682-687.
- 6 Wegner F.J. Disordered system with n orbitals per site: $n = \infty$ limit // *Phys. Rev. B*. – 1979. – Vol. 19. – P. 783-788.
- 7 Wegner F.J. Electrons in disordered systems. Scaling near the mobility edge // *Z. Phys. B*. – 1976. – Vol. 25. – P. 327-337.
- 8 Wigner E.P. On the statistical distribution of widths and spacings of nuclear resonance levels // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* – 1951. – Vol. 47. – P. 790-798.
- 9 Dyson F.J. Statistical theory of the energy levels of complex systems // *J. Math. Phys.* – 1962. – Vol. 3. – P. 140-157.
- 10 Mehta M.L. *Random Matrices* // 2nd ed. Academic Press, Boston, 1991. – 523 p.
- 11 Kramer B. and MacKinnon A. Localization: theory and experiment // *Rep. Prog. Phys.* – 1994. – Vol. 56. – P. 1469-1601.
- 12 Gor'kov L.P. and Eliashberg G.M. Small metallic particles in the electromagnetic field // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* – 1965. – Vol. 48. – P. 1407-1418.

13 Gutzwiller M. C. Chaos in Classical and Quantum Mechanics, Interdisciplinary Applied Mathematics. – Vol.1. - Springer, New York, 1990. – 433 p.

14 Haake F. Quantum Signatures of Chaos, Springer Series in Synergetics, ed. H. Haken. – Vol. 54. – Berlin, 1991. – 349 p.

15 Efetov K. B. Supersymmetry and theory of disordered metals // Adv. Phys. – 1983. – Vol. 32, N 1. – P. 53-127.

16 Ando T. Numerical study of symmetry effects on localization in two dimensions // Phys Rev. B. 1989. – Vol. 40. – P. 5325-5329.

17 Batsch M., Schweitzer L., Zharekeshev I. Kh., Kramer B. Crossover from critical orthogonal to critical unitary statistics at the Anderson transition // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 77. – P. 1552-1555.

18 Dröse T., Batsch M., Zharekeshev I.Kh., Kramer B. Phase diagram of localization in a magnetic field // Phys. Rev. B. – 1998. – Vol. 57. – P. 37-40.

19 Zharekeshev, I.Kh. Localization trajectory and critical index // Vestnik KazNU. Seriya Fizicheskaya. – 2010. – Vol. 32, N 1. – P. 51–55.

20 Zharekeshev, I.Kh. Level statistics and phase diagram for the quantum Hall effect // Abstr. Meeting of the APS. – Montreal, Canada, 2004. – P. R1265.

Резюме

И. Х. Жәрекешев

(Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы. Email: isa2020@mail.ru)

КВАНТТІЛЕТІН МАГНИТ ӨРІСТЕРДЕГІ ЭЛЕКТРОНДЫҚ КҮЙЛЕРІНІҢ ТЫҒЫЗДЫҒЫ ЖӘНЕ ЕКІӨЛШЕМДІ РЕТТЕЛМЕГЕН ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ЛОКАЛИЗАЦИЯСЫ

Біз біртекті магнит өрісі бар және кездейсоқ түйінді потенциалы бар екіөлшемді торда қозғалатын бір-бірімен әсер етпейтін электрондарды зерттейміз. Электрондық локализациясы және күйлерінің тығыздығы трансфер-матрица және диагонализация әдісімен зерттеледі. Компьютерлік модельдеу үшін диагональдық реттелмеген Андо моделі пайдаланылды. Зерттеліп отырған жүйе мен магнит өрісі шамасының әртүрлі өлшемдері үшін алғашқы алдын ала мәліметтер алынды. Локализация ұзындығы Шубников-де-Газа осцилляциаларын айқындайтындығы табылды. Электрондық күйлердің тығыздығы энергетикалық саңылаулармен бөлінген Ландаудың бірнеше зоналарын көрсетеді. Қоспа потенциалдың реттелмеуі өскен сайын Ландау зоналарының ені үлкейе түседі және олар өзара қайта жабыла бастайды. Қол жеткізілген қорытындылардың Холлдың толықесепті кванттық эффектісіне пайдалануға болатындығы талқыланған.

Кілт сөздер: электрондық өткізгіштік, критикалық құбылыс, екі өлшемдегі электрондық газ, Холлдың кванттық эффектісі, электрондық локализациясы.

Резюме

И. Х. Жәрекешев

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан.
Email: isa2020@mail.ru)

ПЛОТНОСТЬ ЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИЙ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМ В КВАНТУЮЩИХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Мы исследуем невзаимодействующие электроны, движущиеся в двумерной решетке с однородным магнитным полем и случайным узельным потенциалом. Изучаются электронная локализация и плотность состояний методом трансфер-матриц и методом прямой диагонализации. Для компьютерного моделирования использовалась модель Андо с диагональным беспорядком. Первые предварительные данные получены для разных размеров исследуемой системы и величин магнитного поля. Найдено, что длина локализации проявляет осцилляции Шубникова-де-Газа. Плотность электронных состояний показывает несколько зон Ландау, разделенных энергетическими щелями. С увеличением беспорядка примесного потенциала ширина зон Ландау становится больше и они начинают перекрываться между собой. Обсуждается применимость полученных результатов к целочисленному квантовому эффекту Холла.

Ключевые слова: электронная проводимость, критические явления, двумерный электронный газ, квантовый эффект Холла, электронная локализация.

Поступила 10.04.2013г.

М. Ж. ЖУМАБАЕВ, Г. С. ТИЛЕСОВА

(Қ. А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан Республикасы)

ҚАСИЕТТЕРІ ТЕМПЕРАТУРАҒА ТӘУЕЛДІ ЦИЛИНДРЛІК ДЕНЕЛЕРДІҢ ОСЕСИММЕТРИЯЛЫҚ КЕРНЕУЛІК КҮЙ ЕСЕБІ**Резюме**

Температуралық өрісте орналасқан осесимметриялық құрылғылардағы пайда болатын температуралық кернеулерді анықтау алгоритмі құрылған. Алгоритм көмегімен құрылғы қасиеті физикалық сызықты емес заңдылықпен өзгергенде пайда болған кернеулік-деформациялық күй анықталады. Жылжу модулі әртүрлі температура деңгейінде алынған созу диаграммасынан, ал Пуассон коэффициенті және температуралық ұлғаю коэффициенті эксперимент нәтижесінде алынған графиктерден анықталады. Есеп жазық деформация және жазық кернеулі күй жағдайлары үшін шешілген. Алынған сандық нәтижелер график түрінде беріліп, талдау жүргізілген.

Кілт сөздер: өріс, кернеу, температура, цилиндр, Пуассон коэффициенті, ығысу модулі, температуралық ұлғаю коэффициенті, созу диаграммасы, дифференциалдық тендеу, деформация, алгоритм.

Ключевые слова: поля, напряжение, температура, цилиндр, коэффициент Пуассона, модуль сдвига, диаграммы растяжения, дифференциальные уравнения, деформация, алгоритм.

Keywords: fields, tension, temperature, cylinder, coefficient Poisson's, shear modulus, stretching chart, differential equations, deformation, algorithm.

Температуралық өріс әсерінде жұмыс жасайтын цилиндр формалы құрылғылардың кернеулік-деформациялық күйін анықтағанда температуралық кернеуді ескеру қажеттігі туындайды [1-9]. Сондықтан температуралық өрісте орналасқан құрылғыларда пайда болатын термосерпімділік кернеулерді есептеуге мүмкіндік беретін әдістер мен алгоритмдер құру қызығушылық туғызады. Құрылғы қасиеттерінің температураға тәуелділігін эксперимент нәтижесінде алынған қисықтар бойынша ескеретін болса, онда есептің аналитикалық шешімін алуда математикалық қиындықтар кездеседі. Бұл жағдайда, құрылғы материалдар қасиеттерінің температураға тәуелділігін, эксперименттік сандық сипаттамаларын пайдалана отырып, есепті шешудің сандық алгоритмдерін жасау қажеттігі пайда болады. Термосерпімді кернеу тензоры анықтаудың төмендегідей эксперименттік жолдары белгілі. Олар: 1) Дюгамель және Нейман ұқсастығына негізделген әдіс; 2) В. М. Майзель ұсынған әдіс; 3) Н. И. Мухелишвили ұсынған әдіс; 4) Әртүрлі материалдардан дайындалған, қыздырылған және қыздырылмаған денелер арасындағы кернеулерді салыстыру әдісі [4-9]. Құрылғы деформациясы сызықты емес болуы мүмкін. Төменде цилиндр формалы денелердің, физикалық сызықты емес қасиеті ескеріле отырып, кернеулік-деформациялық күйін анықтаудың сандық алгоритмі ұсынылған.

Цилиндрдің ішкі радиусы r_1 және сыртқы радиусы r_2 . Цилиндр осесимметриялық температуралық өрісте орналасқан, яғни $T = T(r)$. Пуассон коэффициенті ν , температуралық ұлғаю коэффициенті α температура деңгейіне тәуелді

$$\nu = \nu(T), \quad \alpha = \alpha(T). \quad (1)$$

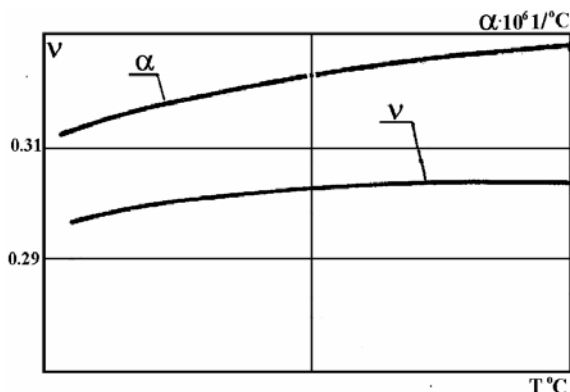
Функциялар (1) эксперимент нәтижесінде анықталады (1-сурет). Жылжу модулі μ , әртүрлі температура мәніне байланысты алынған созу диаграммаларынан $\sigma = f(\varepsilon)$ анықталады (2-сурет) [10].

Тепе-теңдіктің дифференциалдық тендеуі [1]

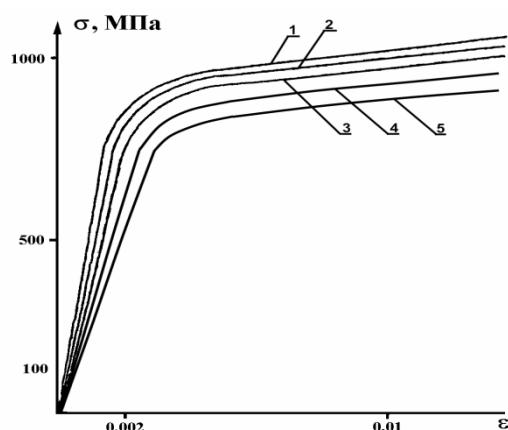
$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (2)$$

Мұнда σ_r – кернеу тензорының радиальдық құраушысы, σ_φ – кернеу тензорының дөңгелектік құраушысы.

Деформация тензорының құраушылары және радиальдық орын ауыстыру құраушысы u , төмендегіше байланысқан:



1-сурет



2-сурет

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} \quad (3)$$

Кернеу девиатор құраушылары $\sigma_r - \sigma_{op}, \sigma_\varphi - \sigma_{op}, \sigma_z - \sigma_{op}$ деформация девиаторы құраушылары $\varepsilon_r - \varepsilon_{op}, \varepsilon_\varphi - \varepsilon_{op}, \varepsilon_z - \varepsilon_{op}$ төмендегіше байланысқан [1]:

$$\sigma_r - \sigma_{op} = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_{op}) \quad \sigma_\varphi - \sigma_{op} = 2\mu(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_{op}) \quad \sigma_z - \sigma_{op} = 2\mu(\varepsilon_z - \varepsilon_{op}) \quad (4)$$

Мұнда $\varepsilon_{op} = \frac{\sigma_{op}}{K} + \alpha T$, $K = \frac{E_c}{1-2\nu}$, E_c – кюшы серпімділік модулі, $\sigma_{op} = (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)/3$.

Келесі өлшемсіз параметрлер енгізілген:

$$\bar{r} = \frac{r}{r_2}, \quad u_1 = \frac{u}{r_2}, \quad u_2 = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_r, \quad \bar{\sigma}_\varphi = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_\varphi, \quad \sigma_z = \frac{1-\nu}{2\mu} \sigma_z, \quad (5)$$

Мұнда жылжу модулі μ^* , Пуассон коэффициенті ν^* мәндері қалыпты температурада анықталған μ, ν мәндеріне сәйкес келеді. Жазуға ыңғайлы болу үшін өлшемсіз шамалар үстіндегі сызықша алып тасталынады.

Тендеулер (1)–(4)-терді

$$\bar{V} = \{u_1, u_2\} = A\bar{V} + \bar{b}T \quad (6)$$

дифференциалдық тендеулер жүйесі және

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_1}{r}, \quad \sigma_\varphi = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 T. \quad (7)$$

алгебралық қатынастарға келтіруге болады. Мұнда A матрицасының және \bar{b} векторының құраушылары және C_k ($k = 1, 2, 3$) коэффициенттері төмендегі теңдіктермен

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{\nu}{(1-\nu)r}, & a_{12} &= \frac{\mu^*(1-2\nu)}{\mu_1(1-\nu)*(1-\nu)}, & a_{21} &= \frac{\mu_1}{(1-\nu)r^2}, & a_{22} &= -\frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)r}, \\ b_1 &= \frac{a(1+\nu)}{(1-\nu)}, & b_2 &= -\frac{\mu_1(1+\nu)\alpha}{(1-\nu)r}, \\ c_1 &= \frac{\mu_1}{(1-\nu)r}, & c_2 &= \frac{\nu}{(1-\nu)}, & c_3 &= -\frac{\alpha(1+\nu)\mu_1}{(1-\nu)}, \\ \sigma_z &= \nu(u_2 + \sigma_\varphi) - \mu_1(1+\nu)\alpha T, & \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

жазық деформация жағдайында, ал

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{\nu}{r}, & a_{12} &= -\frac{(1-\nu)}{\mu_1}, & a_{21} &= \frac{\mu_1(1+\nu)}{r^2}, & a_{22} &= -\frac{\mu(1-\nu)}{r}, \\
b_1 &= (1+\nu)\alpha, & b_2 &= \frac{\mu_1(1+\nu)\alpha}{r} \\
c_1 &= \frac{\mu_1(1-\nu)}{r}, & c_2 &= \nu, & c_3 &= -\frac{(1+\nu)}{\mu_1} \\
\sigma_z &= 0, & \varepsilon_z &= -\frac{\nu(u_2 + \sigma_\varphi)}{(1+\nu)\mu_1} + \alpha T
\end{aligned} \tag{9}$$

жазық кернеу күйінде анықталады. Мұнда $\mu_1 = \frac{(1+\nu)\mu}{\mu^*}$.

Сонда, полярлық-осесимметриялық күйде орналасқан термосерпімді цилиндр формалы дене-лердің кернеулік-деформациялық күй есебін шешу үшін айнымалы коэффициентті дифференциал-дық теңдеулер жүйесі (6) алынды.

Цилиндрдің ішкі $r^* = \frac{r_1}{r_2}$ және сыртқы $r = 1$ беттерінде әртүрлі шекаралық шарттар беріледі.

Мүмкін болатын барлық шекаралық шарттарды

$$\bar{\sigma} \bar{u}(r^*) = p, \quad \bar{\beta} \bar{u}(1) = q \tag{10}$$

түрінде жазуға болады. Мұнда вектор \bar{u} құраушылары-радиальдық орын ауыстыру және кернеу.

Егер (10)-да $\bar{\sigma} = \{0, 1\}$, $\bar{\beta} = \{1, 0\}$, $p = q = 0$ болса, онда цилиндрдің ішкі беті $r^* = \frac{r_1}{r_2}$ кернеуден

бос, ал сыртқы беті қатты бекітілген шекаралық шарттарды көрсетеді. Есеп шартына сәйкес $\bar{\sigma}, \bar{\beta}$ векторларының құраушылары және p мен q параметрлерінің мәндері анықталып беріледі.

Сонымен, цилиндрдің термосерпімділік есебін шешу, (10) шекаралық шарттарды қанағаттан-дыратын, (6) айнымалы коэффициентті дифференциалдық теңдеулер жүйесін, яғни шеттік есепті шешуге алып келеді. Енді осы шеттік есепті шешу алгоритмін қарастырайық.

Алынған дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі, екі сызықтық-тәуелсіз шешімдердің суперпозициясы түрінде анықталады. Цилиндр қалыңдығы өзара тең n кесінділерге бөлінеді. Сонда $r_1 \leq \rho_k < \rho_{k+1} \leq r_2$, мұнда $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Әрбір кесінді ұштарындағы температура мәні ескеріле отырып, температура кесіндіде сызықтық түрде орналасқан деп есептелінеді. Әртүрлі температура деңгейіне сәйкес берілген $\sigma = f(\varepsilon)$ созу диаграммаларынан, анықталған температура деңгейіне сәйкес $\sigma \sim \varepsilon$ қисығы тұрғызылады. Осы процесс төмендегіше жүргізіледі. Т темпера-турасының деңгейіне сәйкес, эксперименталды T_1 және T_2 температураларына сәйкес салынған созу диаграммалары анықталынады. Мұнда $T_1 \leq T \leq T_2$ шарты орындалуы тиіс. Сызықтық аппроксимациялау

$$\sigma = \sigma_2 + [(\sigma_1 - \sigma_2)(T_1 - T_2)] / (T_1 - T_2) \tag{11}$$

арқылы ε тұрақты мәні үшін, Т температурасына сәйкес келетін σ кернеудің мәні табылады.

