

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



SERIES

OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL

3 (295)

МАМЫР – МАУСЫМ 2014 ж.

МАЙ – ИЮНЬ 2014 г.

MAY – JUNE 2014

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА

PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ

ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р
ҚР ҰҒА корреспондент мүшесі
Ғ. М. Мутанов

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физика-математика ғылымдарының докторы **Н. М. Темірбеков** (бас редактордың орынбасары), ҚР ҰҒА-ның академиктері **Н. Ж. Тәкібаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кәлменов, Н. Қ. Блиев, Б. Н. Мұқашев, М. Ө. Өтелбаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Қ. Қ. Қадыржанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Н. Т. Данаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Т. С. Рамазанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Ө. Ө. Өмірбаев**, академик **А. Гаджиев** (Әзірбайжан), академик **А. Пашаев** (Әзірбайжан), академик **И. Тигиняну** (Молдова), академик **И. Н. Вишневский** (Украина), академик **А. М. Ковалев** (Украина), академик **А. А. Михалевич** (Беларусь), химия ғылымдарының докторы **Н. Бейсен** (жауапты хатшы)

Г л а в н ы й р е д а к т о р
академик НАН РК
Б. Т. Жумагулов

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

доктор физико-математических наук **Н. М. Темирбеков** (заместитель главного редактора), академики НАН РК **Н. Ж. Такибаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кальменов, Н. К. Блиев, Б. Н. Мукашев, М. О. Отелбаев**, доктор физико-математических наук **К. К. Кадыржанов**, доктор физико-математических наук **Н. Т. Данаев**, доктор физико-математических наук **Т. С. Рамазанов**, доктор физико-математических наук **У. У. Умирбаев**, академик **А. Гаджиев** (Азербайджан), академик **А. Пашаев** (Азербайджан), академик **И. Тигиняну** (Молдова), академик **И. Н. Вишневский** (Украина), академик **А. М. Ковалев** (Украина), академик **А. А. Михалевич** (Беларусь), доктор химических наук **Н. Бейсен** (ответственный секретарь)

E d i t o r - i n - c h i e f
academician of the NAS of the RK
B. T. Zhumagulov

E d i t o r i a l s t a f f:

doctor of physical and mathematical sciences **N.M. Temirbekov** (deputy editor-in-chief), academicians of the NAS of the RK **N. Zh. Takibayev, S. N. Harin, T. Sh. Kalmenov, N. K. Bliiev, B. N. Mukashev, M. O. Otelbaev**, doctor of physical and mathematical sciences **K. K. Kadirzhanov**, doctor of physical and mathematical sciences **N. T. Danaev**, doctor of physical and mathematical sciences **T. S. Ramazanov**, doctor of physical and mathematical sciences **U. U. Umirbaev**, academician **A. Gadzhiev** (Azerbaijan), academician **A. Pashaev** (Azerbaijan), academician **I. Tiginaynu** (Moldova), academician **I. N. Vishnevskiyi** (Ukraine), academician **A. M. Kovalov** (Ukraine), academician **A. A. Mikhalevich** (Belarus), doctor of chemical sciences **N. Beysen** (secretary)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая» I ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 3000 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18 www.akademiyanauk.kz
Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

УДК 52:531.51; 52:530.12

К. А. БОШКАЕВ

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан)

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД

Аннотация. Мы рассматриваем вырожденную глобально нейтральную систему звездных размеров, состоящих из N_n нейтронов, N_p протонов и N_e электронов, которые находятся в бета равновесии. Такая система с ядерной плотностью, имея массовое число порядка $A \approx 10^{57}$, может обладать ненулевым распределением заряда. Мы проводим анализ в рамках классической электродинамики для исследования магнитного поля, индуцированного этим распределением, для случая, когда система вращается как твердое тело вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью.

Ключевые слова: модель Томаса-Ферми, ядро нейтронной звезды, магнитное поле.

Тірек сөздер: Томас-Ферми моделі, нейтронды жұлдыздың ядросы, магнит өрісі.

Keywords: Thomas-Fermi model, core of a neutron star, magnetic field.

Введение. Нейтронные звезды, главным образом, обнаруживаются как пульсары, чьи регулярные пульсации в радио, рентгеновском и оптическом диапазонах вырабатываются постоянными, упорядоченными магнитными полями, которые, как известно, являются самыми сильными полями во Вселенной. Однако возникновение магнитного поля в нейтронных звездах до сих пор полностью не изучено. Тем не менее, в литературе можно найти различные гипотезы, объясняющие формирование магнитного поля [1-7]. Самая простая из гипотез, объясняющая присутствие сильных полей у нейтронных звезд – это сохранение магнитного потока, который уже присутствовал в звездах предшественниках во время гравитационного коллапса. Эта идея основана на предположении, что все звезды на всех этапах эволюции имеют какое-то магнитное поле, благодаря электронным токам, циркулирующим внутри них. Таким образом, этот аргумент привел к предсказанию полей порядка $B \approx 10^{12}$ Гаусс в нейтронных звездах за несколько лет до открытия пульсаров [1, 2]. Однако не существует подробного физического описания такого коллапса, в котором сохраняется магнитный поток. Томсон и Данкан [8] выдвинули гипотезу, что только появившиеся нейтронные звезды могут сочетать сильную конвекцию и дифференциальное вращение, вследствие чего, внутри нейтронных звезд генерируется магнитное поле. Они предсказали поля до 10^{15} – 10^{16} Гаусс с начальными периодами в несколько миллисекунд и предположили, что такие поля могут объяснить большую часть явлений, связанных с источниками мягких повторяющихся гамма всплесков (SGR) и аномальных рентгеновских пульсаров (AXP) [9, 10].

Возможно, что эти процессы не являются единственными. Сильное поле может присутствовать в сжимающейся (коллапсирующей) звезде, но позже деформироваться, исказиться и, возможно, усилиться под воздействием некоторого сочетания конвекции, дифференциального вращения и магнитной неустойчивости [11, 12]. Относительная важность этих составных частей зависит от начального значения напряженности магнитного поля и скорости вращения звезды. Для обоих механизмов, поле и поддерживающие его токи могут находиться не только в твердой коре звезды, но также быть распределены внутри звезды, в основном, в виде жидкой смеси нейтронов, протонов, электронов и более экзотических частиц.

В отличие от вышеупомянутых гипотез, которые основаны на предположении, что все звезды намагничены или имеют некоторый отличный от нуля суммарный заряд, мы исследуем систему, рассмотренную недавно группой Руффини [13]. Согласно этой работе, система, состоящая из

вырожденных нейтронов, протонов и электронов в бета-равновесии, является нейтральной и сохраняет ядерную плотность за счет собственной гравитации. В дальнейшем, эти системы обозначаются как ядра звездных размеров состоящих из ядерного вещества. Несмотря на общую нейтральность, распределение заряда внутри и снаружи (у поверхности) звезды оказывается отличным от нуля. Суммарная величина зарядов внутри и снаружи ядра одинакова, но противоположна по знаку. Такой эффект имеет место вследствие бета-равновесия: проникновение электронов в ядро, и как следствие – экранирование заряда ядра и глобальной нейтральности полного (суммарного) заряда системы. В результате этого эффекта, может быть продемонстрировано присутствие электрического поля, близкого к критическому значению $E_c = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar}$ около поверхности массивных ядер,

хотя локализованного в очень тонкой оболочке. Таким образом, в данном случае магнитное поле может возникнуть, только если нейтронная звезда вращается как пульсар, даже если звезды-предшественники не были намагничены или электрически заряжены.

Релятивистское уравнение Томаса-Ферми. Уравнение Томаса-Ферми является точной теорией для атомов, молекул и твердых тел при $N_p \rightarrow \infty$ [14]. Релятивистская теория Томаса-Ферми, разработанная для изучения атомов с тяжелыми ядрами $N_p = 10^6$ [15-17], дает важную основную новую информацию по изучению ядерного вещества в большом объеме в пределе $A = (m_{plank} / m_n)^3$ нуклонов с массой m_n , а также сведения о его электродинамических свойствах. Исследования ядерного вещества в нейтронных звездах, состоящего из вырожденного газа нейтронов, протонов и электронов, традиционно проводились с применением микроскопических условий нейтральности заряда, с обязательным требованием равенства плотностей (концентрации) электронов $n_e(r)$ и протонов $n_p(r)$,

$$n_e(r) = n_p(r). \quad (1)$$

Однако, очевидно, что при условиях, близких к гравитационному сжатию (коллапсу), появляется ультра-релятивистская составляющая вырожденных электронов, удержание которой требует наличия очень сильных электромагнитных полей, чтобы гарантировать полную нейтральность заряда звезды. При этих условиях уравнение (1) будет некорректным.

Используя релятивистское уравнение Томаса-Ферми, а также уравнение Феррейринио [16], Руффини и Стелла [17] проанализировали распределение электронов вокруг и внутри ядра нейтрального атома вплоть до значений $N_p = 6000$. Они продемонстрировали эффект проникновения электронов в ядро, ведущее к экранированию положительного заряда ядра, а также понятию «эффективного» распределения ядерного заряда.

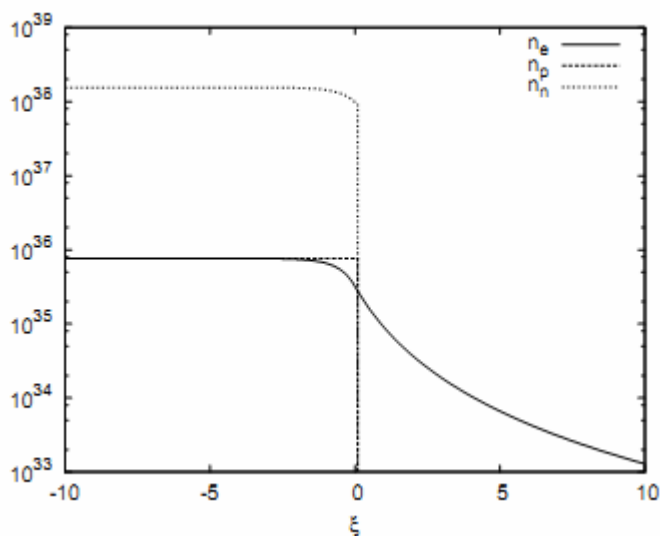


Рисунок 1 – Плотность числа (концентрация) нейтронов n_n , протонов n_p и электронов n_e , в единицах частиц/см³, построены как функции безразмерной радиальной координаты ξ . Вблизи поверхности ядра находится переходной слой шириной $\approx \hbar / (\sqrt{a} m_n c)$ с некомпенсированным зарядом, который генерирует сверхкритическое электрическое поле

(смотрите рисунок 4)

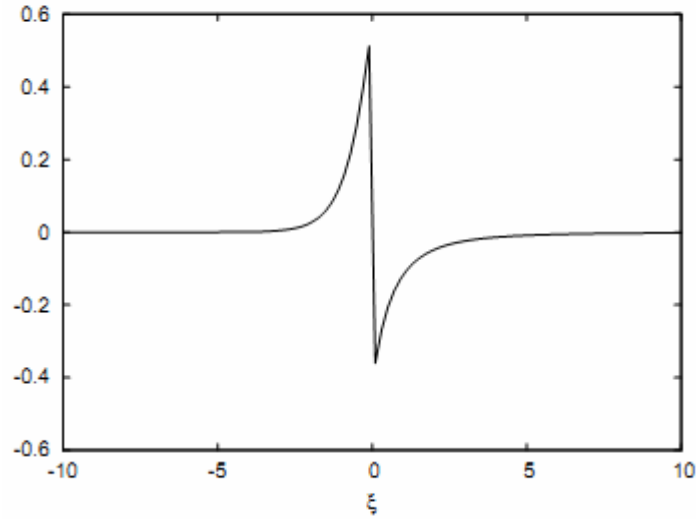


Рисунок 2 – Нормированное разделение зарядов $(n_p - n_e)/n_p$ построено как функция безразмерной радиальной координаты ξ . Максимальное разделение зарядов происходит вблизи поверхности ядра, где находится переходной слой с некомпенсированным зарядом (смотреть рисунок 1)