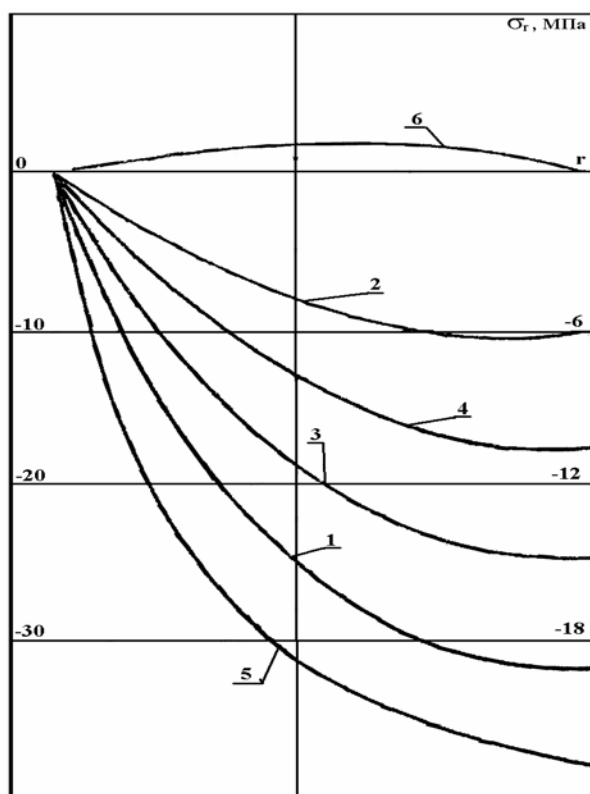
Осындай амалдар жүргізу нәтижесінде Т температурасының деңгейіне сәйкес келетін $\sigma \sim \varepsilon$ диаграммасы алынады. Осы созу диаграммасынан жылжу модулі μ_c анықталады, ал $\nu = \nu(T)$, $\alpha = \alpha(T)$ экспериментальды сызықтардан, Т температура деңгейіне сәйкес Пуассон коэффициенті мен температуралық ұлғаю коэффициенттері анықталады. Табылған μ, ν және α коэффициент-терінің көмегімен, А матрицасының, \bar{b} векторының құраушылары және C_k ($k = 1, 2, 3$) коэффи-циенттері анықталады. Нәтижесінде (6) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің, (7) алгебралық қатынастардың коэффициенттері тұрақты мәндер қабылдайды. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі Рунге-Кутта әдісімен шешіледі [11]. Мұнда цилиндрдің ішкі бетінде екі сызықтық тәуелсіз

шарттар үшін дифференциалдық теңдеулер жүйесі екі рет сандық әдіспен шешіледі. Нәтижесінде екі сызықтық-тәуелсіз шешім \bar{V}_1, \bar{V}_2 алынады. Сонда теңдеулер жүйесінің жалпы шешімі $\bar{V} = C_1 \bar{V}_1 + C_2 \bar{V}_2$ түрінде алынады. Мұндағы C_1 мен C_2 тұрақтылары шекаралық шарттардан анықталады. Анықталған кернеулік-деформациялық күй, $\mu_c = \mu_c(T)$ жылжу модуліне сәйкес есептелінеді. Ал $\mu_c(T)$ модулі, T температурасына сәйкес тұрғызылған $\sigma = f(\varepsilon)$ қисығынан табылған. Цилиндр материалын сипаттайтын сызықтар: Суретте 1-сызық – 20°C, 2-сызық – 2000°C, 3-сызық – 3000°C, 4-сызық – 4000°C, 5-сызық – 5000°C температуралары деңгейлеріне сәйкес эксперимент нәтижесінде алынған. Есептеу нәтижесінде алынған кернеу мен деформация тензорларының құраушыларын ескере отырып

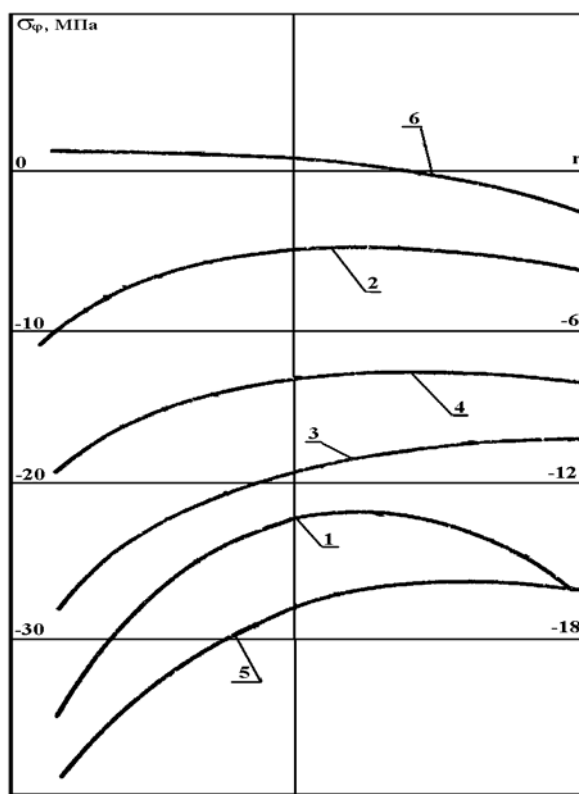
$$\sigma_i = \sqrt{2[(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2]} / 2$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{2[(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2]} / 2$$

есептелінеді. Мұнда σ_i – кернеу интенсивтілігі, ε_i – деформация интенсивтілігі. Мына $\sigma_i = \sigma_r$, $\varepsilon_i = 2(1 + \nu)/3$ қатынастарын пайдаланып $\sigma = f(\varepsilon)$ қисығынан σ_i^* сәйкес келетін ε_i^* табылады. Табылған σ_i^* есептеу нәтижесінде алынған σ_i^e кернеу интенсивтілігімен салыстырылады. Егер ол мәндер өзара сәйкес келетін болса, онда серпімділіктің айнымалы параметрлер әдісі бойынша, шешім алынды деп есептелінеді [12]. Егер олар өзара сәйкес келмесе, онда жаңа параметр $E = \sigma_i^* / \varepsilon_i^*$ есептелініп, жаңа жылжу модулі $\mu = E / 2(1 + \nu)$ тауып есеп қайтадан шешіледі. Бұл кезеңде созу диаграммасы, Пуассон коэффициенті ν және сызықтық ұлғаю коэффициенті α , ағымдық температура деңгейіне сәйкес болуы тиіс. Есептеу нәтижесінде алынған σ_i^e және эксперименттік түрде алынған σ_i^* мәндері сәйкестенгенше, есептеу алгоритмі циклдық түрде орындалады.



3-сурет



4-сурет

Есеп жазық деформация және жазық кернеулік күй жағдайлары үшін шешілген. Есепті шешуде төмендегідей жағдайлар қарастырылды: 1) Цилиндр материалының қасиеті температура деңгейіне тәуелді емес. Бұл жағдайда алынған қисықтар 1 арқылы белгіленді; 2) Тек қана жылжу модулі температураға тәуелді деп есептегенде алынған қисықтар 2 арқылы белгіленді; 3) Жылжу модулі және Пуассон коэффициенті температура деңгейіне тәуелді деп есептегенде алынған қисықтар 3 арқылы белгіленді; 4) Жылжу модулі және сызықтық ұлғаю коэффициенті температура деңгейіне тәуелді деп есептегенде алынған қисықтар 4 арқылы белгіленді; 5) Жылжу модулі, Пуассон және сызықтық ұлғаю коэффициенттері температура деңгейіне тәуелді десек, жылжу модулі $\sigma = f(\varepsilon)$ созу диаграммасынан, ал Пуассон және сызықтық ұлғаю коэффициенттері $\nu = \nu(T)$, $\alpha = \alpha(T)$, эксперименталды тұрғызылған қисықтардан анықталады. Бұл жағдайда алынған сызықтар 5 арқылы белгіленген.

Цилиндр қалыңдығындағы радиалдық кернеу компоненттерінің өзгеруі және сақиналық кернеу компоненттерінің өзгеруі 3, 4-суреттерде көрсетілген. Алынған сандық нәтижелерді талдасақ, жылжу модулінің деформациялық күйге әсері аз, ал кернеулік күйге әсерінің үлкен екендігі көрініп тұр. Әр типтегі шекаралық шарттар және қасиеттері температураға тәуелді әртүрлі материалдар үшін де, құрылған алгоритмді пайдалана отырып талдау жұмыстарын жүргізуге болады. Құрылған сандық-аналитикалық әдіс физикалық сызықты емес, заңдылыққа бағынатын термосерпімді цилиндрлік денелердегі цилиндр қалыңдығы бойынша температура кез келген заңдылықпен орналасқан жағдайда, кернеулік-деформациялық күйді бағалауға, талдауға және нәтижелер бойынша ұсыныстар жасауға мүмкіндік береді.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Макаров Б.В. Основы математической теории упругости. – М.: МГОУ, 2007. – 240 с.
- 2 Бородаев Н.М. О задачах термоупругости в напряжениях // Прикладная механика. – 2005. – Вып. 41, № 3. – С. 46-54.
- 3 Прокопенко Ю.А. Математическое моделирование термически нагруженных двухслойных цилиндров // Вестник ТГТУ. – 2009. – 15, №4. – С. 806-813.
- 4 Рассказов А.О., Бабков А.В., Ивченко Ю.В. Термоупругое равновесие бесконечного многослойного цилиндра со свойствами зависящими от температуры // «Композиционные материалы в конструкции глубоководных технических средств». Тезисы докл. межвузов. науч.-техн. конференции. – Николаев, 1991. – С. 114-115.
- 5 Thermoelastic problems of multilayered cylinders / Birman Victor / intersoc. conf. Therm. Phenomena Electron. Syst. Las. Vegas, Wen. May 23-25. 1990, 1 – IHERM H: Proc 7 - New-York, 1990. – С. 33-39
- 6 Литвинов А.Н. Термоупругие напряжения в круглых многослойных упругих элементах // Новые промышленные технологии. – 2000. – № 5. – С. 39-44.
- 7 Мусабаев Т.Т., Каримов Т.К. О влиянии коэффициента Пуассона на напряжение в неоднородном цилиндре // Стр. механика и расчет сооружений. – 2010. – № 6. – С. 20-21.
- 8 Нестеренко А.Ф., Васильев Е.А. Напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых толстостенных труб и оценка их длительной прочности // Вестник Гос. техн. ун-та. – 2008. – № 19. – С. 59-63.
- 9 Огарков В.Б., Мильцин А.Н. Термопрочность полого упругого цилиндра // «Математическое моделирование, компьютерная оптимизация технологии, параметров оборудования и систем управления» Межвузов. сб. науч. тр. – Вып. 14. – Воронеж: ВорГТЛИА, 2009. – С. 45-47.
- 10 Композиционные материалы. Справочник / Под. ред. В. В. Василова и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
- 11 Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
- 12 Ильющин А.А., Огибалов П.М. Упругопластические деформации полых цилиндров. – М.: МГУ, 1960. – 230 с.

REFERENCES

- 1 Makarov B.V. Osnovy matematicheskoy teorii uprugosti. – M.: MGOU, 2007. – 240 s.
- 2 Borodaev N.M. O zadachah termouprugosti v naprjzhenijah // Prikladnaja mehanika. – 2005. – Vyp. 41, № 3. – S. 46-54.
- 3 Prokopenko Ju.A. Matematicheskoe modelirovanie termicheski nagruzhennyh dvuhslojnyh cilindrov // Vestnik TGTU. – 2009. – 15, №4. – S. 806-813.
- 4 Rasskazov A.O., Babkov A.V., Ivchenko Ju.V. Termouprugoe ravnovesie beskonechnogo mnogoslajnogogo cilindra so svojstvami zavisimymi ot temperatury // «Kompozicionnye materialy v konstrukcijah glubokovodnyh tehniceskikh sredstv». Tezisy dokl. mezhvuzov. nauch.-tehn. konferencii. – Nikolaev, 1991. – S. 114-115.
- 5 Thermoelastic problems of multilayered cylinders / Birman Victor / intersoc. conf. Therm. Phenomena Electron. Syst. Las. Vegas, Wen. May 23-25. 1990, 1 – IHERM H: Proc 7 - New-York, 1990. – S. 33-39
- 6 Litvinov A.N. Termouprugie naprjzhenija v kruglyh mnogoslajnyh uprugih jelementah // Novye promyshlennye tehnologii. – 2000. – № 5. – S. 39-44.
- 7 Musabaev T.T., Karimov T.K. O vlijanii kojefficienta Puassona na naprjzhenie v neodnorodnom cilindre // Str. mehanika i raschet sooruzhenij. – 2010. – № 6. – S. 20-21.

8 Nesterenko A.F., Vasil'ev E.A. Naprjazhenno-deformirovannoe sostojanie neravnomerno nagretyh tolstostennyh trub i ocenka ih dlitel'noj prochnosti // Vestnik Gos. tehn. un-ta. – 2008. – № 19. – S. 59-63.

9 Ogarkov V.B., Mil'cin A.N. Termoprochnost' pologo uprugogo cilindra // «Matematicheskoe modelirovanie, komp'juternaja optimizacija tehnologij, parametrov oborudovanija i sistem upravlenija» Mezhvuzov. sb. nauch. tr. – Вып. 14. – Voronezh: VorGTLA, 2009. – S. 45-47.

10 Kompozicionnye materialy. Spravochnik / Pod. red. V. V. Vasilova i dr. – M.: Mashinostroenie, 1990. – 512 s.

11 Bahvalov N.S. Chislennye metody. – M.: Nauka, 1973. – 631 s.

12 Il'jushin A.A. Ogibalov P.M. Uprugoplasticheskie deformacii polyh cilindrov. – M.: MGU, 1960. – 230 s.

Резюме

М. Ж. Жумабаев, Г.С. Тилесова

(Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Республика Казахстан)

ЗАДАЧА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ТЕЛА СО СВОЙСТВАМИ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Разработан алгоритм определения температурных напряжений в осесимметрических конструкциях, установленных в температурном поле. С помощью алгоритма определяется напряженно-деформированное состояние, возникающее при изменениях физических свойств по нелинейному закону. При этом модуль сдвига определяется из диаграммы растяжения при различных уровнях температуры, а коэффициент Пуассона и температурного расширения из графиков, построенных по результатам эксперимента. Задача решена для случаев плоской деформации и плоского напряженного состояния. Полученные численные результаты представлены в виде графиков и проанализированы.

Ключевые слова: поля, напряжение, температура, цилиндр, коэффициент Пуассона, модуль сдвига, диаграммы растяжения, дифференциальные уравнения, деформация, алгоритм.

Summary

M. Zh. Zhumabayev, G. S. Tilessova

(International Kazakh-Turkish University named by Kh. A. Yassavi, Turkestan, Republic of Kazakhstan)

THE PROBLEM OF ASYMMETRIC INTENSITY OF A CYLINDRICAL BODY WITH PROPERTIES DEPENDING ON TEMPERATURE

The algorithm of determination of axisymmetric thermal stresses in the structures established in the temperature field. Using the algorithm condition arising on changes of the physical properties of a nonlinear law. The shear modulus is determined from the chart, stretching across different levels of temperature and thermal expansion coefficient of Poisson and graphs based on the result of the experiment. The problem is solved for the case of flat deformation and stress state of flat. Numerical results of tained are presented in the form of sharts and analysed.

Keywords: fields, tension, temperature, cylinder, coefficient Puasson's, shear modulus, stretching chart, differential equations, deformation, algorithm.

Поступила 25.06.2013 г.

В. Н. ЛИСИЦЫН, Ю. Ж. ТУЛЕУШЕВ, А. Б. АСАНОВ

(Институт ядерной физики, Алматы, Республика Казахстан)

УЛЬТРАТОНКАЯ ФОЛЬГА ИЗ БЕРИЛЛИЯ

Аннотация

Описаны условия формирования ультратонкой бериллиевой фольги магнетронным осаждением бериллия на подложку из стали, которую затем растворяют, оставляя свободную фольгу. Прочность и газопроницаемость такой фольги сильно зависят от стабильности разряда в магнетронном распылителе. Поэтому разработан источник питания с возможностью надежного ограничения тока магнетрона в случае, когда нарушается стабильность разряда.

Источник питания магнетрона изготовлен по схеме тиристорного широтно-импульсного регулятора мощности. Формирователь импульсов управления содержит детектор нуля сети с накопительным конденсатором и пороговым элементом. Выпрямитель для питания нагрузки непосредственно от сети выполнен по схеме удвоения напряжения. К выпрямителю добавлена секция утроения напряжения, которая дополнительно стабилизирует разряд в магнетроне.

Разработанный бестрансформаторный источник питания показал свою эффективность при формировании однородных тонкопленочных материалов и позволил изготовить прочные и герметичные бериллиевые окна толщиной от 8 до 12 мкм и диаметром от 5 до 7 мм для мягкого рентгеновского излучения.

Ключевые слова: бериллиевое окно, газопроницаемость, прочность, магнетронный распылитель, регулятор мощности, ограничитель тока.

Кілт сөздер: бериллийлік терезе, газөткізгіштілік, беріктік, магнетронды тозандатқыш, қуатты реттегіш, ток шектегіш.