В работах Руффини [13] и Попова [18] релятивистское уравнение Томаса-Ферми было использовано для экстраполяции методов сверхтяжелых ядер на случай ядра звездного размера состоящего из ядерной материи. Эти ядра представляют внутреннюю часть нейтронных звезд и характеризуются атомным номером порядка $A = (m_{\text{planck}} / m_n)^3 \approx 10^{57}$, состоят из вырожденных нейтронов, протонов и электронов в бета-равновесии и, как ожидается, сохраняют ядерную плотность благодаря своей гравитации. Было показано, что вблизи поверхности массивных ядер возможно существования электрических полей, близких к критическому значению E_c , хотя они локализованы в очень узкой оболочке порядка комптоновской длины волны электрона λ_e . Теперь рассмотрим основные предположения и результаты этих работ. В соответствии с [13] и [18] протоны распределены с постоянной концентрацией n_p внутри радиуса

$$R_c = \Delta \frac{\hbar}{m_p c} N_p^{1/3}, \quad (2)$$

где Δ – параметр, который при $\Delta \approx 1$ ($\Delta < 1$) соответствует ядерной (сверх-ядерной) плотности в применении к обычным ядрам. Полный кулоновский потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 V(r) = -4\pi e [n_p(r) - n_e(r)], \quad (3)$$

с граничными условием $V(\infty) = 0$ (из-за глобальной нейтральности заряда в системе) и конечностью $V(0)$. Концентрация электрона $n_e(r)$ с зарядом $-e$ определяется из энергии Ферми через импульс Ферми P_e^F , и мы предполагаем, что энергия Ферми электрона равна нулю

$$E_e^F = [(P_e^F c)^2 + m_e^2 c^4]^{1/2} - m_e c^2 - eV(r) = 0, \quad (4)$$

что приводит к следующему уравнению:

$$n_e(r) = \frac{(P_e^F)^3}{3\pi^2 \hbar^3} = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3 c^3} [e^2 V^2(r) + 2m_e c^2 eV(r)]^{3/2}. \quad (5)$$

Введем безразмерные величины $x = r/(\hbar/m_\pi c)$, $x_c = R_c/(\hbar/m_\pi c)$ и $\chi/r = eV(r)/c\hbar$; тогда релятивистское уравнение Томаса-Ферми примет вид:

$$\frac{1}{3x} \frac{d^2 \chi(x)}{dx^2} = -\frac{\alpha}{\Delta^3} H(x_c - x) + \frac{4\alpha}{9\pi} \left[\frac{\chi^2(x)}{x^2} + 2 \frac{m_e}{m_\pi} \frac{\chi}{x} \right]^{3/2}, \quad (6)$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$ – постоянная тонкой структуры, $H(x_c - x)$ – ступенчатая функция Хэвисайда и граничные условия для $\chi(x)$ запишутся в следующем виде: $\chi(0) = 0$ и $\chi(\infty) = 0$. Концентрация нейтронов $n_n(r)$ определяется посредством их энергии Ферми условием равновесия бета-распада через импульс Ферми P_n^F :

$$E_n^F = [(P_n^F c)^2 + m_n^2 c^4]^{1/2} - m_n c^2 = [(P_p^F c)^2 + m_p^2 c^4]^{1/2} - m_p c^2 + eV(r), \quad (7)$$

что в свою очередь связано со значениями концентраций протона и электрона, определяемых посредством уравнений (3), (5) и (6).

Ультра-релятивистские аналитические решения. В ультра-релятивистском пределе, где вычисление производится планарным приближением, релятивистское уравнение Томаса-Ферми может иметь аналитическое решение. Вводим новую функцию ϕ , определяемую как $\phi = 4^{1/3} (9\pi)^{-1/3} \Delta \chi / x$ и новые переменные $\hat{x} = (12/\pi)^{1/6} \sqrt{\alpha} \Delta^{-1} x_c$, $\xi = \hat{x} - \hat{x}_c$; тогда уравнение (6) преобразится в

$$\frac{d^2 \hat{\phi}(\xi)}{d\xi^2} = -H(-\xi) + \hat{\phi}(\xi)^3, \quad (8)$$

где $\hat{\phi}(\xi) = \phi(\xi + \hat{x}_c)$. Граничными условиями для $\hat{\phi}$ являются $\hat{\phi}(\xi) \rightarrow 1$, при $\xi \rightarrow -\hat{x}_c \ll 0$ (в центре ядра из ядерной материи). Функция $\hat{\phi}$ и ее первая производная $\hat{\phi}'$ должны быть непрерывными на поверхности $\xi = 0$ для ядер звездных размеров состоящих из ядерной материи. Следовательно, уравнение (8) допускает точное решение:

$$\hat{\phi}(\xi) = \begin{cases} 1 - 3[1 + 2^{-1/2} \sinh(a - \sqrt{3}\xi)]^{-1}, & \xi < 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{(\xi + b)}, & \xi > 0, \end{cases} \quad (9)$$

где постоянные интегрирования a и b имеют значения $a = \text{Arch}(9\sqrt{3}) \approx 3.439$, $b = (4/3)\sqrt{2} \approx 1.886$. Далее, мы оценим кулоновский потенциал и функцию электрического поля

$$V(\xi) = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{m_\pi c^2}{\Delta e} \hat{\phi}(\xi), \quad E(\xi) = -\left(\frac{3^5 \pi}{4}\right)^{1/6} \frac{\sqrt{\alpha} m_\pi^2 c^3}{\Delta^2 e \hbar} \hat{\phi}'(\xi). \quad (10)$$

Подробности приведены на рисунках 3 и 4.

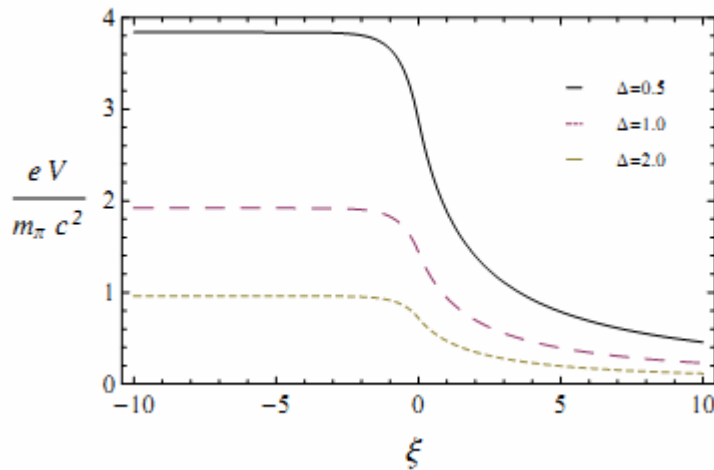


Рисунок 3 – Энергия кулоновского потенциала протона eV в единицах массы пиона m_π как функция радиальной координаты $\xi = \hat{x} - \hat{x}_c$, для выбранных значений параметра плотности Δ

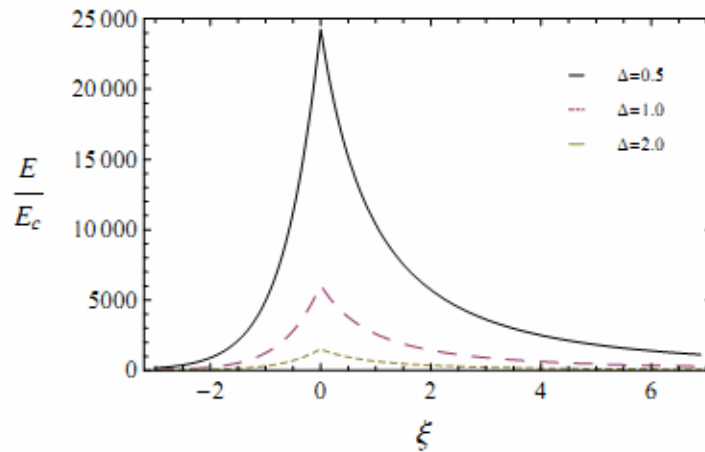


Рисунок 4. График электрического поля построен в единицах критического поля E_c как функция радиальной координаты ξ , показывая резкий пик на радиусе ядра, для выбранных значений Δ

Вращение ядер звездных размеров состоящих из ядерной материи в классической электродинамике. В разделах 2 и 3 мы видели, что массивное ядро с ядерной плотностью обладает ненулевым распределением заряда, хотя система, в целом, остается нейтральной (подробнее смотрите таблицу 1). В этом разделе мы исследуем случай, в котором распределению заряда задано вращение вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega} = \{0, 0, \omega\}$. Таким образом, магнитное поле результирующей плотности тока вычисляется с помощью данного распределения зарядов. Рассмотрим распределение заряда, движущего определенным образом, так чтобы в каждой точке пространства плотность заряда и плотность тока оставались постоянными. В этом случае магнитное поле определяется следующим образом:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}), \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{\omega}}{c^2} \times \vec{F}(\vec{r}), \quad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (11)$$

где \vec{A} – векторный потенциал магнитного поля; $\vec{F}(\vec{r})$ – суперпотенциал в общей форме; ϵ_0 – электрическая постоянная. В случае сферической симметрии, $\vec{F}(\vec{r})$ может рассматриваться как радиальная величина (смотрите работу Марша [19]). Написав $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{e}_r F(r)$, где \vec{e}_r является единичным радиальным вектором, можно получить следующее уравнение:

$$F(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r'^2 \frac{d}{dr'} [r' V(r')] dr'. \quad (12)$$

Это выражение позволяет вычислить магнитное поле, создаваемое вращением любого сферически-симметричного распределения заряда с помощью электростатического кулоновского потенциала. Следует обратить внимание, что за счет вращения форма нейтронной звезды в действительности должна деформироваться и из-за этого отличаться от сферической симметрии. Поскольку мы заинтересованы в оценке порядка величины равного магнитному полю, то для упрощения задачи можно пренебречь искажением формы нейтронной звезды. Таким образом, магнитное поле определяется как

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta, \quad (13)$$

где

$$B_r = \frac{2\omega F}{c^2 r} \cos \theta, \quad B_\theta = -\frac{2\omega}{c^2} \left[\frac{F}{r} + \frac{r}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{F}{r} \right) \right] \sin \theta, \quad (14)$$

B_r – радиальная составляющая; B_θ – угловая составляющая магнитного поля; θ – угол между r и осью z ; \vec{e}_θ – единичный вектор по θ . Следовательно, выражение для величины магнитного поля (по абсолютному значению) можно записать в виде

$$B(r, \theta) = \frac{\omega r}{c^2} \sqrt{\left(\frac{2F}{r^2}\right)^2 + \left\{ \frac{4F}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{F}{r}\right) + \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{F}{r}\right) \right]^2 \right\} \sin^2 \theta} . \quad (15)$$

Используя соотношение между r и ξ

$$r = R_c + \left(\frac{\pi}{12}\right)^{1/6} \frac{\Delta}{\sqrt{\alpha}} \frac{\hbar}{m_\pi c} \xi \quad (16)$$

возможно оценить величину магнитного поля. Подробности приведены на рисунках 5, 6, 7 и 8.

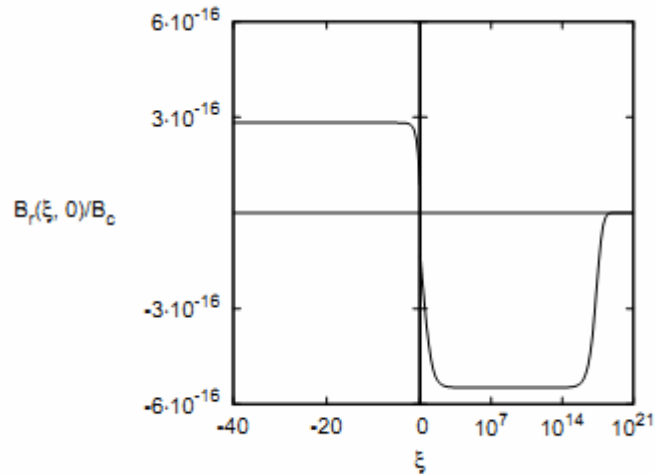


Рисунок 5 – Радиальная составляющая магнитного поля B_r построена как функция радиальной координаты ξ в единицах критического поля $B_c = m_e^2 c^3 / e \hbar \approx 4.5 \times 10^{13}$ Гауссов. Здесь период берется как $P = 10$ мс (миллисекунд), $\theta = 0$, $\Delta = 1$ и радиус ядра $R_c = 10$ км. Обратите внимание на то, что B_r рассматривается на полюсах звезды, где она имеет максимальное значение. Вне звезды B_r имеет очень небольшую отрицательную величину и она стремится к нулю

Анализируя рисунок 5, можно увидеть, что B_r имеет очень маленькое значение, которое почти не влияет на величину поля за исключением полюсов звезды. Напротив, B_θ имеет значения, превышающее критическое магнитное поле вблизи поверхности ядра, хотя оно локализовано в узкой области между положительно и отрицательно заряженных оболочек, как ожидалось на рисунке 6. Вне ядра магнитное поле становится отрицательным. Величина поля имеет очень маленькое значение, которое, в конечном счете, исчезает.