Keywords: beryllium window, gas permeability, strength, magnetron sputtering gun, power regulator, current limiter.

Бериллиевую фольгу толщиной до 50 мкм получают методами пластической обработки металлов, которые при дальнейшем уменьшении толщины фольги оказываются неэффективными [1]. Представляет интерес формирование ультратонкой бериллиевой фольги ионно-плазменным методом посредством увеличения толщины осаждаемого тонкопленочного покрытия из бериллия. Предпочтительным является использование метода магнетронного осаждения, который обеспечивает высокую производительность, поддерживает в покрытиях высокую химическую чистоту распыляемого материала, а также удобен в управлении параметрами процесса [2].

Уменьшение толщины бериллиевой фольги повышает требования к устойчивости и равномерности процесса распыления бериллия в плазме низкого давления. Установлено, что срыв в дугу разряда в магнетроне повреждает не только поверхность мишени, но также нарушает однородность фольги, приводит к появлению на ней локальных микрповреждений структуры, которые уменьшают прочность фольги и увеличивают ее газопроницаемость. Очевидно, что для получения ультратонкой фольги из хрупкого металла, каким является бериллий, необходимо максимально ограничить ток разряда в магнетроне в случае его перехода в дуговой разряд. Такую возможность предоставляет бестрансформаторное питание магнетронного распылителя постоянного тока (МР) от сети переменного тока [3], в котором, однако, необходимо повысить устойчивость формирования импульсов управления, а также усилить функцию ограничения тока в нагрузке. Для этой цели разработан специальный источник питания МР.

Источник питания МР изготовлен по бестрансформаторной схеме тиристорного широтно-импульсного регулятора мощности, включенного в сеть переменного тока напряжением 220 В. Формирователь импульсов управления оптосимистором содержит детектор нуля сети с накопительным конденсатором и пороговым элементом, который открывает ключ, пропускающий импульсы управления на оптосимистор. Выпрямитель для питания МР непосредственно от сети выполнен по схеме удвоения напряжения, к которой добавлены элементы по схеме утроения напряжения. Дополнительная секция поддерживает слабый ток повышенного напряжения для устойчивости разряда в МР в момент его включения, а также при пониженном давлении газа в

вакуумной камере. Источник питания МР при возможности резкого нарастания тока ограничивает его среднюю величину и создает токовую паузу, которая защищает формируемую фольгу от повреждений.

Схема источника питания МР приведена на рисунке 1. Формирователь импульсов управления оптосимистором выполнен на транзисторах T_1 , T_2 , пороговом элементе M_1 и питается от понижающего (до $12\text{ В} \times 2$) сетевого трансформатора Tr . Наличие средней точки во вторичной обмотке трансформатора Tr позволяет выделить импульсы сети частотой 100 Гц для синхронизации частоты напряжения, которое генерирует детектор нуля сети, выполненный на транзисторе T_1 . Накопительный конденсатор C_5 детектора нуля сети заряжается стабилизированным стабилизатором D_9 напряжением и разряжается через транзистор T_1 в моменты его открывания.

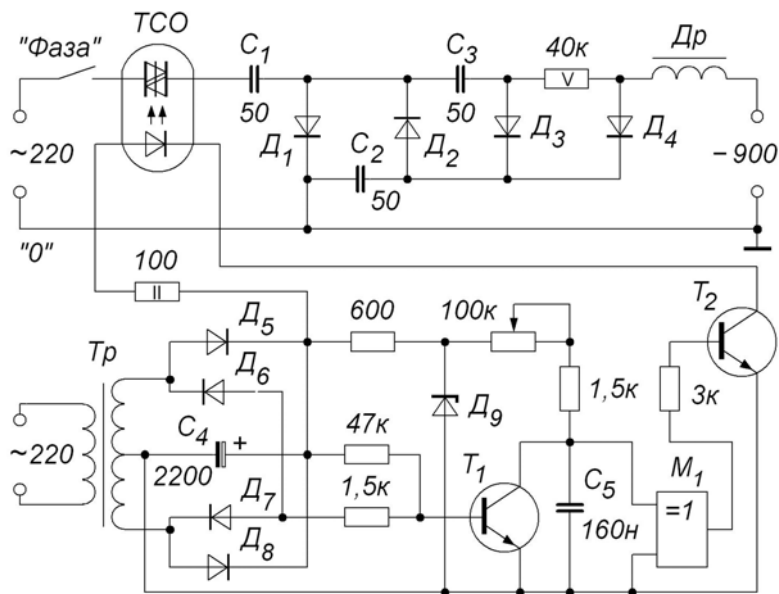


Рисунок 1 – Принципиальная схема источника питания МР.
 TCO – ТСО142-40-12; $D_1 \div D_4$ – КД202Д; $D_5 \div D_8$ – КД226; D_9 – Д814Г; T_1 – КТ315Б; T_2 – КТ815;
 M_1 – К561ЛП2; $C_1 \div C_3$ – К75-17-1000 В; Tr – 12 В \times 2; Dr – 1УБИ-40/220-В

Отрицательные импульсы сети частотой 100 Гц через делитель поступают на базу транзистора T_1 и закрывают его, при этом конденсатор C_5 заряжается. При переходе сетевого напряжения через нуль транзистор T_1 открывается на короткое время. Через открытый транзистор T_1 конденсатор C_5 быстро разряжается. Нарастание величины отрицательного импульса сети закрывает транзистор T_1 и конденсатор C_5 заряжается.

При увеличении напряжения на конденсаторе C_5 до величины переключения ($\approx 6\text{ В}$) срабатывает пороговый элемент M_1 , в качестве которого использован логический элемент «исключающее ИЛИ». Сигнал с выхода M_1 поступает на базу транзистора T_2 , который открывается и пропускает импульс, отпирающий оптосимистор TCO . В момент перехода сетевого напряжения через нуль TCO закрывается. Время зарядки конденсатора C_5 стабилизированным напряжением задает длительность импульсов управления оптосимистором и среднее значение тока в нагрузке. Переменным резистором регулируют величину времени зарядки C_5 и момент отпирания оптосимистора.

Оптосимистор TCO включен непосредственно в сеть переменного тока напряжением 220 В с заземленной нейтралью. Напряжение с него подано на выпрямитель, выполненный по схеме удвоения напряжения на диодах D_1 и D_2 . Конденсаторы C_1 и C_2 являются промежуточными накопителями энергии соответственно в положительном и отрицательном полупериодах напряжения сети, а также ограничителями тока, потребляемого из сети. Пульсации тока в нагрузке дополнительно ограничивает дроссель Dr , в качестве которого использован дроссель пускорегулирующего аппарата от сетевой газоразрядной лампы. К схеме удвоения через разделительный диод D_4 добавлена секция выпрямителя D_3 – C_3 , которая утраивает сетевое напряжение. Добавочное напряжение этой секции с балластным резистором поддерживает слабый ток повышенного напряжения в

МР, который обеспечивает устойчивость разряда, но практически не увеличивает мощность разряда в МР.

Наиболее важным достоинством источника питания является его способность ограничивать среднее значение тока в нагрузке и подавлять дуговой разряд в магнетроне. Ток дуги при ограниченной мощности, потребляемой из сети, быстро разряжает накопительные конденсаторы C_1 и C_2 до напряжения, которое ниже напряжения разряда в МР. Заряд конденсаторов C_1 и C_2 происходит в течение следующего периода переменного напряжения сети, образуемая при этом токовая пауза длительностью не менее 20 мс надежно гасит дугу. Ограничение среднего значения тока дугового разряда в МР совместно с токовой паузой при заряде накопительных конденсаторов не допускают снижения качества формируемой фольги ограниченными по мощности и кратковременными дуговыми разрядами в МР.

Разработанный источник питания МР по бестрансформаторной схеме является самостоятельным устройством, несложен в изготовлении, удобен в эксплуатации. Он позволил надежно ограничить ток, установленный в МР, и защитить формируемую фольгу от повреждений дуговыми разрядами. Это существенно повысило однородность и прочность тонкопленочных материалов и дало возможность изготовить герметичные ультратонкие бериллиевые окна для детекторов мягкого рентгеновского излучения.

Бериллиевые окна толщиной 8, 10 и 12 мкм для мягкого рентгеновского излучения были изготовлены в два этапа. На первом этапе получили бериллиевые покрытия соответствующей толщины, осажденные магнетронным способом на полированные подложки из стали ст.3. У этого материала и у бериллия близкие коэффициенты термического расширения в интервале температуры от 20 до 200°C. В этом интервале изменяется температура подложки в процессе осаждения на нее бериллия, поэтому термические напряжения в бериллиевой фольге сведены к минимуму. На втором этапе подложку полностью растворяют в азотной кислоте, а свободную бериллиевую фольгу промывают в дистиллированной воде и обсушивают.

Для испытания фольги на герметичность были приготовлены 3 образца бериллиевой фольги толщиной 8, 10 и 12 мкм для рентгеновских окон с диаметрами соответственно 5, 6 и 7 мм. Толщина фольги определена тремя методиками: из взвешивания образца, с использованием микрометрического индикатора 2 МИГ с ценой деления 2 мкм, а также по измерению поперечного сечения сломанной фольги на его изображении, которое получено на электронном микроскопе. Образцы фольги закрепили клеем в специально изготовленных держателях, как показано на рисунке 2. В основании держателей фольг предварительно были проточки с диаметрами, соответствующими диаметрам окон. При откачивании воздуха из-под фольги к ней прикладывалась внешняя нагрузка от перепада давления воздуха на фольгу с двух сторон.

Было установлено, что при быстром нарастании перепада атмосферного давления со скоростью 0,3 Па/с ультратонкая бериллиевая фольга разрушается под воздействием резкого смещения фольги от начального броска давления. Медленное нарастание атмосферного давления на фольгу со скоростью 3 мПа/с все образцы фольги выдержали без разрушения. Закрытый фольгой вакуумный объем был откачан до остаточного давления 0,1 мПа и проверен на газопроницаемость с использованием гелиевого течеискателя ТИ1-14. Проверка показала отсутствие натекания и высокую герметичность рентгеновских окон из ультратонкой фольги.

Разработанный источник питания по бестрансформаторной схеме на примере изготовления ультратонкой бериллиевой фольги показал свою эффективность при формировании однородных тонкопленочных материалов. С его использованием приготовлены образцы бериллиевой фольги толщиной от 8 мкм до 12 мкм. Достигнутая прочность и герметичность бериллиевой фольги позволяет использовать ее в качестве окон диаметром от 5 до 7 мм для мягкого рентгеновского излучения. Все окна из ультратонкой бериллиевой фольги выдерживают нагрузку атмосферным давлением при медленном откачивании вакуумного объема.

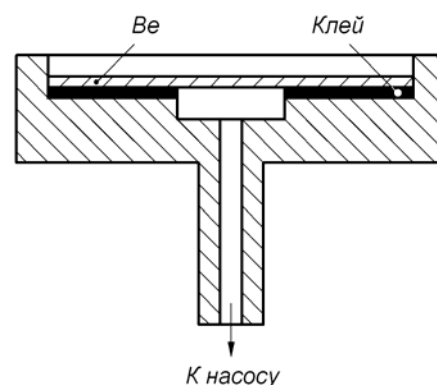


Рисунок 2 – Схема закрепления ультратонкой бериллиевой фольги на держателе

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Тихинский, Г.Ф. Волокита Г.И. Фольги из бериллия для приборов и физических экспериментов // ПТЭ. – 1994. – № 5. – С. 191-195.
- 2 Данилин Б.С. Применение низкотемпературной плазмы для нанесения тонких пленок. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 328 с.
- 3 Кузьмичёв А.И. Бестрансформаторное и импульсно-модулированное питание магнетронных распылителей от сети переменного тока // ПТЭ. – 1997. – № 6. – С. 121-124.

REFERENCES

- 1 Tihinskij, G.F. Volokita G.I. *Pribory i tehnika jeksperimenta*, **1994**, 5, 191-195 (in Russ.).
- 2 Danilin B.S. *Primenenie nizkotemperaturnoj plazmy dlja nanesenija tonkih plenok*. M, Jenergoatomizdat, **1989**, 328 p. (in Russ.).
- 3 Kuz'michjov A.I. *Pribory i tehnika jeksperimenta*, **1997**, 6, 121-124 (in Russ.).

Резюме

В. Н. Лисицын, Ю. Ж. Тулеушев, А. Б. Асанов

(Ядролық физика институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

БЕРИЛЛИЙДЕН ЖАСАЛҒАН УЛЬТРАЖҰҚА ФОЛЬГА

Болаттан жасалған төсеніште бериллийді магнетрондық тұндырумен ультражұқа бериллийлік фольганың қалыптасу шарты сипатталды, оны еркін фольганы қалдыра отырып, сонан соң ерітеді. Мұндай фольганың беріктігі және газөткізгіштілігі магнетрондық тозандатқыштағы разрядтың тұрақтылығынан өте тәуелді болады. Сондықтан разрядтың тұрақтылығы бұзылған жағдайда магнетронның тоғын сенімді шектеу мүмкіндігі бар қоректендіру көзі жасалды.

Магнетронның қоректендіру көзі қуатты тиристорлық енді-импульстік реттегіш сұлбасы бойынша жасалған. Басқару импульстерін құрастырғышында жинақтағыш конденсаторы және табалдырықтық элементі бар желінің нөл детекторы болады. Тікелей желіден жүктемені қоректенуге арналған түзеткіш кернеуді екі еселеу сұлбасы бойынша орындалған. Түзеткішке кернеуді үш еселеу секциясы қосылған, ол магнетронда қосымша разрядты тұрақтандырады.

Трансформаторсыз жасалған қоректендіру көзі біртекті жұқапленкалы материалдарды қалыптастыруда өзінің тиімділігін көрсетті және қалыңдығы 8-бен 12 мкм аралығындағы және мм диаметрі 5-пен 7 мм аралығындағы берік және герметикалық бериллийлік рентген терезелерін даярлауға мүмкіндік берді.

Кілт сөздер: бериллийлік терезе, газөткізгіштілік, беріктік, магнетронды тозандатқыш, қуатты реттегіш, ток шектегіш.

Summary

V. N. Lisitsyn, Yu. Zh. Tuleushev, A. B. Asanov

(Institute of Nuclear Physics, Almaty, Republic of Kazakhstan)

ULTRATHIN BERYLLIUM FOIL

The conditions are described for formation of ultra-thin beryllium foil by magnetron beryllium deposition on a steel substrate, which is further dissolved, leaving a loose foil. Strength and gas permeability of this foil strongly depend on stability of the discharge in the magnetron sputtering gun. Therefore, the power supply unit is designed to provide reliable magnetron current limitation in case of disturbance of discharge stability.

The power unit of the magnetron is designed according to the scheme of thyristor PWM power regulator. The control pulse shaper contains the network null detector with the reservoir capacity and the threshold element. The rectifier of load power supply directly from the network is configured according to voltage doubling circuit. The section of voltage tripling is added to the rectifier, which additionally stabilizes the discharge in the magnetron.

The designed no-transformer power supply unit has shown its effectiveness in formation of homogeneous thin film material and allowed us to produce strong and hermetic beryllium X-ray windows 8-12 mkm thick and 5-7 mm in diameter.

Keywords: beryllium window, gas permeability, strength, magnetron sputtering gun, power regulator, current limiter.

Поступила 07.07.2013 г.

А. Е. МИРЗАКУЛОВА, М. Қ. ДАУЫЛБАЕВ

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУГЕ АРНАЛҒАН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ

Аннотация

Бұл жұмыста екі үлкен туындысының алдында кіші параметрі бар үшінші ретті сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды-дифференциалдық тендеу үшін қосымша сипаттаушы тендеудің түбірлерінің таңбасы әртүрлі болған жағдайда екінүктелі шекаралық есеп қарастырылған. Осы сингулярлы ауытқыған шекаралық есепке сәйкес өзгертілген ауытқымаған есеп құрылды. Осы ауытқымаған есептің шешімі алынды. Сингулярлы ауытқыған шекаралық есеп шешімі мен өзгертілген ауытқымаған есеп шешімінің арасындағы айырым бағаланды. Интегралдық мүшенің бастапқы секірісінің шамасы табылды. Берілген сингулярлы ауытқыған шекаралық есеп шешімінің өзгертілген ауытқымаған шекаралық есеп шешіміне ұмтылатыны дәлелденді.

Кілт сөздер: сингулярлы ауытқы, кіші параметр, бастапқы секіріс, асимптотика.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, малый параметр, начальный скачок, асимптотика.

Keywords: singular indignation, small parameter, initial jump, asymptotica.

Сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды-дифференциалдық

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A_0(t)y'' + A_1(t)y' + A_2(t)y = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t,x)y^{(i)}(x,\varepsilon)dx \quad (1)$$

тендеуін келесі шекаралық шарттармен қарастырайық:

$$h_1 y(t, \varepsilon) \equiv y(0, \varepsilon) = \alpha, \quad h_2 y(t, \varepsilon) \equiv y'(0, \varepsilon) = \beta, \quad h_3 y(t, \varepsilon) \equiv y(1, \varepsilon) = \gamma, \quad (2)$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, ал α, β, γ – белгілі тұрақты шамалар. Дифференциалдық тендеулер үшін мұндай шекаралық есеп* жұмысында қарастырылған еді.

Келесі шарттар орындалсын:

I. $A_i(t), i = 0, 2, F(t)$ функциялары $0 \leq t \leq 1$ аралығында, ал $H_0(t, x), H_1(t, x)$ функциялары $D = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ облысында үзіліссіз дифференциалданады.

II. $A_1(t) \neq 0, 0 \leq t \leq 1$.

III. $\mu^2 + A_0(t)\mu + A_1(t) = 0$ тендеуінің түбірлері $\mu_1(t) < -\gamma_1 < 0, \mu_2(t) > \gamma_2 > 0$ теңсіздіктерін қанағаттандырсын.

IV. 1 саны

$$H(t, s) = \int_s^1 \frac{1}{A_1(p)} \left(H_0(t, x) - H_1(t, x) \frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) \exp \left(- \int_s^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)} dp \right) dx + \frac{H_1(t, s)}{A_1(s)}$$

өзегінің меншікті мәні болмасын.

$$V. \delta \equiv 1 + \int_0^1 \frac{H_1(s, 1)}{A_1(s)} e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx} ds \neq 0,$$

мұндағы $\overline{H_1}(s, 1) = H_1(s, 1) + \int_0^1 R(s, p)H_1(p, 1)dp$, ал $R(t, s) - H(t, s)$ өзегінің резольвентасы.

* Касымов К.А., Жакипбекова Д.А., Нургабыл Д.Н. Представление решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения с малым параметром при старших производных // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Сер. мат., мех., инф. – 2001. – № 3. – С. 73-78.

(1), (2) шекаралық есеп шешімі үшін келесі асимптотикалық бағалаудың орындалатындығы белгілі:

$$\begin{aligned} |y^{(i)}(t, \varepsilon)| \leq & C(|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0 \leq t \leq 1} |H_1(t, 1)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)|) + \frac{C}{\varepsilon^{i-1}} e^{-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}} (|\alpha| + |\beta| + \\ & + |\gamma| \max_{0 \leq t \leq 1} |H_1(t, 1)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)|) + \frac{C}{\varepsilon^i} e^{-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}} (|\alpha| + \varepsilon|\beta| + |\gamma| \max_{0 \leq t \leq 1} |H_1(t, 1)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)|), \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

мұндағы $C > 0$ – ε -нан тәуелсіз тұрақты.

Берілген сингулярлы ауытқыған (1), (2) шекаралық есепке келесі ауытқымаған есепті сәйкес қояйық:

$$L_0 \bar{y} \equiv A_1(t) \bar{y}' + A_2(t) \bar{y} = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t, x) \bar{y}^{(i)}(x) dx + \Delta(t), \quad (4)$$

$$\bar{y}(0) = \alpha, \quad \bar{y}(1) = \gamma + \Delta_1, \quad (5)$$

мұндағы $\Delta(t)$, Δ_1 – әзірге белгісіз интегралдық мүшенің және шешімнің бастапқы секірістері. Белгісіз $\Delta(t)$ функциясын табу үшін сингулярлы ауытқыған (1), (2) есептің $y(t, \varepsilon)$ шешімі мен (4),

(5) ауытқымаған есептің $\bar{y}(t)$ шешімінің айырымы $u(t, \varepsilon)$ үшін келесі түрдегі есепті аламыз:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 u''' + \varepsilon A_0(t) u'' + A_1(t) u' + A_2(t) u = \int_0^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t, x) u^{(i)}(x, \varepsilon) dx - \Delta(t) - \varepsilon^2 \bar{y}''' - \varepsilon A_0(t) \bar{y}'', \quad (6)$$

$$u(0, \varepsilon) = 0, \quad u'(0, \varepsilon) = \beta - \bar{y}'(0) \neq 0, \quad u(1, \varepsilon) = -\Delta_1. \quad (7)$$

(6) теңдеудегі $\int_0^1 H_1(t, x) u'(x, \varepsilon) dx$ интегралдық мүшесін бөліктеп интегралдап, (7) шартын ескерсек, нәтижесінде келесі теңдеу аламыз:

$$L_\varepsilon u = \int_0^1 (H_0(t, x) - H'_{1x}(t, x)) dx - (\Delta(t) + H_1(t, 1) \Delta_1) - \varepsilon^2 \bar{y}''' - \varepsilon A_0(t) \bar{y}'' \quad (8)$$

(8), (7) есептің түрі (1), (2) есептің түріндей болғандықтан оған (3) асимптотикалық бағалауын қолданып,

$$\begin{aligned} |u(t, \varepsilon)| \leq & C\varepsilon|\beta| + C|\Delta(t) + H_1(t, 1)\Delta_1| + C\varepsilon + C\varepsilon \exp\left(-\gamma_1 \frac{t}{\varepsilon}\right) (|\beta| + \varepsilon + |\Delta(t) + H_1(t, 1)\Delta_1|) + \\ & + C \exp\left(-\gamma_2 \frac{1-t}{\varepsilon}\right) (\varepsilon|\beta| + |\Delta(t) + H_1(t, 1)\Delta_1| + \varepsilon) \end{aligned}$$

бағалауын аламыз. Енді белгісіз $\Delta(t)$ функциясын $\varepsilon \rightarrow 0$ болғанда (8), (7) есебінің $u(t, \varepsilon)$ шешімі нөлге ұмтылатындай етіп таңдаймыз, яғни

$$\Delta(t) = -H_1(t, 1)\Delta_1 \quad (9)$$

теңдігі орындалғанда (1), (2) есептің шешімінің (4), (5) ауытқымаған есептің шешіміне ұмтылатынын аламыз. Сонымен, интегралдық мүшенің $\Delta(t)$ бастапқы секірісі (9) теңдікпен анықталғанда (1), (2) есеп шешімінің келесі ауытқымаған есептің шешіміне ұмтылатыны шығады:

$$L_0 \bar{y} \equiv A_1(t) \bar{y}' + A_2(t) \bar{y} = F(t) + \int_0^1 \sum_{i=0}^1 H_i(t, x) \bar{y}^{(i)}(x) dx - H_1(t, 1)\Delta_1, \quad (10)$$

$$\bar{y}(0) = \alpha, \quad \bar{y}(1) = \gamma + \Delta_1 \quad (11)$$

Енді шешімнің Δ_1 бастапқы секірісін табайық. Ол үшін (10) теңдеуін алдымен

$$\bar{y}(0) = \alpha \quad (12)$$

шартымен қарастырамыз. (10), (12) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз:

$$\bar{y}(t) = \alpha \exp\left(-\int_0^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx\right) + \int_0^t \frac{z(s)}{A_1(s)} \exp\left(-\int_s^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx\right) ds, \quad (13)$$

мұндағы белгісіз $z(t)$ функциясы үшін келесі Фредгольдтік екінші типті интегралдық теңдеуге келеміз:

$$z(t) = \varphi(t) + \int_0^1 H(t,s)z(s)ds, \quad (14)$$

мұндағы

$$\varphi(t) = F(t) - H_1(t,1)\Delta_1 + \alpha \int_0^1 \left(H_0(t,x) - H_1(t,x) \frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) \exp\left(-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)} dp\right) dx \quad (15)$$

Онда IV шарттың күшімен (14) интегралдық теңдеудің шешімі бар, жалғыз болады және келесі түрде өрнектеледі

$$z(t) = \bar{\varphi}(t) + \int_0^1 R(t,s)\bar{\varphi}(s)ds, \quad (16)$$

мұндағы $R(t,s) - H(t,s)$ өзегінің резолвентасы, ал $\bar{\varphi}(t)$ функциясы (15) формуласымен анықталады. (16) формуламен өрнектелген $z(t)$ функциясын (13) формулаға қойып, (15) белгілеулерді ескерсек, (10), (12) есебінің шешімі үшін келесі формуланы аламыз:

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) = & \alpha e^{-\int_0^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx} + \int_0^t \frac{1}{A_1(s)} e^{-\int_s^t \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx} \left[\bar{F}(s) - \bar{H}_1(s,1)\Delta_1 + \right. \\ & \left. + \alpha \int_0^1 \left(\bar{H}_0(s,x) - \bar{H}_1(s,x) \frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) e^{-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)} dp} dx \right] ds \end{aligned} \quad (17)$$

мұндағы

$$\bar{F}(s) = F(s) + \int_0^1 R(s,p)F(p)dp, \quad \bar{H}_i(s,x) = H_i(s,x) + \int_0^1 R(s,p)H_i(p,x)dp, \quad i = 0,1.$$

Шешімнің Δ_1 бастапқы секірісін анықтау үшін (17) формуламен анықталған $\bar{y}(t)$ функциясын (11) шекаралық шарттардың екіншісіне бағындырамыз:

$$\begin{aligned} \gamma + \Delta_1 = & \alpha e^{-\int_0^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx} + \int_0^1 \frac{1}{A_1(s)} e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx} \left[\bar{F}(s) - \bar{H}_1(s,1)\Delta_1 + \right. \\ & \left. + \alpha \int_0^1 \left(\bar{H}_0(s,x) - \bar{H}_1(s,x) \frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) e^{-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)} dp} dx \right] ds \end{aligned}$$

Бұдан V шарттың көмегімен шешімнің Δ_1 бастапқы секірісін анықтаймыз:

$$\begin{aligned} \Delta_1 = & \frac{1}{\delta} \left[\int_0^1 \frac{\bar{F}(s)}{A_1(s)} e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx} ds - \gamma + \right. \\ & \left. + \alpha \left(e^{-\int_0^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx} - \int_0^1 \frac{1}{A_1(s)} e^{-\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx} \int_0^1 \left(\bar{H}_0(s,x) - \bar{H}_1(s,x) \frac{A_2(x)}{A_1(x)} \right) e^{-\int_0^x \frac{A_2(p)}{A_1(p)} dp} dx ds \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Сонымен, келесі шектік көшу туралы теорема дұрыс болады.

Теорема. Егер I-V шарттар орындалса, онда (1), (2) шекаралық есебінің шешімі $y(t, \varepsilon)$ үшін келесі шектік теңдіктер орындалады:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y'(t, \varepsilon) = \bar{y}'(t), \quad 0 < t < 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y''(t, \varepsilon) = \bar{y}''(t), \quad 0 < t < 1,$$

мұндағы $\bar{y}(t)$ функциясы (10), (11) есебінің шешімі және ол (17) формуламен, ал Δ_1 бастапқы секірісі (18) формуламен өрнектеледі.

REFERENCES

Kasymov K.A., Zhakipbekova D.A., Nurgabyl D.N. Predstavlenie reshenija kraevoj zadachi dlja linejnogo differencial'nogo uravnenija s malym parametroм pri starshih proizvodnyh // Vestnik KazNU im. al'-Farabi. Ser. mat., meh., inf. – 2001. – № 3. – S. 73-78.

Резюме

А. Е. Мирзакулова, М. Қ. Дауылбаев

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В данной работе рассмотрена двухточечная краевая задача для сингулярно возмущенного линейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка с малым параметром при двух старших производных, имеющие корни разного знака характеристического уравнения. Построена измененная невозмущенная краевая задача. Найдено решение невозмущенной задачи. Получена оценка разности решений возмущенной и измененной невозмущенной краевых задач. Определена величина начального скачка интегрального члена. Доказана сходимость решения сингулярно возмущенной краевой задачи к решению измененной невозмущенной краевой задачи.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, малый параметр, начальный скачок, асимптотика.

Summary

A. E. Myrzakulova, M. K. Dauylbaev

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

ASYMPTOTIC CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

The work deals with the singularly perturbed boundary value problem for third order linear integro-differential equation with a small parameter in the highest derivatives, provided that the roots of additional distinctive equation have opposite signs. It was built a unperturbed boundary value problem. We find the solution of the unperturbed problem. An estimate difference of the solutions of the perturbed and unperturbed modified boundary value problems. Determined by the value of the initial jump of the integral term. The convergence of solutions of singularly perturbed boundary value problem to the solution of the modified perturbed boundary value problem.

Keywords: singular indignation, small parameter, initial jump, asymptotica.

Поступила 15.05.2013 г.

Н. ИЛЕСКЕНҚЫЗЫ, Б. Е. КАНГУЖИН

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ЛОКАЛЬДЫ ЕМЕС ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТЫ ЕКІ ЕСЕЛІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ ГРИН ФУНКЦИЯСЫ**Аннотация**

Жұмыста $L_2[0, \pi]$ кеңістігінде екі еселі дифференциалды теңдеу мен локальды емес шекаралық шарттардан туындайтын L_σ операторы қарастырылады. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ойылған аралығында L_σ операторының Грин функциясының айқын формуласы жазылды.

Кілт сөздер: Грин функциясы, локальды емес шекаралық шарт.

Ключевые слова: функция Грина, нелокальные краевые условия.

Keywords: Green's function, not local regional conditions.

$L_2[0, \pi]$ кеңістігінде екінші ретгі оператордың локальды емес шекаралық есебінің Грин функциясын [1] қарастырамыз.

L_σ операторын келесі есепке сәйкестендіріп аламыз:

$$-y''(x) = \lambda y(x) + f(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi. \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \int_0^\pi (-y''(x)) \overline{\sigma(x)} dx,$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y'\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) + \alpha y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right), \quad y(\pi) = 0 \quad (2)$$

мұндағы $\sigma(x) \in L_2[0, \pi]$, $f(x) \in L_2[0, \pi]$, α – кез келген сан.

Лемма. (1)-теңдеудің дербес шешімі келесі түрде анықталады:

$$y(x) = \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt, \quad (3)$$

Дәлелдеу. (3)-формулань пайдаланып, $y'(x)$ және $y''(x)$ табайық.

$$y'(x) = -\int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(t-x) f(t) dt, \quad (4)$$

$$y''(x) = -\int_0^x \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(t-x) f(t) dt - f(x), \quad (5)$$

(5)-формулань оң жағына $\sqrt{\lambda}$ көбейтіп бөлу арқылы келесі өрнекті аламыз:

$$-y''(x) = \int_0^x \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(t-x) f(t) dt + f(x) = \lambda \left(\int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt \right) + f(x) = \lambda y(x) + f(x).$$

Лемма дәлелденді.

Теорема. Кез келген $f(x) \in L_2[0, \pi]$ үшін (1),(2)-есептің шешімі бар (жалғыз) және келесі түрде болады:

$$y(x, \lambda) = \begin{cases} \int_0^{\pi} G_1(x, t, \lambda) f(t) dt, & \text{егер } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 \\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} G_2(x, t, \lambda) f(t) dt, & \text{егер } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ 0 \end{cases} \quad (6)$$

мұндағы интегралдық оператордың өзектері $G_1(x, t, \lambda)$, $G_2(x, t, \lambda)$ сәйкесінше $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ аралығындағы L_{σ} операторының Грин функциясын анықтайды және

$$G_1(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} (E_1(t, \lambda) + E_2(t, \lambda)), & \text{егер } t \in (0, x), \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} (E_1(t, \lambda) + E_2(t, \lambda)), & \text{егер } t \in \left(x, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} (E_1(t, \lambda) + E_3(t, \lambda)), & \text{егер } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \end{cases} \quad (7)$$

$$G_2(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}} (F_1(t, \lambda) + F_2(t, \lambda)), & \text{егер } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} (F_1(t, \lambda) + F_3(t, \lambda)), & \text{егер } t \in \left(\frac{\pi}{2}, x\right), \\ -\frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} (F_1(t, \lambda) + F_3(t, \lambda)), & \text{егер } t \in (x, \pi), \end{cases} \quad (8)$$

түрінде өрнектеледі, мұндағы

$$E_1(t, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi-t)}{\sqrt{\lambda}} - \overline{\sigma(t)} \cos \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \sqrt{\lambda}(\pi-\xi) \overline{\sigma(\xi)} d\xi,$$

$$E_2(t, \lambda) = \alpha \sin \sqrt{\lambda} \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \sqrt{\lambda}(\pi-\xi) \overline{\sigma(\xi)} d\xi + \frac{\sin \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\lambda} \right) - \sqrt{\lambda} \cos \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \sqrt{\lambda}(t-\xi) \overline{\sigma(\xi)} d\xi,$$

$$E_3(t, \lambda) = \sqrt{\lambda} \cos \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \sqrt{\lambda}(t-\xi) \overline{\sigma(\xi)} d\xi,$$

$$F_1(t, \lambda) = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \left(t - \frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{\lambda}\xi \cdot \overline{\sigma(\xi)} d\xi + \left(\cos \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \sin \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} \right) \overline{\sigma(t)} +$$

$$+ \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\alpha}{\lambda} \sin \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} \cdot \sin \sqrt{\lambda} \left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}
 F_2(t, \lambda) &= \alpha \sin \sqrt{\lambda} \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{\lambda} \xi \cdot \overline{\sigma(\xi)} d\xi + \frac{\sin \sqrt{\lambda} \pi}{\lambda} \right) + \sqrt{\lambda} \cos \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sin(t - \xi) \overline{\sigma(\xi)} d\xi - \\
 &\quad - \alpha \sin \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{\lambda} (t - \xi) \overline{\sigma(\xi)} d\xi, \\
 F_3(t, \lambda) &= \alpha \sin \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin \sqrt{\lambda} (t - \xi) \overline{\sigma(\xi)} d\xi - \sqrt{\lambda} \cos \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin \sqrt{\lambda} (t - \xi) \cdot \overline{\sigma(\xi)} d\xi. \quad (9) \\
 \Delta(\lambda) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda} \cos \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{\lambda} x \cdot \overline{\sigma(x)} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \sqrt{\lambda} (\pi - x) \cdot \overline{\sigma(x)} dx \right) + \\
 &\quad + \alpha \sin \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\pi - x) \overline{\sigma(x)} dx - \frac{\alpha}{\lambda} \sin^2 \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Дәлелдеу. Кез келген $f(x) \in L_2[0, \pi]$ функциясы үшін (1),(2)-есептің шешімін келесі түрде қарастырамыз:

$$y(x, \lambda) = \begin{cases} \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt + c_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + c_2 \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, & \text{егер } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ -\int_x^{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt + D_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (\pi-x)}{\sqrt{\lambda}} + D_2 \frac{\cos \sqrt{\lambda} (\pi-x)}{\sqrt{\lambda}}, & \text{егер } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases} \quad (10)$$