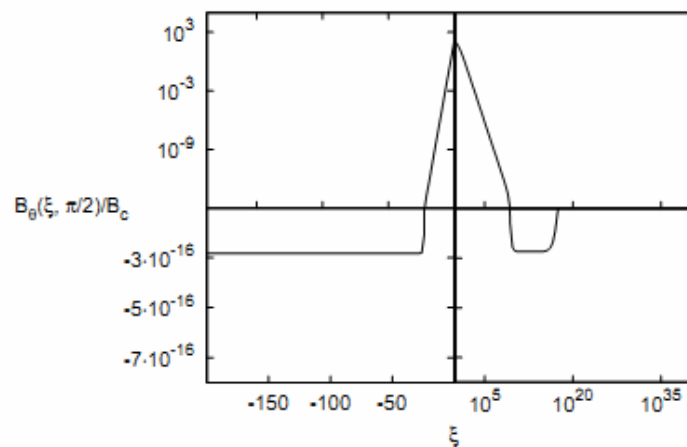


Рисунок 6 – Угловая составляющая магнитного поля B_θ построена в единицах B_c . Здесь $P = 10$ мс, $\theta = \pi/2$, $\Delta = 1$ и $R_c = 10$ км. Заметьте, что B_θ рассматривается на экваторе, где она имеет максимальное значение. Внутри звезды она имеет очень маленькое постоянное отрицательное значение. Вне звезды сначала становится отрицательным, потом стремится к нулю

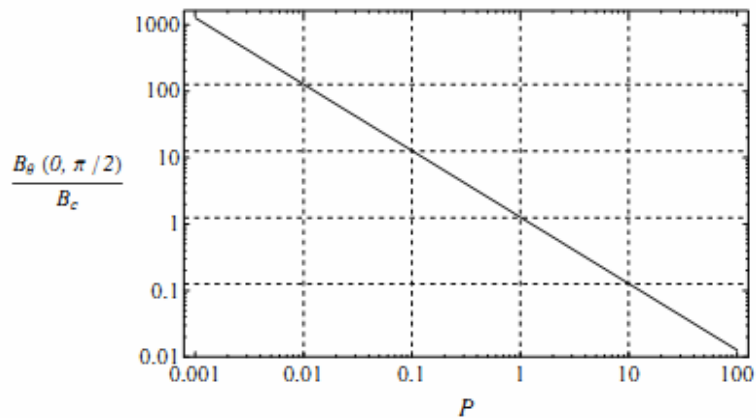


Рисунок 7 – Величина магнитного поля построена как функция периода P звезды в единицах критического поля B_c в логарифмической шкале на экваториальной поверхности ядра радиусом $R_c = 10$ км

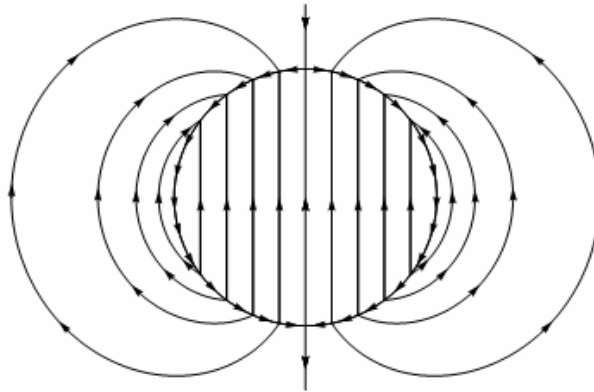


Рисунок 8 – Схематическое изображение магнитных силовых линий. Вне звезды магнитное поле выглядит как поле диполя. Дополнительные линии (стрелки) вдоль поверхности звезды указывают на сверхкритическое значение магнитного поля между положительно и отрицательно заряженными оболочками

На рисунке 7 величина магнитного поля представлена в зависимости от периода вращения P на экваториальной поверхности ядра. Практически, этот график показывает верхний предел возможных значений магнитного поля в диапазоне от 1 мс до 100 с. Рисунок 8 описывает магнитные силовые линии внутри, снаружи и на поверхности звезды. Оказалось, что силовые линии выше критического магнитного поля прижаты между двумя оболочками вдоль поверхности ядра.

В таблице 1 схематически представлены электродинамические свойства нейтральной конфигурации с разным распределением заряда. Все параметры выбраны для того, чтобы показать общие характеристики систем. Анализируя магнитные поля этих конфигурации, можно легко увидеть сходство между кулоновским потенциалом V и радиальной составляющей магнитного поля B_r , а также между электрическим полем E и угловой (тангенциальной) составляющей магнитного поля B_θ для обеих идеализированной и реальной конфигураций. В нашем случае магнитное поле показывает общие с предыдущими конфигурациями свойства, хотя и имеет свои особенности, представляющие гладкие переходы в областях, близких к поверхности ядра. Для того чтобы проверить правильность наших результатов мы рассмотрели аналогичные случаи. Первая мысль, которая приходит на ум, когда речь идет о положительно и отрицательно заряженных сферических оболочках с постоянной толщиной порядка λ_e в сравнении с радиусом $R_c = 10$ км нейтронной звезды, это предположить распределение заряда вдоль сферической поверхности. Поскольку у нас имеются две сферические оболочки, то в качестве аналогичного примера этой системы можно исследовать электродинамические свойства сферического конденсатора. На самом деле, этот пример показал аналогичное с решением уравнения Томаса-Ферми поведение кулоновского потенциала V и B_r , а также огромную разницу порядков B_r и B_θ , однако, электрические поля E и B_θ отличались от

наших результатов. Кроме того, случаем сферического конденсатора не объясняется, наличие непрерывного B_θ на границе заряженных оболочек. Вдобавок ко всем выше приведенным аргументам, также имеется некоторое расстояние между положительно и отрицательно заряженными поверхностями, тогда как в нашем случае расстояние между оболочками было равно нулю. Таким образом, необходимо было рассмотреть еще одну альтернативную задачу в целях проверки. На этот раз были рассмотрены две противоположно заряженные сферические слои с объемным распределением заряда. Действительно, мы выбрали этот пример очень удачно, и взяли его достаточно простым. Он пояснил, все общие электродинамические свойства обеих систем. В результате B_r и B_θ оказались функциями толщины сферических слоев. При толщине порядка λ_e , наблюдается огромная разница в магнитных полях, и поскольку заряд был распределен в заданном объеме с различными знаками, электрическое поле E и угловая составляющая магнитного поля B_θ оказываются непрерывными.

Заключение. В данной работе мы исследовали поведение магнитного поля, создаваемого вращением ядра звездных размеров состоящего из ядерного вещества, на основе исследовательских работ Руффини [13] и Попова [18], с помощью методики, разработанной Маршем [19].

В частности, для вращающейся системы с периодом 10 мс, получено магнитное поле порядка критического поля вблизи поверхности и проанализированы магнитные силовые линии.

Согласно нашим результатам, магнитное поле нейтронной звезды может быть образовано его твердотельным вращением, приводящее к формированию постоянного магнитного поля в начальные моменты рождения звезды.

Исследования магнитного поля в общей теории относительности для гравитирующей системы вырожденных фермионов в бета-равновесии выходит за рамки настоящей работы. Мы планируем исследовать эту проблему в ближайшее время.

REFERENCES

- 1 Ginzburg V.L., *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 156, (1964) 4346 [Engl. transl.: Sov. Phys. Doklady 9, 329332].
- 2 Woltjer L., *ApJ*. 140 (1964) 1309.
- 3 Ruderman M., *A&A*. 10 (1972) 427.
- 4 Ruderman M., *A&A*. 16 (1995) 207-216.
- 5 Reisenegger A., *ApJ*. 550 (2001) 860.
- 6 Reisenegger A., *Astron. Nachr.* 328, (2007) 1173.
- 7 Reisenegger A., Benguria R., Araya J.P., Lai D., *A&A*, 472 (2007) 233.
- 8 Thompson C., Duncan R., *ApJ* 408 (1993) 194.
- 9 Thompson C., Duncan R., *MNRAS* 275 (1995) 255.
- 10 Thompson C., Duncan R., *ApJ* 473 (1996) 322.
- 11 Tayler R.J., *MNRAS* 161 (1973) 365.
- 12 Spruit H., *A&A* 381 (2002) 923.
- 13 Ruffini R., Rotondo M., Xue S.-S., *Int. J. Mod. Phys. D* 16 (2007) 1.
- 14 Lieb E., Simon B., *Phys. Rev. Lett.* 31 (1973) 681.
- 15 Pomeranchuk I., Smorodinsky Ya., *J. Phys., USSR* 9 (1945) 97.
- 16 Ferreira J., Ruffini R., Stella L., *Phys. Lett. B* 91 (1980) 314.
- 17 Ruffini R., Stella L., *Phys. Lett. B* 102 (1981) 442.
- 18 Popov V., Rotondo M., Ruffini R., Xue S.-S., *arxiv: 0903.3727v1*.
- 19 Marsh J.S., *Am. J. Phys.* 50 (1) (1982) 51.

Резюме

К. А. Бошкаев

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан)

НЕЙТРОН ЖҰЛДЫЗДАРДЫҢ МАГНИТ ӨРІСІН ЗЕРТТЕУ

Жұмыста біз тұтастай нейтрал айныған жүйені қарастырамыз. Жүйенің өлшемі жұлдыздың өлшемімен тең. Жүйе N_n нейтроннан, N_p протоннан, N_e электроннан құралған және олар бета тепе-теңдікте тұр. Мұндай жүйеде ядролық тығыздықпен, массалық саны $A \approx 10^{57}$ жуық, зарядтың таралуы нөлден өзгеше болады. Біз осы жүйе қатты дене іспетті тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналғанда пайда болатын магнит өрісін классикалық электродинамика аясында зерттейміз.

Тірек сөздер: Томас-Ферми моделі, нейтрондық жұлдыздың ядросы, магнит өрісі.

Summary

K. A. Boshkayev

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan)

INVESTIGATION OF THE MAGNETIC FIELD OF NEUTRON STARS

We consider a degenerate globally neutral system of stellar dimensions consisting of N_n neutrons, N_p protons and N_e electrons in beta equilibrium. Such a system at nuclear density having mass numbers $A \approx 10^{57}$ can exhibit a charge distribution different from zero. We present the analysis in the framework of classical electrodynamics to investigate the magnetic field induced by this charge distribution when the system is allowed to rotate as a whole rigid body with constant angular velocity around the axis of symmetry.

Keywords: Thomas-Fermi model, neutron star core, magnetic field.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 517.9.92.942

Б. К. ТЕМИРОВ

(Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан)

ОСЦИЛЛЯЦИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ m -ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКОВ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Аннотация. С бурным развитием импульсной техники и технологии, стали интенсивно использовать импульсные системы в различных отраслях экономики, автоматике и автоматического управления. Такие системы обычно описываются разностными уравнениями. В статье установлены достаточные условия осцилляции решений линейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями m -произвольного нечетного порядков.

Ключевые слова: осцилляция, нелинейный интегральный член, неравенство Иенсена.

Тірек сөздөр: осцилляция, сызыкты емес интеграл мүшесі, Иенсен теңсіздігі.

Keywords: oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.

В данной статье устанавливается достаточное условие осцилляции решений нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями m -произвольного нечетного порядков с эллиптическим оператором вида

$$L_m[u(n, x)] + a(n) \sum_{i,r=1}^m A_{i,k}(x) \frac{\partial^2 u(n, x)}{\partial x_i \partial x_k} + A_i(n, x)U(n, x) + \int_Q K(n, x, y)U(n, x)dy + f\{n, xU(n, x)\} = 0, \quad (1)$$

где m – произвольное нечетное число.

Введем обозначения:

$$L_1[U(n, x)] = \Delta U(n, x) = U(n+1, x) - U(n, x) \quad W_2(n) = P_{2(n)}L_1[U(n, x)]$$

$$L_2[U(n, x)] = \Delta W_{2(n)} \quad W_3(n) = P_{3(n)}L_2[U(n, x)]$$

$$\dots \dots \dots$$

$$L_m[U(n, x)] = \Delta W_{m-1}(n).$$

В уравнении (1) $L_m[U(n, x)]$ рассмотрена когда $P_{m-1}(n) = 1 > 0 \quad \forall n \geq n_0$ как заданные функции. В дальнейшем будем исходить из определений данной в работе [1].

Определение 1. Всякую функцию $U(n,x)$, определенную в области $\bar{D}_0 = \{n \geq n_0, x \in \bar{Q}\}$ называют правильной.

Определение 2. Правильную функцию $U(n,x)$ называют положительной {отрицательной}, если $\exists n_1 \geq n_0$ такое, что $\forall (n,x) \in D_1 = \{n \geq n_1, x \in Q\}$ $U(n,x) > 0 \{U(n,x) < 0\}$.

Определение 3. Правильную функцию $U(n,x)$ называют C-неосциллирующей, если она либо не положительна, либо не отрицательно. В противном случае ее называют C-осциллирующей.

Предполагается: 1) $Q \subset R^p$ – открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial Q$; 2) n -натуральное число; 3) $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in Q$; 4) $A_1(n,x)$ - непрерывные функции по $x \in Q$ для каждого фиксированного натурального числа $n \geq n_0$; 5) $a(n)$ – заданная функция

натурального аргумента. 6) $L^0 = \sum_{i,k=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}$ – эллиптический оператор и предполагается, что а)

для любого набора вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p \cdot \sum_{i,j=1}^p A_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{k=1}^p \xi_k^2, \mu > 0, j = \overline{1, p}$.

б) $A_{ik}(x) = A_{ki}(x)$ - достаточно гладкие функции (т.е. достаточно предполагать, чтобы эти функции имели частные производные второго порядка, удовлетворяющие в замкнутой области \bar{Q} некоторому условию Гельдера).

7) $\forall (n,x) \in D_0 = \{n \geq n_0, x \in Q\}$ и $\forall z > 0$ $f(n,x,z) \geq 0, f(n,x,-z) \geq 0$

Осцилляция решений нелинейного интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями различного порядка исследованы: 1-го порядка в [1], 2-го, 4-го и произвольного четного порядков в [3] и 3-го, 5-го порядков в [5, 6]. с эллиптическими операторами. Известно [4], что все собственные значения краевой задачи $L^0 Y(x) + \lambda_0 Y(x) = 0, Y(x)|_{\tau} = 0$ (2) положительны, наименьшему собственному значению λ_0 соответствует единственная нормированная собственная функция $\phi(x) > 0, \forall x \in Q$ (Нормированная в смысле $\int_Q \phi(x) dx = 1$. Если область

$Q = \{a_k < x_k < b_k, k = \overline{1, p}\}$ - параллелепипед, то

$$\lambda_0 = \sum_{k=1}^p \frac{\pi^2}{(b_k - a_k)^2}; \phi(x) = \ell \prod_{k=1}^p \sin \frac{\pi(x_k - a_k)}{b_k - a_k}$$

Если Q – выпуклая область, то $\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{p-1}{d} \right)$, где ρ – радиус наибольшего шара, впи-

санного в область Q . d – диаметр область Q ; p – размерность область Q . Приведем следствие формулы Грина.

Следствие 1. Для всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $U(n,x) \in (N)$ (Символ $U(n,x) \in (N)$ означает, что $U(n,x)|_{\tau} = 0 \forall n \geq n_0$) выполняется

$$\int_Q \phi(x) L^0 U(n,x) dx = -\lambda_0 \int_Q \phi(x) U(n,x) dx \quad \forall n \geq n_0$$

Следствие 2. Для всякой не отрицательной дважды непрерывно дифференцируемой функции $U(n,x)$

$$\int_Q \phi(x) L^0 U(n,x) dx \geq -\lambda_0 \int_Q \phi(x) U(n,x) dx \quad \forall n \geq n_1$$

Теорема Иенсена. Пусть 1) $f(z)$ – непрерывная выпуклая на $(0, \infty)$ функция (дважды дифференцируемая на $(0, \infty)$), функция $f(x)$ является выпуклой на этом интервале тогда и только тогда, когда 1) $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$; 2) $\Phi(x)$ непрерывная положительная функция, непрерывная по переменным группы x . Тогда имеет место неравенство

$$\int_{\varrho} \phi(x) f[U(n, x)] dx \geq f \left\{ \int_{\varrho} \phi(x) U(n, x) dx \right\}$$

Это соотношение называют неравенство Иенсена. Доказательство теоремы приведены в работе [2].

Лемма 1. Пусть 1) $\sum_{s=1}^{\infty} a(s) = \infty$, 2) $\varphi(z)$ – неубывающая функция $\forall z \geq 0$

3) m – частное число. Тогда неравенство

$$L_m[\sigma(n)] + a(n)\varphi[\sigma(n)] \leq 0 \tag{3}$$

не имеет положительного решения. $y(n) = |\sigma(n)|$.

Доказательство. Допустим, что неравенство (3) имеет положительное решение, $\sigma(n), \forall n \geq n_1$. Тогда $\Delta W_m(n) \leq 0$, поэтому $W_m(n)$ – неубывающая функция. Следовательно, логически возможны только следующие допущения: 1) либо $\exists n_2 \geq n_1$ такое, что $W_m(n_2) = c < 0$; 2) либо $W_m(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$. Рассмотрим первый случай. Докажем, что это предположение противоречит неравенству $\sigma(n) > 0 \quad \forall n \geq n_1$. Отсюда

$$W_{m-1}(n) = P_m(n)\Delta W_{m-1}(n) \leq c < 0 \quad \forall n \geq n_1$$

$$W_{m-1}(n) \leq W_{m-1}(n_2) + c \sum_{S=n_2}^{n-1} q_m(S) \rightarrow -\infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что $\exists c_1 < 0, \exists n_3 \geq n_2$ **такие, что** $W_{m-1}(n) \leq c_1 < 0 \quad \forall n \geq n_3$. Продолжая рассуждать аналогично почти также получил, что $\exists c_0 < 0, \exists n^0 \geq n^0$ также, что

$$\begin{aligned} W_2(n) &\leq c_0 < 0 \quad \forall n \geq n^1 \\ P_2(n)\Delta\sigma(n) &\leq c_0 < 0 \quad \forall n \geq n^1 \\ \Delta\sigma(n) &\leq c_0 q_2(n) \end{aligned}$$

Далее суммируя это неравенство от n^1 до $n - 1$, получи $\sigma(n) \leq \sigma(n^1) + c_0 \sum_{S=n^1}^{n-1} q_2(S) \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Это соотношение противоречит неравенству $\sigma(n) > 0 \quad \forall n \geq n_3$.

Поэтому, первое предположение несостоятельны. Рассмотрим, второй случай

$$W_m(n) = P_m(n)\Delta W_{m-1}(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$$

$W_{m-1}(n)$ – неубывающая функция $\forall n \geq n_1$. Тогда логически возможны только следующие допущения:

1) либо $\exists n_2 \geq n_1$ такое, что $W_{m-1}(n_2) = c > 0$

2) либо $W_{m-1}(n) \leq 0 \quad \forall n \geq n_1$

Рассмотрим первый случай либо $W_{m-1}(n) = P_{m-2}(n)\Delta W_{m-2}(n) = c \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$

$$W_{m-2}(n) \geq W_{m-2}(n_2) + c \sum_{S=n_2}^{n-1} q_{m-1}(S) \rightarrow -\infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\exists c > 0, \exists n_3 > n_2$ **такие, что** $W_{m-2}(n) \geq c_1 \quad \forall n \geq n_2$. Продолжая такие же рассуждения, получим, что $\exists c_0 > 0, \exists n^0 \geq n_0$ такие, что $W_2(n) = P_2(n)\Delta\sigma(n) \geq c_0$. Тогда $\sigma(n) \geq \sigma(n^0) = \gamma$. С учетом этого неравенства из (3) имеем $W_m(n) + a(n)\beta \leq 0 \quad \forall n \geq n^0, \beta\varphi(\gamma)$.

Учитывая следующее неравенство $W_m(n) \geq 0 \forall n \geq n_1$ получим, что последнее неравенство противоречит условию η леммы, поэтому, верно предположение

1) противоречит условиям леммы. Поэтому, верно предположение

2) что $W_{m-2}(n) \leq 0 \forall n \geq n_1$

$$W_{m-1}(n) = P_{m-1}(n)\Delta W_{m-2}(n) \leq 0 \forall n \geq n_1.$$

$W_{m-2}(n)$ – невозрастающая функция $\forall n \geq n_1$. Логически возможны только следующие предположения: 1) либо $\exists n_2 \geq n_1$ такое, что $W_{m-2}(n) = c \leq 0 \forall n \geq n_1$

2) либо $W_{m-2}(n) \geq 0 \forall n \geq n_1$. Первое предположение противоречит неравенству, что $\sigma(n) > 0 \forall n \geq n_1$. Следовательно, $W_{m-2}(n) \geq 0 \forall n \geq n_1$. Производя аналогичные рассуждения получим, что $W_2(n) \geq 0 \forall n \geq n_1$. Отсюда вытекает, что $\sigma(n) \geq \sigma(n_1) \equiv c_0 > 0$. С учетом этого неравенства из неравенств (2) имеем $\Delta W_m(n) + ca(n) \leq 0 \forall n \geq n_1$

Суммируя неравенство от n_1 до $n - 1$ получим $W_m(n) + c \sum_{m=n_1}^{n-1} a(m) \leq W_m(n_1) \forall n \geq n_1$. Так как

$W_m(n) > 0$ то усиливая неравенство получим $c \sum_{m=n_1}^{n-1} a(m) \leq W_m(n_1)$. Которое противоречит условию

1) леммы.

Замечание 1. Если выполнены условия 2), 3) леммы 1, а условия 1) не выполнены, то неравенство (3) может иметь положительное решение.

Замечание 2. Если 1) выполнены условия 1), 3) леммы 1; 2) m -нечетное число, то неравенство (3) может иметь положительное решение.

Лемма 2. Если 1) $\sum_{m=n_1}^{\infty} a(m) = \infty$; 2) $\varphi(z) > 0$ непрерывная неубывающая функция $\forall z > 0$;

3) m – нечетное число, то для положительного решения $\sigma(n)$ неравенства (3) имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = 0$.