(10)-формулану $y(0) = 0$ және $y(\pi) = 0$ шекаралық шарттарына апарып қойсақ, онда $c_2 = 0$ және $D_2 = 0$ болады да, (10)-формула келесі түрде болады:

$$y(x, \lambda) = \begin{cases} \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt + c_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, & \text{егер } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ -\int_x^{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt + D_1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} (\pi-x)}{\sqrt{\lambda}}, & \text{егер } \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases} \quad (11)$$

Келесі өрнекті (11)-формуласын пайдаланып есептейік:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\pi} (-y''(x)) \overline{\sigma(x)} dx = \lambda \int_0^{\pi} y(x) \overline{\sigma(x)} dx + \int_0^{\pi} f(x) \overline{\sigma(x)} dx = \\
 &= \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-x)}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma(x)} f(t) dt dx + \lambda c_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma(x)} dx - \\
 &- \lambda \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-x)}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma(x)} f(t) dt dx + \lambda D_1 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (\pi-x)}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma(x)} dx + \int_0^{\pi} f(x) \overline{\sigma(x)} dx. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Енді (11), (12)-формуларды қалған екі шекаралық шартқа қойсақ:

$$c_1 \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2}}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{\lambda} x \cdot \overline{\sigma(x)} dx \right) + D_1 \left(\sqrt{\lambda} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \sqrt{\lambda} (\pi - x) \overline{\sigma(x)} dx - \frac{\sin \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2}}{\sqrt{\lambda}} \right) = A(\lambda), \quad (13)$$

$$c_1 \left(\cos \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} - \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \sin \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \right) + D_1 \cos \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} = B(\lambda), \quad (14)$$

мұндағы

$$A(\lambda) = \lambda \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) \overline{\sigma(x)} dt dx - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} (t-x)}{\sqrt{\lambda}} \overline{\sigma(x)} f(t) dt dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \left(t - \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{\lambda}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \left(t - \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt - \int_0^{\pi} f(t) \overline{\sigma(t)} dt. \quad (15)$$

$$B(\lambda) = \int_0^{\pi} \cos \sqrt{\lambda} \left(t - \frac{\pi}{2} \right) f(t) dt + \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \left(t - \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt. \quad (16)$$

(13), (14)-өрнектегі c_1 , D_1 тұрақты шамаларын табу үшін Крамер әдісін пайдаланып, келесі өрнекті аламыз:

$$c_1 = \frac{A(\lambda) \cos \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} - B(\lambda) \left(\sqrt{\lambda} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \sqrt{\lambda} (\pi - x) \overline{\sigma(x)} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \right)}{\Delta(\lambda)}, \quad (17)$$

$$D_1 = \frac{B(\lambda) \left(\sqrt{\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{\lambda} x \cdot \overline{\sigma(x)} dx + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \right) + A(\lambda) \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}} \sin \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} - \cos \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \right)}{\Delta(\lambda)}, \quad (18)$$

мұндағы

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda} \cos \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{\lambda} x \cdot \overline{\sigma(x)} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \sqrt{\lambda} (\pi - x) \cdot \overline{\sigma(x)} dx \right) + \alpha \sin \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\pi - x) \cdot \overline{\sigma(x)} dx - \frac{\alpha}{\lambda} \sin^2 \frac{\sqrt{\lambda} \pi}{2}.$$

Енді осы (17), (18)-формуларды (11)-формулаға апарып қойсақ:

$$y(x, \lambda) = \begin{cases} \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt + \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} \left(A(\lambda) \cos \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} + B(\lambda) \left(\frac{\sin \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \sqrt{\lambda}(\pi-x)\overline{\sigma}(x) dx \right) \right) & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\int_x^{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} \left(B(\lambda) \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \sqrt{\lambda}x\overline{\sigma}(x) dx + \frac{\sin \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}} \right) + A(\lambda) \left(\frac{\alpha \sin \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2}}{\sqrt{\lambda}} - \cos \frac{\sqrt{\lambda}\pi}{2} \right) \right) & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

болады. $y_1(x, \lambda)$ деп шешімнің $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ аралығындағы мәнін, ал $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ аралығындағы мәнін $y_2(x, \lambda)$ деп белгілеу енгізейік. Сонымен қатар (15), (16)-формуларын ескере отырып, екі еселі интегралдарды түрлендіру нәтижесінде төмендегі өрнектерді аламыз:

$$y_1(x, \lambda) = \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt + \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} E_1(t, \lambda) f(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} E_2(t, \lambda) f(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} E_3(t, \lambda) f(t) dt \right), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad (19)$$

$$y_2(x, \lambda) = -\int_x^{\pi} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1(t, \lambda) f(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_2(t, \lambda) f(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} F_3(t, \lambda) f(t) dt \right), \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi, \quad (20)$$

мұндағы $E_i(t, \lambda)$, $i = \overline{1,3}$, $F_j(t, \lambda)$, $j = \overline{1,3}$ функциялары (9)-формуламен анықталады.

Демек, (18)-формуланы пайдаланып, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ аралығындағы Грин функциясы:

$$G_1(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} (E_1(t, \lambda) + E_2(t, \lambda)), & \text{егер } t \in (0, x), \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} (E_1(t, \lambda) + E_2(t, \lambda)), & \text{егер } t \in \left(x, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} (E_1(t, \lambda) + E_3(t, \lambda)), & \text{егер } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \end{cases}$$

болады. Ал (19)-формуладан $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ аралығындағы Грин функциясы:

$$G_2(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}} (F_1(t, \lambda) + F_2(t, \lambda)), & \text{егер } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} (F_1(t, \lambda) + F_3(t, \lambda)), & \text{егер } t \in \left(\frac{\pi}{2}, x\right), \\ -\frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-x)}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi-x)}{\sqrt{\lambda}\Delta(\lambda)} (F_1(t, \lambda) + F_3(t, \lambda)), & \text{егер } t \in (x, \pi), \end{cases}$$

болады. Бұдан (6)-формулань аламыз. Енді кері жорып шешімді екеу деп, екінші шешімді $y^*(x)$ түрде алып, екі шешімнің айырмасын қарастырайық:

$$u(x) = y(x) - y^*(x),$$

$$l[y(x)] = f(x), \quad l[y^*(x)] = f(x),$$

белгілі. Онда келесі теңдіктер орынды:

$$L[u(x)] = L[y(x)] - L[y^*(x)] = 0, \tag{21}$$

$$u(0) = y(0) - y^*(0) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - y^*\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 0,$$

$$u'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = y'\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - y'^*\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 0, \quad u(\pi) = y(\pi) - y^*(\pi) = 0, \tag{22}$$

(22) біртекті теңдеуінің біртекті шарттарын қанағаттандыратын нөлдік қана шешімі болады

$$u(x) = \begin{cases} \int_0^{\pi} G_1(x, t, \lambda) \cdot 0 dt = 0, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^{\pi} G_2(x, t, \lambda) \cdot 0 dt = 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases}$$

бұдан $u(x) = y(x) - y^*(x) = 0$, демек, $y(x) = y^*(x)$.

Теорема дәлелденді.

ӘДЕБИЕТ

1 Melnikov Y.A., Melnikov M.Y. Green's functions construction and applications. De Gruyter Studies in Mathematics 42, Carsten Carstensen, Berlin, Germany, 2011. – 425 p.

2 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

REFERENCES

1 Melnikov Y.A., Melnikov M.Y. Green's functions construction and applications. De Gruyter Studies in Mathematics 42, Carsten Carstensen, Berlin, Germany, 2011. – 425 p.

2 Naimark M.A. Lineinye differentsial'nye operatory. – M.: Nauka, 1969. – 528 с.

Резюме

Н. Илескенкызы, Б. Е. Кангужин

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

ФУНКЦИЯ ГРИНА ОПЕРАТОРА ДВУХКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В этой работе в пространстве $L_2[0, \pi]$ рассматривается оператор L_σ , который порождается через двукратное дифференциальное уравнение и с нелокальными краевыми условиями. В проколоте отрезке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ выписан в явном виде формула функции Грина для оператора L_σ .

Ключевые слова: функция Грина, нелокальные краевые условия.

Summary

N. Ileskenkyzy, B. E. Kanguzhin

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

GREEN'S FUNCTION OF THE TWO-FOLD DIFFERENTIATION OPERATOR
WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

In this paper, in the space of $L_2[0, \pi]$ is considered the operator L_σ , which is generated through a two-fold differential equation with nonlocal boundary conditions. In the punctured segment $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ issued an explicit formula for the Green function of the operator L_σ .

Keywords: Green's function, not local regional conditions.

Поступила 15.05.2013 г.

УДК 519.633.6:532.546

A. C. АЖИБЕКОВА

(Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Республика Казахстан)

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА
УПРУГОЕМКОСТИ НЕФТЯНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ

Аннотация

В работе рассматривается математическая модель нестационарной фильтрации нефти к скважине в круговом резервуаре. Для определения коэффициента упругоёмкости пласта решается обратная коэффициентная задача. Предложен вычислительный алгоритм расчета коэффициента упругоёмкости пласта. Доказана ограниченность приближенного значения коэффициента упругоёмкости пласта и монотонность минимизируемого функционала.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, фильтрация, итерационный метод.

Кілт сөздер: коэффициенттік кері есеп, сүзілу, итерациялық әдіс.

Keywords: coefficient inverse problem, filtration, iterative method.

Из существующих гидродинамических методов наиболее точными являются методы определения фильтрационных параметров пластов и скважин по наблюдениям неустановившихся режимов их работы и взаимодействия [1]. Методы исследования пластов и скважин, основанные на изучении неустановившихся процессов изменения забойного давления в скважинах связаны с теорией упругого режима добычи нефти. Значительный вклад в развитие этих методов внесли М. Маскет, Г. И. Баренблатт, К. С. Басниев, И. А. Чарный, В. Н. Щелкачев и др. Разработка и обоснование математических моделей физических процессов тесно связана с решением обратных задач для дифференциальных уравнений. Обратные задачи математической физики часто оказываются в классическом смысле поставленными некорректно. С этой особенностью обратных задач связаны основные трудности построения эффективных вычислительных алгоритмов. В этой работе рассматривается задача нестационарной фильтрации нефти к скважине в круговом резервуаре [2-4]. Чтобы определить фильтрационные параметры, в частности, коэффициента упругоёмкости пласта, решаем обратную коэффициентную задачу минимизации функционала невязки между наблюдаемыми и расчетными значениями давления [5].

В этой работе рассматривается задача нестационарной фильтрации нефти к скважине в круговом резервуаре. Чтобы определить фильтрационные параметры, в частности, коэффициента упругоэластичности пласта, решаем обратную коэффициентную задачу минимизации функционала невязки между наблюдаемыми и расчетными значениями давления [1].

1. Нестационарная фильтрация нефти к скважине в круговом резервуаре [3] описывается дифференциальным уравнением:

$$\beta \frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rk}{\mu} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} \right), \quad r_c < r < R, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_c} = \frac{q(t)}{2\pi H r_c}, \quad P(R,t) = P_K, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

и начальным условием:

$$P(r,0) = P_0(r), \quad r_c < r < R. \quad (3)$$

где $P = P(r,t)$ давление, $q(t)$ дебит скважины, k проницаемость пласта, H толщина пласта, β коэффициент упругоэластичности, μ вязкость нефти, P_K пластовое давление, T время эксперимента, $P_0(r)$ начальное распределение давления в пласте, r_c и R радиусы скважины и пласта, соответственно.

Задача (1)–(3) решается методом конечных разностей [6]. В дискретной области: $Q_N^m = \{r_i = r_c + i \cdot \Delta r, t_j = j \cdot \Delta t, i = 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, \dots, m\}$ строится неявная конечная разностная схема, аппроксимирующая задачу (1)–(3):

$$\beta \frac{Y_i^{j+1} - Y_i^j}{\Delta t} = \frac{1}{r_i} \frac{k}{\mu} \frac{r_i Y_{i\bar{r}}^{j+1} - r_{i-1} Y_{i\bar{r}}^{j+1}}{\Delta r}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1; \quad (4)$$

$$2\pi H \frac{k}{\mu} r_c Y_{1\bar{r}}^{j+1} = q^{j+1}, \quad Y_N^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1; \quad (5)$$

$$Y_i^0 = P_0(r_i) - P_K, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (6)$$

Для определения коэффициента упругоэластичности β дополнительно известно изменение забойного давления: $P_z(t_j), j = 0, 1, \dots, m$.

Строится итерационная последовательность для минимизации функционала:

$$J(\beta) = \sum_{j=0}^{m-1} (Y_0^{j+1} - P_z^{j+1})^2 \Delta t, \quad (7)$$

где Y_0^{j+1} расчетные значения забойного давления, P_z^{j+1} наблюдаемые значения забойного давления.

Задается начальное значение упругоэластичности β_n ($n = 0$). Следующее значение β_{n+1} определяется из монотонности функционала (7). То есть β_{n+1} подбирается так, чтобы имело место неравенство $J(\beta_{n+1}) < J(\beta_n)$.

Из этого условия выводится итерационная формула расчета β_{n+1} .

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \frac{\gamma_n}{\beta} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^N \frac{k r_{i-1}}{\mu} Y_{i\bar{r}}^{j+1} U_{i\bar{r}}^j \Delta r \Delta t + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{q^{j+1}}{2\pi H} U_0^j \Delta t \right). \quad (8)$$

2. Априорные оценки для решения прямой задачи. Введем обозначения:

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} (f_i)^2 \Delta r, \quad \|f\|^2 = \sum_{i=1}^N (f_i)^2 \Delta r.$$

Из уравнения (4) после некоторых преобразований получаем:

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^m r_i \beta Y_{i\bar{r}}^{j+1} Y_i^{j+1} \Delta t \Delta r = 2 \sum_{j=0}^m \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{k r_i}{\mu} Y_{i\bar{r}}^{j+1} \right)_{\bar{r}} Y_i^{j+1} \Delta t \Delta r.$$

Применяя формулу суммирования по частям к полученному уравнению и учитывая граничные условия (5), получим неравенство:

$$\beta \left\| \sqrt{r} Y^{j+1} \right\|^2 + 2 \frac{k}{\mu} \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \leq \beta \left\| \sqrt{r} Y^0 \right\|^2 - \sum_{j=0}^j A^{j+1} Y_0^{j+1} \Delta t.$$

Здесь $A^{j+1} = \frac{q^{j+1}}{\pi H}$.

Применяя неравенство Коши, выводим:

$$\beta \left\| \sqrt{r} Y^{j+1} \right\|^2 + 2 \frac{k}{\mu} \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \leq \beta \left\| \sqrt{r} Y^0 \right\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{R}{r_c} \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{j=0}^j (A^{j+1})^2 \Delta t.$$

Пусть $\frac{k}{\mu} = \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{R}{r_c}$. Тогда

$$\beta \left\| \sqrt{r} Y^{j+1} \right\|^2 + \frac{k}{\mu} \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \leq \beta \left\| \sqrt{r} Y^0 \right\|^2 + \frac{\mu}{4k} \ln \frac{R}{r_c} \sum_{j=0}^j (A^{j+1})^2 \Delta t \leq c_1 (1 + \beta),$$

где $c_1 = \max \left\{ \left\| \sqrt{r} Y^0 \right\|^2, \frac{\mu}{4k} \ln \frac{R}{r_c} \sum_{j=0}^j (A^{j+1})^2 \Delta t \right\}$.

Лемма 1. Пусть $P_0(r) \in L_2(r_c, R)$, $q(t) \in L_2(0, T)$. Тогда для решения задачи (4)–(6) имеют место оценки:

$$\max_j \left\| \sqrt{r} Y^{j+1} \right\|^2 \beta + \frac{k}{\mu} \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \leq c_1 (1 + \beta), \quad \sum_{j=0}^j (Y_0^{j+1})^2 \Delta t \leq c_2 (1 + \beta),$$

где $c_2 = c_1 \frac{\mu}{k} \ln \frac{R}{r_c}$.