Доказательство. Предположим, что неравенство (3) имеет положительное решение $\sigma(n) > 0 \forall n \geq n_1$. Рассуждая почти также, как и при доказательстве леммы 1, показывается, что $\forall n \geq n_1, W_m(n) \geq 0$ 1) $\sigma(n)$ невозрастающая функция $\forall n \geq n_1$ 2) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = c > 0$. Допустим, что $c \neq 0$. Тогда $\forall n \geq n_1 \varphi[\sigma(n)] \geq \varphi(c) \equiv c_0 > 0$ С учетом этого, из неравенства (3) имеем $\Delta W_m(n) + c_0 a(n) \leq 0 \forall n \geq n_1$. Так как $W_m(n) \geq 0 \forall n \geq n_1$ то это неравенство противоречит условию 1) леммы 2. Следовательно, предположение $c \neq 0$ приводит к противоречию. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(n) = 0$. Скажем, что выполнено 1) условие (E₁) если

$$\forall (n, x, y) \in D^0_0 = \{n \geq n_0, x \in \overline{Q}, y \in \overline{Q}\}. A_1(n, x) \geq a_1(n) \geq 0, K(n, x, y) \geq a(n, x) \varphi \geq 0$$

$$\int_Q a(n, x) dx \geq a_2(n) \geq 0.$$

2) условие (T₁) если $\forall (n, x) \in \overline{D}_0$ и $\forall z > 0$

$$f(n, x) \geq g_0(n)z, f(n, x, -z) \leq -g(n)z, g_0(n) \geq 0$$

3) условие (T₂) если $\forall (n, x) \in \overline{D}_0$ и $\forall z > 0$

$$f(n, x, z) \geq g(n)\varphi(z); f(n, x, -z) \leq -g(n)\varphi(z), g_0(n) \geq 0, \varphi(z).$$

Теорема 1. Пусть 1) выполнены условия (E_1) , (T_1) ; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} g_0(n)n^{m-2} < \infty$, тогда каждое решение $U(n, x) \in (N)$ уравнения (1) либо осциллирует, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Доказательство. Допустим, что уравнение (1) имеет c -неосциллирующее решение $U(n, x) \in (N)$. Тогда неравенство $\Delta^m y(n) + g_0(n) y(n) \leq 0$ имеет положительное решение $y(n) = |\sigma(n)|$ что противоречит теореме 1 из [6] и леммы 2. Следовательно, предположение существования C -неосциллирующего решения $U(n, x) \in (N)$ уравнения (1) приводят к противоречию. Поэтому либо решение C -осциллирует, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Теорема 2. Пусть 1) выполнены условия (E_1) , (T_2) ;

2) $[(z)] \geq C_0 = \text{const} > 0, \forall z > 0$; 3) $\sum_{m=0}^{\infty} g(m) = \infty$. Тогда каждое решение $U(n, x) \in (N)$ уравнения (1) либо c -осциллирует, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет c -неосциллирующее решение $U(n, x) \in (N)$. Тогда неравенство $\Delta^m y(n) + c_0(n) y(n) \leq 0$ имеет положительное решение $y(n)$.

Это утверждение противоречит условию 3) теоремы 2. Следовательно, предположение существования c - не осциллирующего решения $U(n, x) \in (N)$ уравнения (1) приводит к противоречию, поэтому решение либо c -осциллирует, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Теорема 3. Пусть а) выполнены все условия теоремы 2) $a(n) \geq 0 \forall n \geq n_0$ Тогда все правильные решения $U(n, x)$ уравнения (1) либо c -осциллирует, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Теорема 4. Пусть 1) выполнены условия (E_1) , (T_1) ; 2) $\varphi(z)$ – возрастающая непрерывная выпуклая на $(0, \infty)$ функция; 3) $\sum_{s=0}^{\infty} g(s) = \infty$. Тогда каждое решение $U(n, x) \in (N)$ уравнения (1) либо c -осциллирует, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$. Доказательство приводится аналогично к доказательству теоремы 3.

Теорема 5. Если а) выполнены все условия теоремы 4. б) $a(n) \geq 0 \forall n \geq n_0$, то все решения $U(n, x)$ уравнения (1) либо осциллирует, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Быков Я.В. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка. – Фрунзе: Илим, 1985. – 263 с.
- 2 Быков Я.В., Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго, четвертого и произвольного четного порядков. – Фрунзе: Илим, 1990. – 124 с.
- 3 Быков. Я.В., Мерзлякова Г.Д., Шевцов Е.И. Об осцилляторности решений нелинейных разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 2, № 8. – С. 1460-1473.
- 4 Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М: Высшая школа, 1977. – 413 с.
- 5 Шарифова Т. О колеблемости решений некоторых разностных уравнений // Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 1974. – Вып. 23. – С. 35-43.
- 6 Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка // Труды межд. конференции «Программные системы: теория и приложения» института программных систем РАН г. Переславль-Залесский. – 2006. – С. 379-387.
- 7 Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями пятого порядка с нелинейным интегральным членом // Материалы межд. науч. конфер., посвящ. 75-летию акад. НАН РК Абдильдина Мейрхана Мубараковича «Актуальные проблемы современной физики». – Алматы, 2013. – С. 42-45.

REFERENCES

- 1 Bykov Ja.V. Oscilljacija reshenij operatorno-raznostnyh uravnenij s konechnymi raznostjami pervogo porjadka. Frunze: Ilim, 1985. 263 s.
- 2 Bykov Ja.V., Temirov B.K. Oscilljacija reshenij operatorno-raznostnyh uravnenij s konechnymi raznostjami vtorogo, chetvertogo i proizvol'nogo chetnogo porjadkov. Frunze: Ilim, 1990. 124 s.
- 3 Bykov. Ja.V., Merzljakova G.D., Shevcov E.I. Ob oscilljatornosti reshenij nelinejnyh raznostnyh uravnenij. Differencial'nye uravnenija. 1975. T. 2, № 8. С. 1460-1473.
- 4 Mihlin S.G. Linejnye uravnenija v chastnyh proizvodnyh. M: Vysshaja shkola, 1977. 413 s.
- 5 Sharifova T. O koleblemosti reshenij nekotoryh raznostnyh uravnenij. Voprosy vychislitel'noj i prikladnoj matematiki. Tashkent, 1974. Vyp. 23. S. 35-43.
- 6 Temirov B.K. Oscilljacija reshenij nelinejnogo integro-raznostnogo uravnenija s konechnymi raznostjami tret'ego porjadka. Trudy mezhd. konferencii «Programmnye sistemy: teorija i prilozhenija» instituta programmnyh sistem RAN g. Pereelavl'-Zalesskij. 2006. S. 379-387.
- 7 Temirov B.K. Oscilljacija reshenij operatorno-raznostnyh uravnenij s konechnymi raznostjami pjatogo porjadka s nelinejnym integral'nym chlenom. Materialy mezhd. nauch. konfer., posvjashh. 75-letiju akad. NAN RK Abdil'dina Mejrhana Mubarakovicha «Aktual'nye problemy sovremennoj fiziki». Almaty, 2013. S. 42-45.

Резюме

Б. К. Темиров

(Ж. Баласағын атындағы Қырғыз ұлттық университеті, Бішкек, Қырғызстан)

ШЕТКІ АЙЫРЫМЫ БАР m -ТУЫНДЫ ТАҚ ТҮРЛЕРІНІҢ ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ОПЕРАТОРЛАРЫМЕН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ИНТЕГРАЛДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ-АЙЫРЫМ ТЕНДЕУІ ОСЦИЛЛЯЦИЯ ШЕШІМІ

Импульстік техника мен технологиялардың қызу дамуына байланысты экономика, автоматика және автоматты басқарудың әртүрлі салаларында импульстік жүйе қарқынды пайдаланыла бастады. Мұндай жүйелер негізінде айырым және теңдеулер арқылы сипатталады. Берілген мақалада шеткі айырымы бар m -туынды тақ түрлерінің сызықты емес интегралды-айырым теңдеуінің осцилляция шешімінің жеткілікті жағдайы анықталды.

Тірек сөздер: осцилляция, сызықты емес интеграл мүшесі, Иенсен теңсіздігі.

Summary

B. K. Temirov

(Kyrgyz national university named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan)

OSCILLATION OF THE SOLUTIONS OF NONLINEAR DIFFERENCE-INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH ELLIPTIC OPERATOR AND FINITE DIFFERENCES m -ARBITRARY ODD ORDER

With rapid development of pulse techniques and technologies have been intensively used pulse systems in various industries, automation and automatic control. Such systems are usually described by difference equations. In this paper sufficient conditions for the oscillation of solutions of linear integro-differential equations with finite differences of arbitrary m -odd orders.

Keywords: oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.

Поступила 05.05.2014 г.

Б. К. ТЕМИРОВ

(Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан)

**ПРИЗНАК ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО
ИНТЕГРО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ
С КОНЕЧНЫМИ РАЗНОСТЯМИ
 m -ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКОВ**

Аннотация. В статье установлены достаточные условия осцилляции решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями пятого порядка с нелинейным интегральным членом. Такие уравнения широко применяются в науке и технике при описании реальных процессов систем, в частности, электрических, механических, биологических, демографических, экономических и других. А также для решения некоторых теоретических вопросов с применением ЭВМ для приближенного решения различных задач математической физики.

Ключевые слова: осцилляция, нелинейный интегральный член, неравенство Иенсена.

Тірек сөздөр: осцилляция, сызыкты емес интеграл мүшесі, Иенсен теңсіздігі.

Keywords: oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.

В этапе научно технического прогресса, стало бурно развиваться импульсная техника и технология, экономика, автоматика и автоматического управления привело к интенсивному, обширному использованию импульсных систем. Эта система, которая описываются разностными уравнениями. Поэтому актуальными становится качественное исследование решений, особенности их колеблениости, линейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями m -произвольного нечетного порядков, так как конечно-разностные методы являются универсальными методами при реализации на персональных компьютерах.

Рассмотрим уравнение в виде

$$L_m[U(n, x)] + A_1(n, x)U(n, x) + \int_Q K(n, x, y)U(n, x, y)dy = 0. \quad (1)$$

Введем обозначения: 1) QCR^p – открытая ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial Q$; 2) n – натуральное число; 3) $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in Q$; 4) $A_1(n, x)$ – непрерывная функция по $x \in \bar{Q} = Q \times \Gamma$ для каждого фиксированного натурального числа n ; 5) $\Delta U(n, x) = U(n+1, x) - U(n, x)$;

$$L_1[U(n, x)] = \Delta U(n, x) \quad W_1(n) = P_1(n)L_1[U(n, x)]$$

$$L_2[U(n, x)] = \Delta W_1(n) \quad W_2(n) = P_2(n)L_2[U(n, x)]$$

$$\dots\dots\dots$$

$$L_m[U(n, x)] = \Delta W_{m-1}(n)$$

В уравнении (1) $L_m[U(n, x)]$ рассматривается когда $P_{m-1}(n) = 1 > 0 \quad \forall n \geq n_0$ заданные функции. Будем исходит из следующих определений [1].

Определение 1. Всякую функцию $U(n, x)$ определенную в области $\bar{D}_0 = \{n \geq n_0, x \in \bar{Q}\}$, называют правильной.

Определение 2. Правильную функцию $U(n, x)$, будем называть неотрицательной {не положительной}, если $\exists n_1 \geq n_0$ такое, что $\forall (n, x) \in D_1, U(n, x) \geq D, V(n) = \int_Q U(n, x)dx > 0 \quad U(n, x) \leq 0,$

$$V(n) = \int_Q U(n, x)dx < 0.$$

Определение 3. Правильную функцию $U(n, x)$ называют положительной {отрицательной}, если $\exists n_1 \geq n_0$ такое, что $\forall (n, x) \in D_1 = \{n \geq n_1, x \in Q\} U(n, x) > 0$ $\{U(n, x) < 0\}$.

Определение 4. Правильную функцию $U(n, x)$ называют с-неосциллирующей, если она либо положительна, либо неотрицательна. В противном случае ее называют с-осциллирующей.

Лемма 1. Пусть 1) $\sum_{s=0}^{\infty} a(s) = \infty$; 2) m – четное число; 3) $\varphi(z)$ – непрерывная функция $\forall z > 0$.

Тогда неравенство

$$L_m[V(n)] + a(n)\varphi[V(n)] \leq 0 \quad (2)$$

не имеет положительного решения $y(n) = |V(n)|$.

Доказательство. Предположим, что неравенство (2) имеет положительное решение, $V(n) \forall n \geq n_1$. Тогда $\Delta W_m(n) \leq 0$. Следовательно $W_m(n)$ – невозрастающая функция. Здесь логически возможны только следующие допущения:

1) либо $\exists n_2 \geq n_1$ такое, что $W(n_2) = c < 0$;

2) либо $W_m(n) \geq 0 \forall n \geq n_1$.

Рассмотрим первый случай. Докажем, что это предположение противоречит неравенству $V(n) > 0 \forall n \geq n_1$. Как нам известно, что имеет неравенство

$$W_m(n) = P_m \Delta W_{m-1}(n) \leq c < 0 \quad \forall n \geq n_1.$$

Следовательно

$$W_{m-1}(n) \leq W_{m-1}(n_2) + c \sum_{s=n_2}^{n-1} q_m(s) \rightarrow -\infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что $\exists c_1 < 0, \exists n_3 \geq n_2$ также, что

$$W_{m-1}(n) \leq c_1 < 0 \quad \forall n \geq n_3.$$

Продолжая аналогично, такие же рассуждения получим, что $\exists c_0 < 0, \exists n^1 \geq n^0$ такие, что

$$\begin{aligned} W_2(n) &\leq C_0 < 0 \quad \forall n \geq n^1 \\ P_2(n)\Delta V(n) &\leq C_0 < 0 \quad \forall n \geq n^1 \\ \Delta V(n) &\leq C_0 q_2(n) \end{aligned}$$

Далее, суммируя это неравенство от n^1 до $n - 1$, получим

$$V(n) \leq V(n^1) + C_0 \sum_{m=n^1}^{n-1} q_2(m) \rightarrow -\infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Последнее соотношение противоречит неравенству $V(n) > 0 \forall n \geq n_1$. Следовательно, первое предположение несостоятельно. Рассмотрим, теперь второй случай

$$W_m(n) = P_m(n)\Delta W_{m-1}(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1.$$

$W_{m-1}(n)$ – неубывающая функция $\forall n \geq n_1$. В этом случае логически возможны только следующее предположения:

1) Либо $\exists n_0 \geq n_1$ такое, что $W_{m-1}(n) \geq C_0 > 0$.

2) Либо $W_{m-1}(n) \leq 0 \forall n \geq n_1$.

Рассмотрим первый случай $W_{m-1}(n) = P_{m-2}(n)\Delta W_{m-2}(n_2) = C > 0. \quad \forall n \geq n_2,$

$$W_{m-2}(n) \geq W_{m-2}(n_2) + C \sum_{s=n_2}^{n-1} q_{m-1}(s) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\exists C > 0$, $\exists n_3 > n_2$ такие, что $W_{m-2}(n) \geq C_1 \quad \forall n \geq n_2$. Продолжая такие же рассуждения, получим, что $\exists C_0 > 0$, $\exists n^0 \geq n_0$ такие, что $W_2(n) = P_2(n)\Delta V(n) \geq C_0$.

Тогда $V(n) \geq V(n^0) = \gamma$. С учетом этого неравенства из (2) имеем

$$\Delta W_m(n) + a(n)\beta \leq 0 \quad \forall n \geq n^0, \quad \beta = \varphi(\gamma).$$

Учитывая неравенство, $W_m(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_2$ получим, что последнее неравенство противоречит условию 1) леммы. Поэтому, предположение 1) противоречит условиям леммы. Следовательно, верно предположение 2) что $W_{m-1}(n) \leq 0 \quad \forall n \geq n_1$, $W_{m-1}(n) = P_{m-1}(n)\Delta W_{m-2}(n) \leq 0 \quad \forall n \geq n_1$.

$W_{m-2}(n)$ – невозрастающая функция $\forall n \geq n_1$. Логически возможны только следующие предположения: 1) либо $\exists n_2 \geq n_1$, такое, что $W_{m-2}(n_2) = C < 0 \quad \forall n \geq n_2$; 2) либо $W_{m-2}(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$.

Первое предположение противоречит неравенству, что $V(n) > 0 \quad \forall n \geq n_1$. Следовательно, $W_{m-2}(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$. Аналогично, рассуждая получим, что $W_2(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$. Отсюда вытекает, что $V(n) \geq V(n_1) \equiv C_0 > 0$. С учетом этого неравенства из неравенства (2) имеем $\Delta W_m(n) + Ca(n) \leq 0 \quad C = \varphi(C_0) \quad \forall n \geq n_1$.

Суммируя это неравенство от n_1 до $n - 1$, получим

$$W_m(n) + C \sum_{m=n_1}^{n-1} a(m) \leq W_m(n_1) \quad \forall n \geq n_1.$$

Так как $W_m(n) > 0$, то усиливая неравенство получим

$$C \sum_{m=n_1}^{n-1} a(m) \leq W_m(n_1)$$

которое противоречит условию 1) леммы.

Замечание 1. Если выполнены условия 2), 3) леммы 1, а условия не выполнены, то неравенство (2) может иметь положительное решение.

Пример 1. Пусть $P_2(n) = P_3(n) = \dots = P_{m-1}(n) = n + \sqrt{n(n+1)}$.

$$P_m(n) = 1; \quad a(n) = \frac{2}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+2})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})\sqrt{n}}$$

Тогда неравенство (2) имеет положительное решение $V(n) = \sqrt{n}$. Очевидно, что $a(n) \leq \frac{1}{4n^2}$;

$$\sum_{m=n_1}^{\infty} a(m) < \infty.$$

Замечание 2. Если 1) выполнены условия 1), 3) леммы 1; 2) m – нечетное число, то неравенство (2) может иметь положительное решение.

Лемма 2. Если 1) $\sum_{m=n_1}^{\infty} a(m) = \infty$; 2) $\varphi(z) > 0$ непрерывная неубывающая функция $\forall z > 0$; 3) m – нечетное число, то для положительного решения $V(n)$ неравенства (2) имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = 0.$$

Доказательство. Предположим, что неравенство (2) имеет положительное решение $V(n) > 0 \quad \forall n \geq n_1$. Далее будем рассуждать почти также, как и при доказательстве леммы 1 и показывается, что $\forall n \geq n_1 \quad W_m(n) \geq 0, \quad W_2(n) \leq 0$. Отсюда вытекает, что

1) $V(n)$ – невозрастающая функция $\forall n \geq n_1$. 2) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = C > 0$.

Допустим, что $C \neq 0$. Тогда $\forall n \geq n_1, \phi[V(n)] \geq \phi(C) \equiv C_0 > 0$. С учетом этого неравенства, из неравенство (2) имеем

$$\Delta W_m(n) + C_0 a(n) \leq 0 \quad \forall n \geq n_1.$$

Так как $W_m(n) \geq 0 \quad \forall n \geq n_1$, то это неравенство противоречит условию 1) леммы 2. Следовательно, предположение $C \neq 0$ приводит к противоречию. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = 0$. Скажем, что выполнено: 1) условие (E_0) , если $\forall(n, x, y) \in D_0 = \{n \geq n_0, x \in \bar{Q}, y \in \bar{Q}\} \quad A_1(n, x) \geq a_1(n) \geq 0, K(n, x, y) \geq 0$; 2) условие (E_1) , если $\forall(n, x, y) \in D_0^0 \quad K(n, x, y) \geq \alpha(n, x)\Phi(y) \geq 0, \int_Q \alpha(n, x)dx \geq a_2(n) \geq 0$ и $A_1(n, x) \geq a_1(n) \geq 0$.

Теорема. Пусть 1) выполнено условие (E_1) ; 2) $\sum_{s=0}^{\infty} a(s) = \infty$; 3) m -нечетное число. Тогда каждое решение $y(n)$ уравнения (1), либо осциллирует, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$.

Доказательство. Пусть $y(n) = 0 \quad \forall n \geq n_1$ положительное решение уравнения (1). Тогда имеет место неравенство.

$$L_m[y(n)] + a(n)y(n) \leq 0 \quad \forall n \geq n_1. \quad (3)$$

Отсюда по лемме 2 вытекает равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$. Пусть теперь $U(n, x)$ – неположительное решение уравнения (1). Тогда $Z(n, x) = -U(n, x)$ – неотрицательное решение этого уравнения. Поэтому неравенство (3) имеет положительное решение.

$$y(n) = \int_Q Z(n, x)\Phi(x)dx = -V(n)$$

Отсюда по лемме 2 имеем $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = -\lim_{n \rightarrow \infty} V(n)$.

Примечание 1. Если выполнены условия теоремы 1, то уравнение (1) может иметь не осциллирующее решение.

Пример 2. Пусть 1) $a(n) = \frac{1}{n+1}$; 2) $P_k(n) \equiv n+1, k = \overline{3, m}$.

Тогда $y(n) = \frac{1}{n}$ – решение уравнения (1).

Примечания 2. Если 1) выполнено условия а) $\phi(z) > 0$ – непрерывная неубывающая функция $\forall z > 0$; б) $a(n) \geq 0$. 2) m -нечетное число > 1 ;

3) $\sum_{s=0}^{\infty} a(s) < \infty$, то уравнение (1) может иметь неосциллирующее решение $y(n)$ для которого $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \neq 0$.

Пример 3. 1) $a(n) = \frac{1}{(n+1)^2}$; 2) $P_k(n) \equiv n+1$;

Тогда $V(n) = \frac{n+1}{n}$ – решение уравнения (1) и $\lim_{n \rightarrow \infty} V(n) = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1 Быков Я.В. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями первого порядка. – Фрунзе: Илим, 1985.

2 Быков Я.В., Мерзякова Г.Д., Шевцов Е.И. Об осцилляторности решений нелинейных разностных уравнений. – Дифференц. уравнения.

3 Быков Я.В., Темиров Б.К. Осцилляция решений операторно-разностных уравнений с конечными разностями второго, четвертого и произвольного порядков. – Фрунзе: ИЛИМ, 1990.

4 Темиров Б.К. Осцилляция решений нелинейного интегро-разностного уравнения с конечными разностями третьего порядка // Труды межд. конф. «Программные системы: теория и приложения» институт программных систем РАН г. Переславль-Залесский, 2006. – С. 379-387.

5 Темиров Б.К. Осцилляция решений интегро-дифференциально-разностного уравнения с конечными разностями пятого порядка с нелинейным интегральным членом // Материалы междунар. научной конф., посвящ. 75-летию акад. НАН РК Абдильдина Мейрхана Мубаракovichа «Актуальные проблемы современной физики». – Алматы, 2013. – С. 42-45.

REFERENCES

1 Bykov Ja.V. Oscilljacija reshenij operatorno-raznostnyh uravnenij s konechnymi raznostjami pervogo porjadka. Frunze: Ilim, 1985.

2 Bykov Ja.V., Merzjakova G.D., Shevcov E.I. Ob oscilljatornosti reshenij nelinejnyh raznostnyh uravnenij. Differenc. uravnenija.

3 Bykov Ja.V., Temirov B.K. Oscilljacija reshenij operatorno-raznostnyh uravnenij s konechnymi raznostjami vtorogo, chetvertogo i proizvol'nogo porjadkov. Frunze: ILIM, 1990.

4 Temirov B.K. Oscilljacija reshenij nelinejnogo integro-raznostnogo uravnenija s konechnymi raznostjami tret'ego porjadka. Trudy mezhd. konf. «Programmnye sistemy: teorija i prilozhenija» institut programmyh sistem RAN g. Pereslavl'-Zalesskij, 2006. S. 379-387.

5 Temirov B.K. Oscilljacija reshenij integro-differencial'no-raznostnogo uravnenija s konechnymi raznostjami pjatogo porjadka s nelinejnym integral'nyh chlenom. Materialy mezhdunar. nauchnoj konfer., posvjashh. 75-letiju akad. NAN RK Abdil'dina Mejrhana Mubarakovicha «Aktual'nye problemy sovremennoj fiziki». Almaty, 2013. – S. 42-45.

Резюме

Б. К. Темиров

(Ж. Баласағын атындағы Қырғыз ұлттық университеті, Бішкек, Қырғызстан)

ШЕТКІ АЙЫРЫМЫ БАР m -ТУЫНДЫ ТАҚ ТҮРЛЕРІНІҢ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ИНТЕГРАЛДЫ-АЙЫРЫМ ТЕҢДЕУІ ШЕШІМІНІҢ ОСЦИЛЛЯЦИЯ БЕЛГІСІ

Бесінші ретті шеткі айырымы бар операторлық-айырым теңдеуінің сызықты емес интеграл мүшесімен осцилляция шешімінің жеткілікті жағдайы анықталған. Мұндай теңдеулер ғылым мен техникада жүйенің нақты процестерін сипаттағанда кеңінен қолданылады, атап айтқанда, электрлік, механикалық, биологиялық, демографиялық, экономикалық және тағы басқаларында. Сондай-ақ математикалық физиканың әртүрлі есептерінің жуықтау шешімін табу үшін ЭЕМ пайдалана отырып кейбір теориялық мәселелерді шешу үшін де қолданылады.