3. Априорные оценки для решения сопряженной задачи. Сопряженная задача прямой разностной задачи имеет следующий вид:

$$\beta U_{i\bar{r}}^{j+1} + \frac{1}{r_i} \left(\frac{k r_i}{\mu} U_{i\bar{r}}^j \right)_{\bar{r}} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = m-1, m-2, \dots, 0; \quad (9)$$

$$\frac{k r_0}{\mu} U_{1\bar{r}}^j = 2(Y_0^{j+1} - P_z^{j+1}), \quad U_N^j = 0, \quad j = m-1, m-2, \dots, 0; \quad (10)$$

$$U_i^m = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (11)$$

Преобразуя (9) и применяя к полученному уравнению формулы суммирования по частям и учитывая граничное условие (10), получим неравенство:

$$\beta \left\| \sqrt{r} U^j \right\|^2 + 2 \frac{k}{\mu} \sum_{j=j}^{m-1} \left\| \sqrt{r} U_{\bar{r}}^j \right\|^2 \Delta t \leq 4 \sum_{j=j}^{m-1} |Y_0^{j+1} - P_z^{j+1}| \left\| U_0^j \right\| \Delta t.$$

Применяя неравенство Коши, выводим:

$$\beta \left\| \sqrt{r} U^j \right\|^2 + 2 \frac{k}{\mu} \sum_{j=j}^{m-1} \left\| \sqrt{r} U_{\bar{r}}^j \right\|^2 \Delta t \leq \frac{2}{\varepsilon} \sum_{j=j}^{m-1} |Y_0^{j+1}|^2 \Delta t + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{j=j}^{m-1} |P_z^{j+1}|^2 \Delta t + 4\varepsilon \sum_{j=j}^{m-1} |U_0^j|^2 \Delta t.$$

Но $\sum_{j=j}^{m-1} |U_0^j|^2 \Delta t \leq \ln \frac{R}{r_c} \sum_{j=j}^{m-1} \sum_{i=1}^N r_i (U_{i\bar{r}}^j)^2 \Delta r \Delta t$. Поэтому после соответствующего подбора ε , получим равенство:

$$\beta \left\| \sqrt{r} U^j \right\|^2 + \frac{k}{\mu} \sum_{j=j}^{m-1} \left\| \sqrt{r} U_{\bar{r}}^j \right\|^2 \Delta t \leq \frac{8\mu}{k} \ln \frac{R}{r_c} \sum_{j=j}^{m-1} (|Y_0^{j+1}|^2 + |P_z^{j+1}|^2) \Delta t.$$

Лемма 2. Пусть $P_0(r) \in L_2(r_c, R)$, $q(t), P_z(t) \in L_2(0, T)$. Тогда для решения задачи (9)–(11) имеют место оценки:

$$\max_j \left\| \sqrt{r} U^j \right\|^2 \beta + \frac{k}{\mu} \sum_{j=j}^{m-1} \left\| \sqrt{r} U_{\bar{r}}^j \right\|^2 \Delta t \leq c_3 (1 + \beta), \quad \sum_{j=j}^{m-1} (U_0^j)^2 \Delta t \leq c_4 (1 + \beta),$$

где
$$2c_3 = \max \left\{ \frac{8\mu}{k} \ln \frac{R}{r_c} c_2, \frac{8\mu}{k} \ln \frac{R}{r_c} \sum_{j=j}^{m-1} (P_z^{j+1})^2 \Delta t \right\}, \quad c_4 = c_3 \frac{\mu}{k} \ln \frac{R}{r_c}.$$

4. Ограниченность коэффициента упругости. Из (8) следует неравенство:

$$|\Delta\beta| \leq \frac{\gamma_n}{\beta} \left(\left(\frac{k}{\mu} \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \sqrt{r} Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{k}{\mu} \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \sqrt{r} U_{i\bar{r}}^j \right\|^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\pi H} \left(\sum_{j=0}^{m-1} (q^{j+1})^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{m-1} (U_0^j)^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Учитывая леммы 1 и 2, выводим:
$$|\Delta\beta| \leq c_5 \frac{\gamma_n (1 + \beta)}{\beta} + c_6 \frac{\gamma_n \sqrt{1 + \beta}}{\beta}.$$

Пусть $\gamma_n = \frac{\bar{\gamma}_n}{n^\alpha} \frac{\beta}{1 + \beta}$. Тогда $|\Delta\beta| \leq c_7 \frac{\bar{\gamma}_n}{n^\alpha}$ или $-c_7 \frac{\bar{\gamma}_n}{n^\alpha} < \beta_{n+1} - \beta_n < c_7 \frac{\bar{\gamma}_n}{n^\alpha}$. Суммируем по n .

Тогда
$$\beta_0 - c_7 \sum_{n=0}^n \frac{\bar{\gamma}_n}{n^\alpha} < \beta_{n+1} < \beta_0 + c_7 \sum_{n=0}^n \frac{\bar{\gamma}_n}{n^\alpha}.$$

Пусть $\alpha > 1$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^n \frac{1}{n^\alpha}$ сходится, и имеем неравенство:
$$\beta_0 - c_8 \bar{\gamma} < \beta_{n+1} < \beta_0 + c_8 \bar{\gamma}.$$

Достаточно малая величина $\bar{\gamma}$ подбирается так, чтобы $\beta_0 - c_8 \bar{\gamma} \geq c_9 > 0$. Тогда $c_8 \bar{\gamma} \leq \beta_0 + c_9$.

Теорема 1. Если $P_0(r) \in L_2(r_c, R)$, $q(t), P_z(t) \in L_2(0, T)$, то имеет место неравенство:

$$0 < c_9 \leq \beta_{n+1} \leq 2\beta_0 + c_9, \quad n = 0, 1, \dots$$

5. Монотонность функционала выводится из соотношения:

$$J(\beta_{n+1}) - J(\beta_n) = -\gamma_n B_n^2 + I_1 + I_2. \quad (12)$$

Здесь
$$B_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{m-1} r_i Y_{i\bar{r}}^{j+1} U_i^j \Delta t \Delta r \right)^2; \quad I_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{m-1} r_i \Delta\beta \Delta Y_{i\bar{r}}^{j+1} U_i^j \Delta t \Delta r; \quad I_2 = \sum_{j=0}^{m-1} (\Delta Y_0^{j+1})^2 \Delta t.$$

Оценим величины I_1 и I_2 .

Для разности $\Delta Y_i^{j+1} = Y_i^{j+1}(n+1) - Y_i^{j+1}(n)$ имеем систему

$$\Delta(\beta Y_{i\bar{r}}^{j+1}) = \frac{1}{r_i} \left(\frac{k r_i}{\mu} \Delta Y_{i\bar{r}}^{j+1} \right)_{\bar{r}}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1; \quad (13)$$

$$2\pi H \frac{k}{\mu} r_c \Delta Y_{1\bar{r}}^{j+1} = 0, \quad \Delta Y_N^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1; \quad (14)$$

$$\Delta Y_i^0 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (15)$$

Умножим скалярно (13) на $2\Delta Y_i^{j+1}$ в дискретной области Q_N^m . Тогда

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^j r_i \Delta(\beta Y_{i\bar{r}}^{j+1}) \Delta Y_i^{j+1} \Delta t \Delta r = 2 \sum_{j=0}^j \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{k r_i}{\mu} \Delta Y_{i\bar{r}}^{j+1} \right)_{\bar{r}} \Delta Y_i^{j+1} \Delta r \Delta t.$$

После некоторых преобразований, учитывая граничные условия (14) и применяя формулу суммирования по частям и ε -неравенство Коши, получим неравенство:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N-1} r_i (\beta + \Delta\beta) (\Delta Y_i^{j+1})^2 \Delta r + \left(2 \frac{k}{\mu} - \varepsilon_1 \ln \frac{R}{r_c} - \varepsilon_2 \right) \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} \Delta Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \leq \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \sum_{j=0}^j \left(\frac{\Delta\beta}{\beta} A^{j+1} \right)^2 \Delta t + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{k^2}{\mu^2} \frac{(\Delta\beta)^2}{\beta^2} \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon_1 \ln \frac{R}{r_c} = \frac{k}{2\mu}$, $\varepsilon_2 = \frac{k}{2\mu}$. Учитывая лемму 1 и теорему 1, выводим, что

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} r_i \beta (\Delta Y_i^{j+1})^2 \Delta r + \frac{k}{\mu} \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} \Delta Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \leq c_{10} (\Delta \beta)^2.$$

В этом случае имеем неравенство $|I_2| = \sum_{j=0}^{m-1} \left| \Delta Y_0^{j+1} \right|^2 \Delta t \leq c_{11} (\Delta \beta)^2$. Здесь c_{13} – константа, зависящая от начальных данных непрерывным образом.

Запишем для системы (4)–(6) новую систему уравнений в виде:

$$\Delta (\beta Y_{ii}^{j+1}) = \frac{1}{r_i} \left(\frac{k r_i}{\mu} \Delta Y_{it}^{j+1} \right)_{\bar{r}}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-2; \quad (16)$$

$$2\pi H r_c \frac{k}{\mu} r_c \Delta Y_{\bar{r}i}^{j+1} = 0, \quad \Delta Y_{Nt}^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-2; \quad (17)$$

$$\Delta Y_{ii}^0 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (18)$$

После некоторых преобразований уравнения (16) получим неравенство:

$$c_1 \left\| \sqrt{r} \Delta Y_t^{j+1} \right\|^2 + 2 \frac{k}{\mu} \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} \Delta Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \leq 2 \sum_{j=0}^j \frac{|\Delta \beta|}{\beta} \left| A_t^{j+1} \right| \left| Y_{0t}^{j+1} \right| \Delta t + 2 \sum_{j=0}^j \frac{|\Delta \beta|}{\beta} \left\| \sqrt{r} Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\| \left\| \sqrt{r} \Delta Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t.$$

Из последнего неравенства следует оценка:

$$\max_j \left\| \sqrt{r} \Delta Y_t^{j+1} \right\|^2 + \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \leq c_{12} (\Delta \beta)^2.$$

Обращаясь к равенству (9) выводим: $|\Delta \beta| \leq c_{13} \gamma_n$.

Лемма 3. Если $P_0(r) \in L_2(r_c, R)$, $q(t) \in W_2^1(0, T)$, $P_z(t) \in L_2(0, T)$, то для решения задачи (5)–(7) имеют место оценки:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left| \Delta Y_0^{j+1} \right|^2 \Delta t + \max_j \left\| \sqrt{r} \Delta Y_t^{j+1} \right\|^2 + \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} \Delta Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \leq c_{14} (\Delta \beta)^2.$$

На основе леммы 3 суммы I_1, I_2 оцениваются:

$$|I_1| \leq |\Delta \beta| \sum_{j=0}^j \left\| \sqrt{r} \Delta Y_{\bar{r}}^{j+1} \right\|^2 \Delta t \leq c_{15} \gamma_n^2; \quad I_2 \leq c_{14} \gamma_n^2.$$

Из (12) следует неравенство: $J(\beta_{n+1}) - J(\beta_n) + \gamma_n (B_n^2 - c_{16} \gamma_n) \leq 0$.

Теорема 2. Если $B_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{m-1} r_i Y_{ii}^{j+1} U_i^j \Delta t \Delta r \right)^2 > 0$, и имеют место леммы 1-3, то, подбирая

функцию γ_n , всегда можно добиться выполнения неравенства $B_n^2 - c_{11} \gamma_n > 0$, что соответствует монотонности функционала. То есть $J(\beta_{n+1}) - J(\beta_n) < 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

ЛИТЕРАТУРА

1 Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г. Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации. – М.; Ижевск, 2006. – 172 с.

2 Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М.: Институт компьютерных исследований, 2004. – 628 с.

3 Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 211 с.

4 Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006. – 488 с.

5 Рысбайулы Б., Ажибекова А.С. Расчет коэффициента вязкости нефти при упругом способе добычи нефти // Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики». – Новосибирск, Россия, 2012, 5–12 августа. – С. 223.

6 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

REFERENCES

1 Khairullin M.Kh., Khisamov R.S., Shamsiev M.N., Farkhullin R.G. Interpretatsiia rezul'tatov gidrodinamicheskikh issledovaniy skvazhin metodami regularizatsii. – M.: Izhevsk, 2006. – 172 s.

2 Masket M. Techenie odnorodnykh zhidkостей v poristoi srede. – M.: Institut komp'iuternykh issledovaniy, 2004. – 628 s.

3 Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. Dvizhenie zhidkостей i gazov v prirodnykh plastakh. – M.: Nedra, 1984. – 211 s.

4 Basniev K.S., Dmitriev N.M., Kanevskaya R.D., Maksimov V.M. Podzemnaia gidromekhanika. M.; Izhevsk: Institut komp'iuternykh issledovaniy, 2006. – 488 s.

5 Rysbauly B., Azhibekova A.S. Raschet koeffitsienta viazkosti nefi pri uprugom sposobe dobychi nefi // Mezhdunarodnaia konferentsiia «Obratnye i nekorrektnye zadachi matematicheskoi fiziki». – Novosibirsk, Rossiia, 2012, 5–12 avgusta. – S. 223.

6 Samarskii A.A., Gulin A.V. Chislennye metody. – M.: Nauka, 1989. – 432 s.

Резюме

Ә. С. Әжібекова

(Қазақстан-Британ техникалық университет, Алматы, Қазақстан Республикасы)

МҰНАЙ КЕН ОРНЫНЫҢ ҚАТАҢДЫЛЫҚ СЫЙЫМДЫЛЫҒЫНЫҢ КОЭФФИЦИЕНТІН ИНТЕГРАЦИЯЛЫҚ ӘДІСПЕН ЕСЕПТЕУ

Осы жұмыста мұнайдың дөңгелек қауыздағы ұңғыға стационар емес сүзілуінің математикалық нұсқасы қарастырылған. Қатаңдылық сыйымдылығының коэффициентін анықтау үшін коэффициенттік кері есеп шешіледі. Қатаңдылық сыйымдылығының коэффициентін есептеуге арналған есептегіш алгоритм ұсынылған. Қатаңдылық сыйымдылығының коэффициентінің шектеулі екендігі, минимизацияланатын функционалдың бірқалыптылығы және итерациялық қатардың жинақтылығы дәлелденген.

Кілт сөздер: коэффициенттік кері есеп, сүзілу, итерациялық әдіс.

Summary

A.S. Azhibekova

(Kazakh-British technical university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

ITERATIVE METHOD OF CALCULATION OF FACTOR ELASTICCAPACITY OF THE OIL DEPOSIT

In this paper the mathematical model of the nonstationary filtration of oil to a well in a circular reservoir is considered. To determine the total reservoir compressibility, we solve the coefficient inverse problem. A computational algorithm to calculate the total reservoir compressibility is proposed. Boundedness of an approximate value of the reservoir compressibility and monotonicity of the minimized functional are proved.

Keywords: coefficient inverse problem, filtration, iterative method.

Поступила 17.05.2013 г.

B. H. AITCHANOV¹, A. B. SATABALDIYEV², A. V. BOGDANCHIKOV², K. N. LATUTA²

¹Kazakh National Technical University after K. I. Satpayev, Almaty, Republic of Kazakhstan)

²Suleyman Demirel University, Kaskelen, Republic of Kazakhstan)

INNOVATIVE APPROACH TO SOCIAL MEDIA IN EDUCATION

Summary

The current paper reviews the usage of social resource such as VKontakte and microlearning technique for educational purposes. The problem is that students in Kazakhstan spend a lot of time in social networks, therefore, the lack of motivation drives to critical results on their academic performance. In order to solve this problem, the research was applied on CSS 216 Mobile Programming (Android) course at Suleyman Demirel University (Kazakhstan). The collected results show that in a modern world of emerging mobile technologies, we as educators should improve the way of teaching by adding electronically supported learning methods. In this study, the significance of microlearning technique is proposed.

Keywords: social media, microlearning, Vkontakte, education.

Кілт сөздер: социалдық медиа, микрооқу, ВКонтакте, білім беру.

Ключевые слова: социальные медиа, микрообучение, ВКонтакте, образование.

Introduction. Today organizations consider how to systematically use micro-sharing, made possible using tools like VKontakte to connect with people. It allows organizations to reach people's desktops, laptops, and devices already in pockets without any dependency of local email servers or a phone tree. Because this is the beginning of the mobile era, where people will be able to communicate, work, share the information, make easier their lives by using mobile devices in their pockets [1].

As it is mentioned above, Vkontakte is a public social network used all over the world which has become an integral part of people's own professional practice or personal point of view. They use it to connect, share, and discover information far beyond any other networks. As a consequence, users finally start to understand that Vkontakte can be used for educational field as a microlearning.

VKontakte – is a social network service available in several languages but popular particularly among Russian-speaking users around the world, especially in Russia, Ukraine, Kazakhstan, Moldova, Belarus, and Israel. Like other social networks, VK allows users to message contacts publicly or privately, create groups, public pages and events, share and tag images, audio and video, and play browser-based games.

As with most social networks, the site's core functionality is based around private messaging and sharing photos, status updates and links with friends. VKontakte also has tools for managing online communities and celebrity pages. The site allows its users to upload, search and stream media content, such as videos and music. VKontakte features an advanced search engine, which allows complex queries for finding friends as well as a real-time news search.

VKontakte users can post on their profile walls, each post may contain up to 10 attachments – media files, maps and documents (see above). VKontakte features two types of communities. Groups are better suited for decentralised communities (discussion-boards, wiki-style articles, editable by all members etc.). Liked content doesn't get automatically pushed to the user's wall, but is saved in the (private) Favorites section instead. The user has to press a second 'share with friends' button to share an item on their wall.

Ubiquitous technology can be usefully applied for microlearning because it reaches users throughout the day, when they have idle time. Users can look through and revise subscribed course's data while spending time in public transport, waiting in line, or in the brief transition periods between activities. Brief interactions allow users to chip away at a larger learning goal and may serve a priming role by repeatedly bringing the learning task to their attention; users may then be more mentally prepared to take an advantage of richer learning opportunities, such as those that occur naturally during actual social events [2].

How much time does an average human-being spend in social network? How much time do we waste, how much do we use for self-development? According to statistics of International Network for Social Network Analysis (INSNA) our young generation live in virtual world. They always stay connected. The

aim of this research is to combine what they like and what they need. As far as VKontakte is an online network service with elements of microlearning[3], it enables users to learn anywhere and anytime.