Тірек сөздер: осцилляция, сызықты емес интеграл мүшелер, Иенсен теңсіздігі.

Summary

B. K. Temirov

(Kyrgyz national university named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan)

SIGN OF OSCILLATIONS OF THE SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FINITE DIFFERENCES ARBITRARY M-ODD ORDER

In this paper we establish a sufficient condition for the oscillation of solutions of nonlinear integro-differential-difference equation with finite differences m -arbitrary odd order elliptic operator.

Keywords: oscillation, the nonlinear integral term, Jensen's inequality.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 536.46:532.517.4

*А. С. АСКАРОВА¹, М. А. ГОРОХОВСКИ²,
С. А. БОЛЕГЕНОВА¹, И. Э. БЕРЕЗОВСКАЯ¹, Ш. С. ОСПАНОВА¹*

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,

²Лионский центральный университет, Лион)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СКОРОСТИ ВПРЫСКА НА ПРОЦЕСС ГОРЕНИЯ ЖИДКОГО ТОПЛИВА РАЗЛИЧНОГО ВИДА ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ И ВЫСОКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ СГОРАНИЯ

Аннотация. Целью данной работы является изучение влияния скорости впрыска на процесс горения различных видов жидких топлив в зависимости от давления и числа Рейнольдса в цилиндрической камере сгорания. Исследование осуществляется методами численного моделирования с использованием дифференциальных уравнений, описывающих турбулентное течение при наличии химических реакций. В настоящей работе для достижения цели описана физическая и математическая модели поставленной задачи. Проведено численное исследование процесса горения двух видов жидкого топлива: октана и додекана в камере сгорания при высоких давлениях и высоких числах Рейнольдса. Получены распределения температуры и концентрации углекислого газа в зависимости от скорости впрыска.

Ключевые слова: жидкое топливо, октан, додекан, горение, численное исследование.

Тірек сөздер: сұйық отын, октан, додекан, жану, сандық модельдеу.

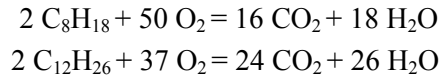
Keywords: liquid fuel, octane, dodecane, combustion, numerical modeling.

Эффективность работоспособности двигателей внутреннего сгорания в значительной степени основана на результатах фундаментальных исследований физико-химических процессов горения. В настоящее время одним из эффективных путей фундаментальных исследований является численный эксперимент, этот метод используется в многочисленных задачах теплофизики и совершенствуется с полученными в результате знаниями и развитием вычислительной техники.

Численный эксперимент базируется на использовании математических моделей реальных процессов [1]. Известно, что в топках электростанций сжигается твердое, жидкое и газообразное топливо. В этой связи использование численного эксперимента с привлечением средств вычислительной техники позволяет разработать новые технологии, требующие малых затрат и более совершенные методы численной реализации систем дифференциальных уравнений, описывающих процессы теплопереноса в камерах сгорания [2].

Целью данной работы является изучение влияния скорости впрыска на процесс горения различных видов жидких топлив в зависимости от давления и числа Рейнольдса в цилиндрической камере сгорания с помощью численных методов. Процесс сжигания углеводородных топлив обусловлен протеканием химических реакций в условиях динамического и теплового взаимодействия реагентов, интенсивного массопереноса при фазовых превращениях, а также зависимостью параметров процесса, как от термодинамического состояния системы, так и от ее структурных характеристик [3]. Горение жидкого топлива проходит через несколько стадий. Топливо впрыскивается в камеру сгорания, затем происходит испарение капель и смешение с окислителем, после чего наблюдается воспламенение и горение воздушно-топливной смеси. В данном процессе особую роль играет распыление топлива, так как эта стадия определяет эффективность горения самой смеси: чем меньше капля, тем быстрее происходит испарение, смешение с окислителем и воспламенение.

Для достижения цели описана физическая модель поставленной задачи. Процесс горения рассматривается в модельной камере сгорания с форсункой, расположенной в центре нижней части камеры, через которую в поток окислителя впрыскивается жидкое топливо. Камера имеет конструкцию цилиндра высотой 15 см и радиусом 2 см. Начальная температура в камере сгорания равна 800 К. Количество контрольных ячеек – 600. Температура стенок камеры сгорания составляет 353 К [1]. В настоящей работе использовались два вида жидкого топлива: октан (C_8H_{18}) и додекан ($C_{12}H_{26}$). Химические реакции окисления этих двух видов топлив представлены ниже:



Математическая модель задачи осуществляется методами численного моделирования с использованием дифференциальных уравнений, описывающих турбулентное течение при наличии химических реакций. Она представлена основными уравнениями: неразрывности, движения, внутренней энергии, k - ε модель турбулентности (1–5), а так же начальными и граничными условиями [4].

Уравнение неразрывности для компоненты реакции m записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_m \vec{u}) = \vec{\nabla} \left[\rho D \vec{\nabla} \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \right] + \dot{\rho}_m^c + \dot{\rho}_m^s \delta_{m1}, \quad (1)$$

где D – коэффициент диффузии, ρ_m – массовая плотность жидкой фазы, ρ – полная массовая плотность, $\dot{\rho}_m^c$ – химический источниковый член; $\dot{\rho}_m^s$ – источниковый член вследствие впрыска; \vec{u} – скорость жидкости.

Уравнение переноса импульса для жидкости можно записать как:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} \vec{u}) = -\frac{1}{\alpha^2} \vec{\nabla} p - A_0 \vec{\nabla} \left(\frac{2}{3} \rho k \right) + \vec{\nabla} \vec{\sigma} + \vec{F}^s + \rho \vec{g}, \quad (2)$$

где p – давление жидкости, α – безразмерная величина, A_0 равно 0 при ламинарном течении и 1 – при турбулентности.

Уравнение внутренней энергии имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} I) = -\rho \vec{\nabla} \vec{u} + (1 - A_0) \vec{\sigma} \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{\nabla} \vec{J} + A_0 \rho \varepsilon + \dot{Q}^c + \dot{Q}^s, \quad (3)$$

\dot{Q}^c и \dot{Q}^s – источниковые члены, обусловленные тепловыделением в результате химической реакции и тепла, которое приносит впрыскиваемое топливо.

Математическая модель включает два дополнительных уравнения движения для турбулентной кинетической энергии k и скорости ее диссипации ε :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} k) = -\frac{2}{3} \rho k \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \sigma \cdot \nabla \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\left(\frac{\mu}{Pr_k} \right) \vec{\nabla} k \right) \right] - \rho \varepsilon + \dot{W}^s, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \varepsilon) = -\left(\frac{2}{3} c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 2} \right) \rho \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\left(\frac{\mu}{Pr_\varepsilon} \right) \vec{\nabla} \varepsilon \right) \right] + \frac{\varepsilon}{k} [c_{\varepsilon 1} \vec{\sigma} \vec{\nabla} \vec{u} - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon + c_s \dot{W}^s], \quad (5)$$

Величина \dot{W}^s возникает вследствие взаимодействия с распылителем. Константы $c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, c_s, Pr_k, Pr_\varepsilon$ определяются из эксперимента [4].

Результаты численного эксперимента по горению жидкого топлива. Вычислительный эксперимент проводился при высоких значениях давления 100 бар для октана и 80 бар для додекана, с массой 6 мг для октана и 7 мг для додекана. Скорость впрыска жидкого топлива менялась от 150 до 350 м/с, так как ранее [1] нами было установлено, что при низких скоростях впрыска жидкого топлива, меньше 150 м/с, горение не происходит, так как скорость впрыска не является достаточной, для того, чтобы началось самовоспламенение и реакция горения стабилизировалась. В связи с тем, что температура кипения всегда ниже температуры самовоспламенения, поэтому горение углеводородных топлив происходит в паровой фазе.

Механизм горения жидких топлив включает в себя несколько этапов: искра (или другой посторонний источник), воспламенение паровоздушной смеси, горение паровоздушной смеси у поверхности жидкости, повышение скорости испарения за счет передачи тепла от пламени (до того момента, пока не наступит равновесие). Поэтому наиболее эффективно процесс горения, как октана, так и додекана протекает при скорости впрыскивания топлива 350 м/с, когда температуры в камере сгорания принимают максимальные значения (рисунок 1). Из рисунка 1 видно, что для октана по оси ординат температура монотонно растет и максимум 1726 К приходится на скорость впрыска топлива равную 350 м/с. Для додекана при значениях скорости от 150 до 250 м/с наблюдается скачкообразный рост температуры от 1780 до 2075 К, максимальное значение 2080 К, аналогично достигается при 350 м/с.

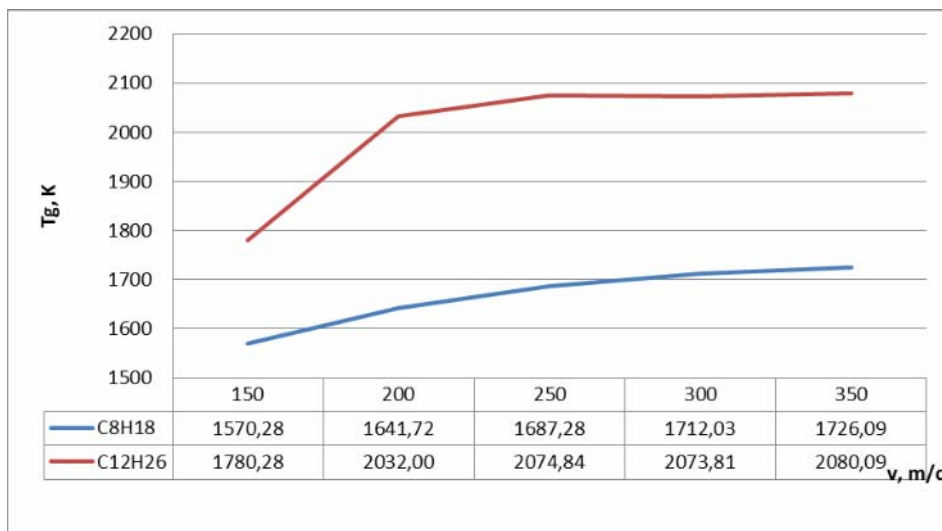


Рисунок 1 – Распределение температуры в камере сгорания (Т, К) в зависимости от скорости впрыска (v, м/с) (синяя линия – октан (C₈H₁₈), красная линия – додекан (C₁₂H₂₆))

Когда смесь паров топлива с окислителем воспламеняется, то вся область камеры по ширине охватывается факелом, первое быстро сгорает часто без остатка. Однако одним из продуктов сжигания топлив является CO₂. На рисунке 2 показано влияние скорости впрыска октана и додекана на распределение концентрации углекислого газа.