Methods. There is a CSS 216 Mobile Programming (Android) course in Suleyman Demirel University, which is mostly oriented on sophomore students. As an experimental tool VKontakte was chosen to teach Android with microlearning technique [4].

The main idea of connecting VKontakte with programming languages was to improve knowledge of students. As a learning method, microlearning was chosen. In order to collect data for this research, we interviewed sophomore students from different groups and faculties using questionnaires, which consisted of 7 questions.

The most important questions are specified below:

Do you use VKontakte? What do you want to learn using microlearning approach? How much of your time would you spend for educational purposes while implementing VKontakte and microlearning technique?

The results of this questionnaire are provided below:

Total number of students, who participated, is 77. Number of students, who use VKontakte is 76, don't use – 1.

The question concerned with time has shown the most interesting results:

14 students want to spend 10–20 minutes, 45 students – 1 hour and 18 students – 2 hours per day to learn using social media.

According to the results of this questionnaire, students are unwilling to learn programming language using VKontakte or they don't know how to use social media for educational purposes.

Course materials were processed and compressed into more brief and comprehensive data. Later this data was uploaded to instructor's website and other web resources such as Youtube. As a next step, we prepared a list of links which corresponded to earlier prepared syllabus for Android course. In order to have tweets sent on specific time and date according to the syllabus, we used tweet scheduler to keep the data updated and sent regularly without instructor's control. Students subscribe for Android group, created for this experimental course, which enables getting messages and notifications anywhere, anytime on their mobile phones [5]. This keeps students informed about which topic should be studied, revised and rehearsed.

Data analyzes of students' performance evaluation. There is students' performance evaluation test assigned for the topic from Android Programming Course – Broadcast Receivers. Test consists of some problems which were firstly done on sophomore students during the special lesson devoted to broadcast receivers. Cronbach's alfa mean, item mean and standard deviation was calculated.

The pre and post test results of students' performance evaluation tests were compared and the results were analyzed by SPSS program. The means and standard deviations of the pre and post tests are shown in tables and can be observed on the graphs. Tests were initially applied for sophomore students in order to calculate their Cronbach's alfa coefficients.

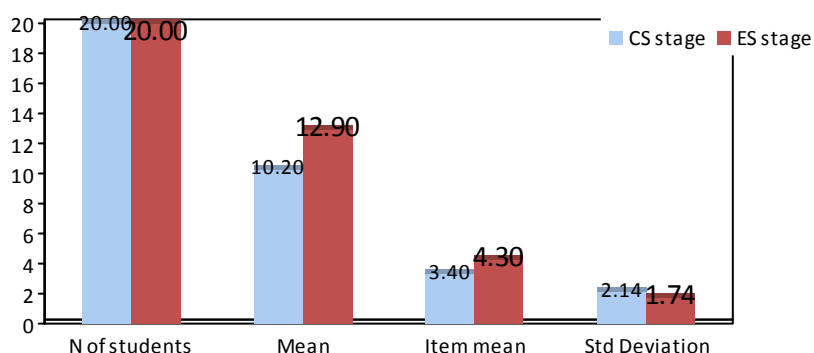
Performance evaluation test for sophomore students

Stages of the study	Type of testing topic	Subjects	Type of the test	Mean	Item mean	Std. Deviation
CS	Content Providers	Sophomore students	Pre-evaluation	10,200	3,4	2,14476
ES	Broadcast Receivers		Post-evaluation	12,900	4,3	1,74416

Pre and Post performance evaluation tests results are shown on the figure and in the table. One can observe that during the CS stage students showed lower performance in solving problems than during the ES stage where Broadcast Receivers method was instructed.

It is remarkable that even though problems were comparatively easier than in other tests, the mean and item mean for sophomore students that were tested on Broadcast receivers are higher than mean. But it should be noticed that the number of students was different and education level was also different.

Conclusions. Students were able to access study material outside university. This data was compressed and sliced into small chunks of information. Students subscribed for mobile notifications, that allowed receiving tweets anytime and anywhere, which is the main principle of micro-learning.



Results of the performance evaluation test during CS & ES stages

Moreover, information is nested on students' phones and VKontakte accounts, which they can easily access via Internet.

The mobile technology is spreading very fast. Each second the tons of bytes of information are created. There is a need for learning technique, such as micro-learning. This paper demonstrates a simple example how to use VKontakte and microlearning technique for educational purposes, but enterprises can use this approach as well. There is a necessity for researching this field of study, which is not yet complete. Many sections are under work and will be expanded in future

REFERENCES

- 1 Corner M. Enterprise Micro-learning. New-York: Pistachio), 2008.
- 2 Beaudin J.S., Intille S.S., Morris M.E. MicroLearning on a Mobile Device. MIT Media Lab, 2011.
- 3 Clarey J. Microlearning presentation at LearnTrends. LearnTrends, 2009.
- 4 Lindner M. What is Microlearning? Austria, Research Studios Austria, 2007.
- 5 Hug T., Lindner M., Bruck P.A. Microcontent is Everywhere (Eds.) 2005.
- 6 Sarsengeldin M., Satabaldiyev A., Guvercin S., Zhaparov M. Interdisciplinary connections and their influence on mathematical education of students // Proc. Social and Behavioral Sciences. Elsevier, 2013.

Резюме

Б. Х. Айтчанов, А. Б. Сатабалдиев, А. В. Богданчиков, К. Н. Латуца

¹Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы,
²Сүлеймен Демирел атындағы университет, Қаскелен, Қазақстан Республикасы)

ӘЛЕУМЕТТІК МЕДИАЛАР АРҚЫЛЫ БІЛІМ БЕРУ ЖҮЙЕСІНДЕГІ ИННОВАЦИЯЛЫҚ КӨЗҚАРАС

Қарастырылып отырған жұмыс, ВКонтакте сияқты әлеуметтік желілерді қолдану мен білім беру мақсатында бағдарламалық ортада микрооқудың технологияларын қарастырады. Бұл жұмыстың негізгі мәселелері аналитикалық орталықтардың зерттеулері анықтағандай, студенттер мен оқушылардың әлеуметтік желілерге біршама уақыттарын жіберуі болып табылады. Интернетте отырып шектен тыс уақытты өткізу дербес оқып-үйренуде біршама мәселелер мен қозғамдаманың (мотивация) болмағандығына әкеп соғады. Осы мәселенің шешімін табуда университеттің екінші курс студенттеріне «Мобильді бағдарламалау» пәнінен зерттеулер жүргізілген болатын. Зерттеу нәтижелері көрсеткендей, қазіргі мобильді технологиялардың дамыған заманында біз, яғни оқытушылар электрондық-есептеу жүйелері базасындағы оқыту әдістерін қолдануымыз қажет.

Кілт сөздер: социалдық медиа, микрооқу, ВКонтакте, білім беру.

Резюме

Б. Х. Айтчанов, А. Б. Сатабалдиев, А. В. Богданчиков, К. Н. Латуца

(¹Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан,
²Университет им. Сулеймана Демиреля, Каскелен, Республика Казахстан)

ИННОВАЦИОННЫЙ ПОДХОД
К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ СОЦИАЛЬНЫХ МЕДИА В ОБРАЗОВАНИИ

Данная работа рассматривает применение социальных сетей, таких как – Вконтакте, и технологии микро-обучения в программной среде для образовательных целей. Основной проблемой является то, что студенты и школьники тратят огромное количество времени в социальных сетях, о чем свидетельствуют исследования ряда аналитических центров. Беспольное просиживание в интернете приводит к серьезным проблемам и отсутствию мотивации в персональном обучении. Для частичного решения данной проблемы было проведено исследование в университете на студентах вторых курсов по дисциплине «Мобильное программирование». Исследование показало, что в современном мире развивающихся мобильных технологий, мы, как преподаватели, должны применять методы обучения на базе электронно-вычислительных систем.

Ключевые слова: социальные медиа, микрообучение, ВКонтакте, образование.

Поступила 5.07.2013г.

УДК 517.9

А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ, С. М. ШАЛЕНОВА

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Республика Казахстан)

О БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ
И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА
ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ

Аннотация

В настоящей работе, с помощью признака В. А. Ильина, установлена базисность собственных и присоединенных векторов оператора Штурма-Лиувилля с кратным спектром.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, собственные функций, присоединенные функций.

Кілт сөздер: Штурма-Лиувилл операторы, меншікті функция, тіркескен функция.

Keywords: the operator of Sturm-Liuivillay, own the functions, attached functions.

Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y^{(2)}(x); \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2)$$

с двумя ($i = 1,2$) линейно независимыми краевыми условиями. Это условие означает, что из шести детерминантов $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j}$ ($i, j = 1,2,3,4$) содержащихся в матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

не все равны нулю.

Задача на собственные значения для оператора (1)-(2) имеет вид

$$Ly = \lambda y, \quad (3)$$

$$U_i[y] = 0 \quad (i = 1,2). \quad (4)$$

Собственные значения этой задачи совпадают с квадратами корней ее характеристической функций [1, с. 33]

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \sqrt{\lambda} - \Delta_{42} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}, \quad (5)$$

где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j}$ ($i, j = 1, 2, 3, 4$) миноры матрицы A .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Предположим, что характеристическая функция задачи (3)-(4), т.е. функция (5), имеет счетное множество кратных нулей. Спрашивается, какой вид имеют граничные условия такого оператора и, в частности, образуют ли базис Рисса собственные и присоединенные функции такой задачи. Мы получили утвердительный ответ, на этот вопрос, с помощью теоремы Ильина В.А. [2, с. 1049-1050] и схемы Ионкина Н.И. [3, с. 297]. Основная идея настоящей работы состоит в следующем. Рассматриваемые нами операторы подобны некоторым модельным операторам Штурма-Лиувилля, базисность собственных и присоединенных функций которых легко устанавливается с помощью теоремы Ильина В.А. [2, с. 1049-1050].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1.

(а) Если $a \times d \neq 0$, то уравнение

$$\Delta(\lambda) = a + \left(\frac{b}{\sqrt{\lambda}} + d\sqrt{\lambda} \right) \sin \sqrt{\lambda} + c \times \cos \sqrt{\lambda} = 0, \quad (6)$$

где $a, b, c, d - \text{const}$, может иметь не более четырех кратных нулей, отличных от нуля;

(б) Если $a = 0, d \neq 0$, то уравнение (6) может иметь не более двух кратных нулей, отличных от нуля;

(в) Если $d = 0, b \neq 0$, то уравнение (6) может иметь не более двух кратных нулей.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $d = 0, b \neq 0, c^2(a^2 - c^2) = 0$, то уравнение (6) может иметь не более одного кратного нуля.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $d = 0, 2bc(a^2 - c^2) - 2b^2c^2 + a^2b^2 = 0, b^2(a^2 - c^2) - b^4 - 2b^2c \neq 0$,

то уравнение (6) не имеет кратных нулей, например, при

ЛЕММА 2. Если $c \neq 0$ и функция

$$\Delta(\lambda) = a + \frac{b}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} + c \times \cos \sqrt{\lambda},$$

где $a, b, c - \text{const}$, имеет более двух кратных нулей, то $b = 0, a^2 = c^2$.

ЛЕММА 3. Если характеристическая функция (5), краевой задачи (3)-(4) имеет счетное множество кратных нулей, то краевые условия (4) не усиленно регулярны [4, с. 71].

ЛЕММА 4. Если характеристическая функция (5), краевой задачи (3)-(4) имеет счетное количество кратных нулей, то оператор Штурма-Лиувилля, соответствующий этой краевой задаче, принимает один из следующих видов

$$\begin{cases} L_{1,1}(k)y = -y^{(1)}(x); & x \in (0,1), \\ y'(0) + y'(1) = 0, & k \in \mathbb{C}, k \neq -1 \\ y(0) + k y(1) = 0; \\ L_{1,2}(k)y = -y^{(1)}(x); & x \in (0,1) \\ k y'(0) - y'(1) = 0, & k \in \mathbb{C}, k \neq -1 \\ y(0) - y(1) = 0 \end{cases}$$

или им сопряженных, где k принадлежит к расширенной комплексной плоскости.

ЛЕММА 5. Если $k^2 \neq 1$, то имеет место формулы

а) $L_1(k) = P^{-1}(k)L_1(0)P(k), \quad P(k)y(x) = y(x) + ky(1-x);$

б) $L_2(k) = Q^{-1}(k)L_2(0)Q(k); \quad Q(k)y(x) = ky(x) + y(1-x).$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если $k \neq -1$, то собственные и присоединенные функции оператора

$$\begin{cases} L_{1,2}(k)y = -y^{(1)}(x); & x \in (0,1) \\ k y'(0) - y'(1) = 0, & k \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$$y(0) - y(1) = 0$$

образуют базис Рисса в пространстве $L^2(0,1)$.

ТЕОРЕМА 2. Система собственных и присоединенных функций оператора Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y^{(2)}(x); x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0,$$

$$y'(0) + y'(1) = 0$$

образует базис Рисса в пространстве $L^2(0,1)$.

Эта теорема является следствием теоремы Ильина В.А. и теоремы Ионкина Н.И.

ТЕОРЕМА 3. Система собственных и присоединенных функций оператора Штурма-Лиувилля

$$L_{k,1}(k)y = -y^{(2)}(x); x \in (0,1)$$

$$y'(0) + y'(1) = 0, \quad k \in \mathbb{C}, k \neq -1$$

$$y(0) + k y(1) = 0$$

образует базис Рисса в пространстве $L^2(0,1)$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 332 с.
- 2 Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. – Т. 273, № 5. – С. 1048-1053.
- 3 Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 294-304.
- 4 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

REFERENCES

- 1 Marchenko V.A. Operatory Sturm-Liuvillya i ih prilozheniya. Kiev: Nauka dumka, 1977. 332 (in Russ.).
- 2 Il'in V.A. O bezuslovnoi bazisnosti na zamknutom interval system sobstvennykh i prisoedinennykh funktsii differentsial'nogo operatora vtorogo poryadka // DAN SSSR, T. 273, № 5, 1048-1053 (in Russ.).
- 3 Ionkin N.I. Reshenie odnoi kraevoi zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem // Differentsial'nye uravneniya, 1977, T. 13. №2, 294-304 (in Russ.).
- 4 Naimark M.A. Lineinye differentsial'nye operatory. M.: Nauka, 1969.-528 (in Russ.).

Резюме

А. Ш. Шалданбаев, С. М. Шаленова

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан Республикасы)

СПЕКТРЫ ЕСЕЛІК ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ МЕНШІКТІ ЖӘНЕ ТІРКЕСКЕН ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ БАЗИСТІГІ ТУРАЛЫ

Бұл еңбекте, В. А. Ильиннің белгісі бойынша, спектрі еселік Штурм-Лиувилл операторының меншікті және тіркескен функцияларының $L^2(0,1)$ кеңістігінде базис құрайтыны дәлелденді.

Кілт сөздер: Штурма-Лиувилл операторы, меншікті функция, тіркескен функция.

Summary

A. Sh. Shaldanbaev, S. M. Shalenova

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Republic of Kazakhstan)

ON THE BASIS PROPERTY AND ASSOCIATED FUNCTIONS OF THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH A MULTIPLE SPECTRUM

In the true work, by means of an attribute of Century of A.Ilyin, it is installed bases own and attached vectors of the operator of Sturm-Liouville with a multiple spectrum.

Keywords: the operator of Sturm-Liuvillya, own the functions, attached functions.

Поступила 22.04.2013 г.

МАЗМҰНЫ

Теориялық физика

<i>Бошқаев К.А., Кеведе Э., Абишев М.Е., Токтарбай С., Аймуратов Е.К.</i> Фок және хартл-торн метрикаларының сәйкес болуы.....	3
<i>Кусаинов А.С., Кусаинов С.Г., Пя Н.Е.</i> Нейтрондық монитордың мәліметтерін кванттық алгоритмдер симуляторларымен өңдеу.....	13

Плазма, газдар және сұйықтар физикасы

<i>Исатаев С.И., Төлеуов Ф., Исатаев М.С., Есеналина Қ.А., Болысбекова Ш.</i> Еркін ағыншадағы турбуленттік құрылымдарды эксперименттік зерттеу.....	18
--	----

Қатты дене физикасы және сызықты емес физика

<i>Аканаев Б.А., Джапашов Н.М.</i> Лоренц теңдеулеріндегі тұрақсыз аттракторлардың физикалық тұрғыдан зерттеулері.....	22
<i>Явидов Б.Я., Жолдасова С.М., Жұмабекова В.Н.</i> Электрон-фонон әсерлесуінің биполярондардың түйіндеріндегі бозе-эйнштейн конденсация температурасына экрандау эффектісі.....	26
<i>Жантурина Н.Н., Шункеев К.Ш., Алиев Б.А.</i> Бірості деформациямен тор симметриясы төмендетілгенде температураның КІ, КВг, КСІ және СsI кристалдарындағы экситондар аннигиляциясына әсер етуі.....	29
<i>Жанабаев З.Ж., Ибраимов М.К., Сағидолда Е.</i> Наноқұрылымды кеуекті кремний қабыршағының электрондық қасиеттерін зерттеу.....	34
<i>Жантурина Н.Н., Шункеев К.Ш., Алиев Б.А., Мясникова Л.Н., Бармина А.А.</i> Сілтілі галоидты кристалдарда температураның және бірості деформацияның радиациялық орталықтардың пайда болуына әсер етуін модельдеу.....	38
<i>Абдыкадыров Б.К.</i> MgO кристалына тұндырылған Fe жұқа магниттік қабыршақтарының зерттелуі және құрылымына талдау жасау.....	43

Атом ядросы және элементар бөлшектер физикасы

<i>Сахиев С.Қ., Мауей Б., Кукулин В.И., Рубцова О.А.</i> Орташа ядролардағы $^{6,7}\text{Li}$ шашырауының табалдырықтық аномалиялары.....	47
---	----

Математикалық және компьютерлік модельдеу

<i>Түнгатаров Н.Н., Дәлелханқызы Т.</i> Автоматтанған жобалау жүйесінде машина жасауға және механикаға арналған детальдерін 2D компьютерлік модельдеу.....	53
--	----

Атмосфералық құбылыс физикасы

<i>Солодовник А.А., Кудабаяева Д.А., Крючков В.Н.</i> Маусымдық және маусымаралық күміс түстес бұлттардың глобальды аумақ аудандарының вариациялары.....	60
--	----

Небесная механика

<i>Беков А.А.</i> Стационарлық емес өстік гравитациялық өрісінде спиральдік орбиталардың орнықтылығы туралы.....	65
<i>Беков А.А., Астемесова К.С., Өсіпбекова Д.И.</i> Сәуле шығарғыш айнымалы масса мен екілік жүйелердің орбиталар эволюциясы туралы.....	70

Теориялық және тәжірибелік зерттеулер

<i>Ақыш Ә.Ш.</i> Навье–Стокс теңдеулерінің шешуінің экстремалдық қасиеттері жөнінде.....	75
<i>Алдашев С.А.</i> Көп өлшемді гиперболалық теңдеулерге арналған шеттік есептер.....	80
<i>Жолтаев Д.М., Байқоныс А., Оралсын Г.</i> Трикоми теңдеуі үшін көлемдік потенциалдың шекаралық шарттары.....	87
<i>Жәрекешев И.Х.</i> Квантталынған магнит өрістердегі электрондық күйлерінің тығыздығы және екіөлшемді реттелмеген жүйелерінің локализациясы.....	91
<i>Жұмабаев М.Ж., Тілесова Г.С.</i> Қасиеттері температураға тәуелді цилиндрлік денелердің осесимметриялық кернеулік күй есебі.....	97
<i>Лисицын В.Н., Тулеушев Ю.Ж., Асанов А.Б.</i> Бериллийден жасалған ультражұқа фольга.....	103
<i>Мирзакулова А.Е., Дауылбаев М.Қ.</i> Сингулярлы ауытқыған интегралды-дифференциалдық теңдеуге арналған шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық жинақтылығы.....	107
<i>Лескенқызы Н., Кангужин Б.Е.</i> Локальды емес шекаралық шартты екі еселі дифференциалдық оператордың Грин функциясы.....	111
<i>Әжібекова Ә.С.</i> Мұнай кен орнының қатаңдылық сыйымдылығының коэффициентін интеграциялық әдіспен есептеу.....	117
<i>Айтчанов Б.Х., Сатабалдиев А.Б., Богданчиков А.В., Латута К.Н.</i> Әлеуметтік медиалар арқылы білім беру жүйесіндегі инновациялық көзқарас.....	123
<i>Шалданбаев А.Ш., Шаленова С.М.</i> Спектрі еселік Штурм-Лиувилл операторының меншікті және тіркескен Функцияларының базистігі туралы.....	126

СОДЕРЖАНИЕ

Теоретическая физика

<i>Бошқаев К.А., Кеведе Э., Абишев М.Е., Токтарбай С., Аймуратов Е.К.</i> Соответствие метрик Фока и Хартла-Торна.....	3
<i>Кусаинов А.С., Кусаинов С.Г., Пя Н.Е.</i> Обработка данных нейтронного монитора симуляторами квантовых алгоритмов.....	13

Физика плазмы, газов и жидкостей

<i>Исатаев С.И., Толеуов Г., Исатаев М.С., Есеналина К.А., Большбекова Ш.</i> Экспериментальное исследование турбулентных структур в свободной струе.....	18
---	----

Физика твердого тела и нелинейная физика

<i>Аканаев Б.А., Джашаиов Н.М.</i> Физические аспекты странных аттракторов уравнении Лоренца.....	22
<i>Явидов Б.Я., Жолдасова С.М., Жумабекова В.Н.</i> Эффект экранирования электрон-фононного взаимодействия на температуру бозе-эйнштейновской конденсации на межузел биполярнонов.....	26
<i>Жантурина Н.Н., Шункеев К.Ш., Алиев Б.А.</i> Воздействие температуры на процессы аннигиляции экситонов в кристаллах KI, KBr, KCl и CsI при понижении симметрии решетки одноосной деформацией.....	29
<i>Жанабаев З.Ж., Ибраинов М.К., Сагидолда Е.</i> Исследование электрических свойств наноструктурированных пленок пористого кремния.....	34
<i>Жантурина Н.Н., Шункеев К.Ш., Алиев Б.А., Мясникова Л.Н., Бармина А.А.</i> Моделирование влияния температуры и одноосной деформации на вероятность возникновения радиационных центров в щелочногалоидных кристаллах.....	38
<i>Абдыкадыров Б.К.</i> Исследование и анализ поверхностной структуры тонких магнитных пленок Fe, осажденных на кристалл MgO.....	43

Физика атомного ядра и элементарных частиц

<i>Сахиев С.К., Мауей Б., Кукулин В.И., Рубцова О.А.</i> Пороговая аномалия в рассеянии $^{6,7}\text{Li}$ на средних ядрах.....	47
---	----

Математическое и компьютерное моделирование

<i>Тунгатаров Н.Н., Далелханкызы Т.</i> Компьютерное 2D моделирование деталей для машиностроения и механики в системе автоматизированного проектирования.....	53
---	----

Физика атмосферных явлений

<i>Солодовник А.А., Кудабаяева Д.А., Крючков В.Н.</i> Сезонные и межсезонные вариации площади глобального поля серебристых облаков.....	60
---	----

Небесная механика

<i>Беков А.А.</i> Об устойчивости спиральных орбит в нестационарном осесимметричном гравитационном поле.....	65
<i>Беков А.А., Астемесова К.С., Усипбекова Д.И.</i> Об эволюции орбит излучающих двойных систем с переменной массой.....	70

Теоретические и экспериментальные исследования

<i>Акыш А.Ш.</i> Об экстремальных свойствах решения уравнений Навье-Стокса.....	75
<i>Алдашев С.А.</i> Краевые задачи для многомерных гиперболических уравнений.....	80
<i>Жолтаев Д.М., Байконыс А., Оралсын Г.</i> Граничные условия объемного потенциала для уравнения Трикоми.....	87
<i>Жарекешев И.Х.</i> Плотность электронных состояний и локализация двумерных неупорядоченных систем в квантующих магнитных полях.....	91
<i>Жумабаев М.Ж., Тилесова Г.С.</i> Задача осесимметричной напряженности цилиндрического тела со свойствами зависящими от температуры.....	97
<i>Лисицын В.Н., Тулеушев Ю.Ж., Асанов А.Б.</i> Ультратонкая фольга из бериллия.....	103
<i>Мирзакулова А.Е., Дауылбаев М.Қ.</i> Асимптотическая сходимости решения краевой задачи для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения.....	107
<i>Глескенқызы Н., Кангужин Б.Е.</i> Функция Грина оператора двухкратного дифференцирование с нелокальными краевыми условиями.....	111
<i>Ажибекова А.С.</i> Итерационный метод расчета коэффициента упругоэластичности нефтяного месторождения.....	117
<i>Айтчанов Б.Х., Сатабалдиев А.Б., Богданчиков А.В., Латута К.Н.</i> Инновационный подход к использованию социальных медиа в образовании.....	123
<i>Шалданбаев А.Ш., Шаленова С.М.</i> О базисности собственных и присоединенных функций оператора Штурма-Лиувилля с кратным спектром.....	126

CONTENTS

Theoretical physics

- Boshkayev K.A., Quevedo H., Abishev M.E., Toktarbay S., Aimuratov Y.K.* Correspondence of fock and hartle-thorne metrics..... 3
- Kussainov A.S., Kussainov S.G., Pya N.Y.* The neutron monitor time series data communication with the quantum algorithms..... 13

Physics of plasma, gases and liquids

- Isatayev S., Toleuov G., Isatayev M., Esenalina K., Bolysbekova Sh.* Experimental research of the turbulent structure in a free jet..... 18

Solid-state physics and nonlinear physics

- Akanaev B.A., Japashov N.M.* Physical aspects of strange attractors in lorentz's equations..... 22
- Yavidov B.Ya., Zholdassova S.M., Zhumabekova V.* Effect of screening of the electron-phonon interaction on the temperature of bose-einstein condensation of intersite bipolarons..... 26
- Zhanturina N.N., Shunkeyev K.Sh., Aliev B.A.* The temperature influence on processes of excitons annihilation in crystals KI, KBr, KCl and CsI at lattice symmetry lowering by uniaxial stress..... 29
- Zhanabaev Z.Zh., Ibraimov M.K., Sagidolda E.* Investigation of electrical properties of nanostructured porous silicon films..... 34
- Zhanturina N.N., Shunkeyev K.Sh., Aliev B.A., Myasnikova L.N., Barmina A.A.* Modeling of the temperature and uniaxial stress influence on the radiation centers creation in alkali halide crystals..... 38
- Abdykadyrov B.K.* Research and analysis of the surface structure of the thin magnetic Fe films deposited on the MgO crystal..... 43

Nuclear physics and elementary particles

- Sahiev S.K., Mauyey B., Kukulin V.I., Rubtsova O.A.* The threshold anomaly in dispersion of $^{6,7}\text{Li}$ on the average weight nuclei..... 47

Mathematical and computer simulation

- Tungatarov N.N., Dalelkhankyzy T.* Computer 2D modeling of parts for mechanical engineering and mechanics CAD system..... 53

Physics of atmospheric phenomena

- Solodovnik A.A., Kudabayeva D.A., Krjuchkov V.N.* Seasonal variations of space and the off season global field of noctilucent clouds..... 60

The heavenly mechanics

- Bekov A.A.* On the stability of spiral orbits in non-stationary axially symmetric gravitational field..... 65
- Bekov A.A., Astemesova K.S., Usipbekova D.I.* On the orbital evolution of the radiating binary systems with variable mass..... 70

Theoretical and experimental researches

- Akysh A.Sh.* About extreme properties of the solution of equations Navier-Stokes..... 75
- Aldashev S.A.* Regional tasks for the multivariate hyperbolic equations of the second order..... 80
- Zholtayev D.M., Baykonys A., Oralsyn G.* Boundary conditions of the volume potential for the Tricomi equation..... 87
- Zharekeshev Isa Kh.* Electron density of states and localization of two-dimensional disordered systems in quantized magnetic fields..... 91
- Zhumabayev M.Zh., Tilesova G.S.* The problem of asymmetric intensity of a cylindrical body with properties depending on temperature..... 97
- Lisitsyn V.N., Tuleushev Yu.Zh., Asanov A.B.* Ultrathin beryllium foil..... 103
- Myrzakulova A.E., Dauylbaev M.K.* Asymptotic convergence of solutions of boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations..... 107
- Ileskenkyzy N., Kanguzhin B.E.* Green's function of the two-fold differentiation operator with nonlocal boundary conditions..... 111
- Azhibekova A.S.* Iterative method of calculation of factor elasticcapacity of the oil deposit..... 117
- Aitchanov B.H., Sayabaldiyev A.B., Bogdanchikov A.V., Lautu K.N.* Innovative approach to social media in education..... 123
- Shaldanbaev A.Sh., Shalenova S.M.* On the basis property and associated functions of the Sturm-Liouville problem with a multiple spectrum..... 126

Редактор *М. С. Ахметова, Ж. М. Нургожина*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 08.08.2013.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
8,25 п.л. Тираж 3000. Заказ 4.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ ЖУРНАЛОВ НАН РК

В журналах публикуются научные статьи и заметки, экспресс-сообщения о результатах исследований в различных областях естественно-технических и общественных наук.

Журналы публикуют сообщения академиков НАН РК, а также статьи других ученых, **представленные** действительными членами НАН РК (академиками НАН РК), несущими ответственность за достоверность и значимость научных результатов и актуальность научного содержания рекомендуемых работ.

Представленные для опубликования материалы должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Содержать результаты оригинальных научных исследований по актуальным проблемам в области физики, математики, механики, информатики, биологии, медицины, геологии, химии, экологии, общественных и гуманитарных наук, ранее не опубликованные и не предназначенные к публикации в других изданиях. Статья сопровождается разрешением на опубликование от учреждения, в котором выполнено исследование и **представлением** от академика НАН РК.

2. Статья представляется в одном экземпляре. Размер статьи не должен превышать 5-7 страниц (статья обзорного характера – до 15 стр.), включая аннотацию в начале статьи перед основным текстом, которая должна отражать цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы (**аннотация** не менее 1/3 стр. через 1 компьютерный интервал, 12 пт), таблицы, рисунки, список литературы (12 пт через 1 компьютерный интервал), напечатанных в редакторе Word 2003, шрифтом Times New Roman 14 пт, с пробелом между строк 1,5 компьютерных интервала, поля – верхнее и нижнее 2 см, левое 3 см, правое 1,5 см. Количество рисунков – не более пяти. В начале статьи вверху слева следует указать индекс УДК. Далее посередине страницы прописными буквами (курсивом) – инициалы и фамилии авторов, должность, степень, затем посередине строчными буквами – название организации(ий), в которой выполнена работа и город, ниже также посередине заглавными буквами (полужирным шрифтом) – название статьи; Аннотация на языке статьи, **ключевые слова**. В конце статьи даются резюме на двух языках (русском (казахском), английском, перевод названия статьи, также на 3-х языках данные автора). Последняя страница подписывается всеми авторами. Прилагается электронный вариант на CD-диске.

3. Статьи публикуются на русском, казахском, английском языках. К статье необходимо приложить на отдельной странице Ф.И.О. авторов, название статьи, наименование организации, город, аннотации на двух языках (на казахском и английском, или русском и английском, или казахском и русском), а также сведения об авторах (уч.степень и звание, адрес, место работы, тел., факс, e-mail).

4. Ссылки на литературные источники даются цифрами в прямых скобках по мере упоминания. Список литературы оформляется следующим образом:

1. *Адамов А.А.* Процессы протаивания грунта // Доклады НАН РК. 2007. №1. С. 16-19.

2. *Чудновский А.Ф.* Теплообмен в дисперсных средах. М.: Гостехиздат, 1994. 444 с.

3. В случае переработки статьи по просьбе редакционной коллегии журнала датой поступления считается дата получения редакцией окончательного варианта. Если статья отклонена, редакция сохраняет за собой право не вести дискуссию по мотивам отклонения.

ВНИМАНИЕ!!!

С 1 июля 2011 года вводятся следующие дополнения к Правилам:

После списка литературы приводится список литературы в романском алфавите (References) для SCOPUS и других БАЗ ДАННЫХ полностью отдельным блоком, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите (латиница).

В References не используются разделительные знаки («//» и «-»). Название источника и выходные данные отделяются от авторов типом шрифта, чаще всего курсивом, точкой или запятой.

Структура библиографической ссылки: авторы (транслитерация), название источника (транслитерация), выходные данные, указание на язык статьи в скобках.

Пример ссылки на статью из российского переводного журнала:

Gromov S.P., Fedorova O.A., Ushakov E.N., Stanislavskii O.B., Lednev I.K., Alfimov M.V. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1991, 317, 1134-1139 (in Russ.).

На сайте <http://www.translit.ru/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского текста в латиницу, используя различные системы. Программа очень простая, ее легко использовать для готовых ссылок. К примеру, выбрав вариант системы Библиотеки Конгресса США (LC), мы получаем

изображение всех буквенных соответствий. Вставляем в специальное поле весь текст библиографии на русском языке и нажимаем кнопку «в транслит».

Преобразуем транслитерированную ссылку:

- 1) убираем транслитерацию заглавия статьи;
- 2) убираем специальные разделители между полями (“/”, “-”);
- 3) выделяем курсивом название источника;
- 4) выделяем год полужирным шрифтом;
- 5) указываем язык статьи (in Russ.).

Просьба к авторам статей представлять весь материал в одном документе (одном файле) и точно следовать Правилам при оформлении начала статьи: посередине страницы прописными буквами (курсивом) – фамилии и инициалы авторов, затем посередине строчными буквами – название организации (ий), в которой выполнена работа, и город, ниже также посередине заглавными буквами (полужирным шрифтом) – название статьи. Затем следует аннотация, ключевые слова на 3-х языках и далее текст статьи.

Точно в такой же последовательности следует представлять резюме на двух других языках в том же файле только на отдельной странице (Ф.И.О. авторов, название статьи с переводов на 2 других языка, наименование организации, город, резюме). Далее в том же файле на отдельной странице представляются сведения об авторах.

Тел. Редакции 272-13-19

Оплата:

ТОО Исследовательский центр НАН РК

Алматинский филиал АО БТА Банк

KZ 44319A010000460573

БИН 060540019019, РНН 600900571703

КБЕ 17, КНП 859, БИК АВКЗКЗКХ

За публикацию в журнале 1. Доклады НАН РК, Вестник НАН РК, Известия НАН РК. Серия _____ 5000 тенге

Сайт НАН РК:<http://akademiyanauk.kz/>