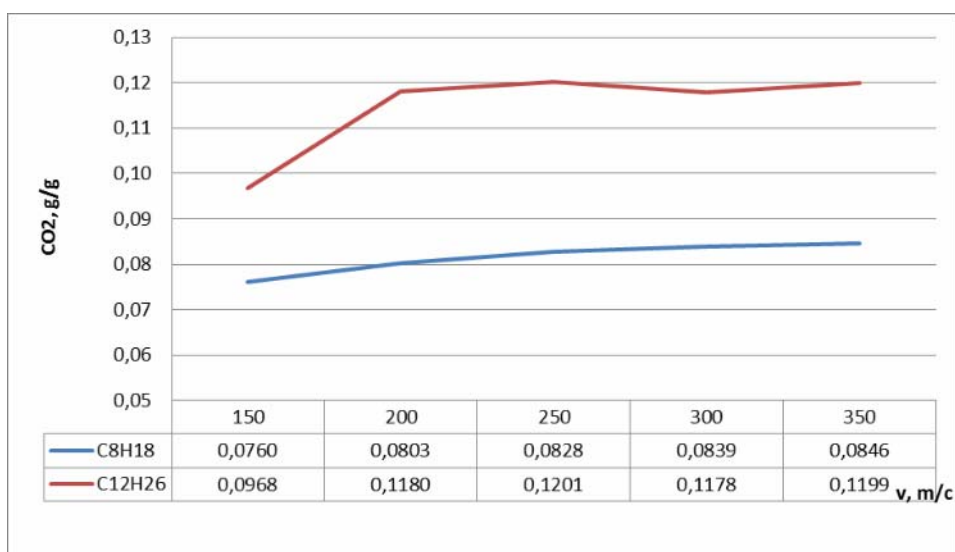


Рисунок 3 – Распределение концентрации углекислого газа (г/г) в камере сгорания в зависимости от скорости впрыска (v, м/с) (синяя линия – октан (C₈H₁₈), красная линия – додекан (C₁₂H₂₆))

При увеличении скорости впрыска C_8H_{18} количество двуокси углерода повышается по вполне понятным причинам: чем больше скорость, тем больше образуется CO_2 . Минимальная концентрация углекислого газа равная 0,0760 г/г образуется при впрыскивании октана со скоростью 150 м/с. Для додекана $C_{12}H_{26}$ при увеличении скорости выделяется большое количество CO_2 , но при скорости 300 м/с наблюдается небольшой спад концентрации CO_2 . Для $C_{12}H_{26}$ наименьшее количество углекислого газа 0,0968 г/г выделяется при начальной скорости (150 м/с) подачи топлива.

Как показал анализ вычислительных экспериментов, оптимальной для обоих видов топлива можно назвать скорость впрыскивания равную 350 м/с. При данной скорости инъекции концентрация выброса вредного вещества, такого как углекислый газ незначительна и лежит в допустимых пределах. Температура в камере сгорания достигает максимальных значений. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании различных технических устройств, использующих процесс горения распыленных жидких топлив.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Аскарлова А.С., Болегенова С.А., Березовская И.Э., Оспанова Ш.С. Численное моделирование процессов горения двух видов жидкого топлива в зависимости от скорости // Материалы IX Междунар. научно-практич. конф. «Современные научные достижения». – Прага, 2013. – С. 29-34.
- 2 Хитрин Л.Н. Физика горения и взрыва. Издательство Московского университета, 1957. – 452 с.
- 3 Аскарлова А.С., Гороховски М.А., Рыспаева М.Ж., Волошина И.Э. Численное моделирование горения и самовоспламенения двухфазных химически реагирующих течений с впрысками // Известия Томского политехнич. ун-та. – 2009. – Т. 315, № 4. – С. 5-9.
- 4 Amsden A.A., O'Rourke P.J., Butler T.D. KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays. – Los Alamos, 1989. – 160 p.

REFERENCES

- 1 Askarova A.S., Bolegenova S.A., Berezovskaja I.E., Ospanova Sh.S. Chislennoe modelirovanie processov gorenija dvuh vidov zhidkogo topliva v zavisimosti ot skorosti. Materialy IX Mezhdunar. nauchno-praktich. konf. «Sovremennye nauchnye dostizhenija». –Praga, 2013. S. 29-34.
- 2 Hitrin L.N. Fizika gorenija i vzryva. Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1957. 452 s.
- 3 Askarova A.S., Gorohovski M.A., Ryspaeva M.Zh., Voloshina I.E. Chislennoe modelirovanie gorenija i samovosplamenenija dvuhfaznyh himicheski reagirujushhih techenij s vpryskami. Izvestija Tomskogo politehnic. un-ta. 2009. T. 315, № 4. S. 5-9.
- 4 Amsden A.A., O'Rourke P.J., Butler T.D. KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays. Los Alamos, 1989. 160 p.

Резюме

*А. С. Асқарова¹, М. А. Гороховски²,
С. Ә. Бөлегенова¹, И. Э. Березовская¹, Ш. С. Оспанова¹*

¹әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,

²Лион Орталық университеті, Лион)

ЖОҒАРЫ ҚЫСЫМДАР МЕН РЕЙНОЛЬДС САНЫНЫҢ ЖОҒАРЫ МӘНДЕРІНДЕГІ ЦИЛИНДРЛІК ЖАНУ КАМЕРАСЫНДАҒЫ ӘРТҮРЛІ СҰЙЫҚ ОТЫНДАРДЫҢ ЖАНУ ПРОЦЕСІНЕ БҮРКУ ЖЫЛДАМДЫҒЫНЫҢ ӘСЕРІН САНДЫҚ ЗЕРТТЕУ

Жұмыста қысым мен Рейнольдс санына қатысты цилиндрлік жану камерасындағы әртүрлі сұйық отын-дардың жануына бүрку жылдамдығының әсері зерттелінді. Зерттеу химиялық реакциялар болғандағы турбуленттік ағысты сипаттайтын дифференциалдық теңдеулерді қолдана отырып, сандық модельдеу әдістерімен жүзеге асырылды. Мақсатқа жету үшін алға қойылған мәселенің математикалық және физикалық модельдері бейнеленген. Екі сұйық отын түрінің жану процесіне сандық зерттеу жүргізілді: жоғары қысымдар мен Рейнольдс санының жоғары мәндеріндегі октан мен додекан. Бүрку жылдамдығына қатысты көмірқышқыл газының температурасы мен концентрацияларының таралуы алынды.

Тірек сөздер: сұйық отын, октан, додекан, жану, сандық модельдеу.

Summary

*A. S. Askarova¹, M. A. Gorokhovskiy²,
S. A. Bolegenova¹, I. E. Berezovskaya¹, Sh. S. Ospanova¹*

(¹al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan,
²Lyon central university, Lyon)

NUMERICAL INVESTIGATION OF INJECTION SPEED INFLUENCE ON THE COMBUSTION PROCESS OF DIFFERENT KIND OF FUEL AT HIGH PRESSURES AND HIGH REYNOLDS'S NUMBERS IN THE CYLINDRICAL COMBUSTION CHAMBER

The purpose of this work is studying of injection speed influence on process of different types of liquid fuels burning depending on pressure and Reynolds' number in the cylindrical combustion chamber. Research is carried out by methods of numerical modeling with use of the differential equations describing turbulent flow in the presence of chemical reactions. In the real work for achievement of the purpose it is described physical and mathematical models of an assigned task. Numerical research of process of burning of two types of liquid fuel is conducted: octane and dodecane in the combustion chamber with high pressures and Reynolds's high numbers. Distributions of temperature and concentration of carbon dioxide depending on injection speed are received.

Keywords: liquid fuel, octane, dodecane, combustion, numerical modeling.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 533.9.01

К. Н. ДЖУМАГУЛОВА, Р. У. МАШЕЕВА, Р. АХАНОВ

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан)

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ПЫЛЕВЫХ ЧАСТИЦ

Аннотация. В работе показаны результаты теоретических исследований спектра колебаний пылевых частиц с помощью Фурье анализа автокорреляционных функций скоростей. В работе был использован метод Ланжевеновой динамики для решения уравнения движения пылевых частиц. В качестве потенциала взаимодействия был использован потенциал Юкава. Показано, что действительные и мнимые части спектральной функции имеют максимум вблизи плазменной частоты пылевых частиц при больших значениях параметра связи и малых значениях коэффициента трения.

Ключевые слова: пылевая плазма, автокорреляционная функция скоростей, спектральная функция.

Тірек сөздер: тозанды плазма, жылдамдықтардың автокорреляциялық функциясы, спектрлік функция.

Keywords: dusty plasma, velocity autocorrelation functions, spectral function.

Введение. Пылевая плазма представляет собой ионизованный газ, содержащий микроскопические частицы конденсированного вещества. Такая плазма часто встречается в природе, особенно в астрофизических объектах, таких как планетные кольца, кометные хвосты и т.д. Также в земных условиях пылевая плазма может формироваться во многих установках, использующих плазменные технологии.

Физические свойства пылевой плазмы являются важными для развития разных направлений современной физики и новой техники, к примеру, лазерная техника, термоядерная энергетика, астрофизика, физика верхней атмосферы, нанотехнологии и т.д.

При изучении свойств такой системы возникают проблемы связанные с отсутствием малой связи в системе, ввиду чего традиционные методы теоретической физики малоэффективны. Данная проблема решается с помощью применения современных методов компьютерного моделирования неидеальных физических систем (Монте-Карло, молекулярной динамики, броуновой (ланжевеновой) динамики, квазичастиц и т.п.).

В работе используется метод компьютерного моделирования Ланжевеновой динамики, который дает возможность изучить микроскопические и динамические свойства пылевых частиц. С помощью этого метода были исследованы частоты колебаний пылевых частиц, взаимодействующих с помощью потенциала Юкава.

Краткое описание метода Ланжевеновой динамики и результаты по спектральной функции пылевых частиц на основе Фурье-преобразования автокорреляционных функции скоростей представлены во второй части работы.

Выводы и заключения приведены в разделе «Заключение». Списки используемой литературы даны в конце статьи.

Метод моделирования и Фурье-преобразование автокорреляционных функции скоростей. В изучении свойств пылевой плазмы широко применяется метод Ланжевеновой динамики [1, 2]. Моделирование движения пылевых частиц было выполнено на основе следующего уравнения:

$$m_d \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_j F_{\text{int}}(r) \bigg|_{r=|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} - m_d \nu_{fr} \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \vec{F}_{br}(t), \quad (1)$$

где $F_{\text{int}}(r) = -\partial\Phi(r)/\partial r$ – сила, действующая на выбранную i -частицу в результате взаимодействия с j -частицей, $r = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ – расстояние между двумя пылинками, $F_{br}(t)$ – случайная сила, которая учитывает случайные толчки окружающих плазменных частиц или другие стохастические процессы, ν_{fr} – коэффициент трения пылевых частиц, который зависит от давления буферной плазмы и определяет частоту их столкновений с нейтральными частицами окружающей плазмы, m_d – масса пылевой частицы, $\Phi(r)$ – парный потенциал взаимодействия макрочастиц.

В качестве межчастичного потенциала взаимодействия пылинок взят потенциал Юкава, в безразмерном виде он записывается так:

$$\Phi(R) = \frac{\Gamma}{R} e^{-\kappa R}, \quad (2)$$

где $\kappa = a/r_D$ – коэффициент экранирования поля заряда пылинок, r_D – Дебаевский радиус экранирования поля заряда пылинок, $\Gamma = (Z_d e)^2 / (ak_B T_d)$ – параметр связи пылевой компоненты, $a = (3/4\pi n_d)^{1/3}$ – среднее расстояние между пылинками, Z_d и n_d – заряд и концентрация пылевых частиц соответственно, T_d – температура пылевой компоненты. Набор из 1024 пылевых частиц произвольно распределен в трехмерной кубической решетке, расширенной периодическими граничными условиями. Время берется в единицах, обратных плазменной частоте пылевой компоненты $\omega_d = \left(\frac{4\pi n_d Z_d^2 e^2}{m_d} \right)^{1/2}$. Количество временных шагов $N_t = 30\,000$. Безразмерный параметр

трения $\theta = \frac{\nu_{fr}}{\omega_d}$. Моделирование для системы пылевых частиц было выполнено согласно схеме [3-7].

На основе данных, полученных с помощью компьютерного моделирования, можно исследовать автокорреляционные функции скоростей [8, 9] пылевых частиц с помощью следующего уравнения:

$$A_v(t) = \langle \vec{v}(t) \vec{v}(0) \rangle, \quad (3)$$

где скобки означают усреднение по ансамблю и по различным начальным моментам времени. Автокорреляционная функция скоростей демонстрирует затухание, что характеризуется временем затухания τ , время за которое автокорреляционная функция уменьшается в e раз. Результаты вычисления автокорреляционных функции скоростей в широком диапазоне изменения параметров системы представлены в работе [9].

Получив данные вычисления автокорреляционных функции скоростей частиц можно исследовать спектральную функцию пылевых частиц на основе Фурье-преобразования автокорреляторов скоростей. Согласно работе [10], спектральная функция $f(\omega)$ полностью определяет поведение системы под действием заданного возмущения:

$$f(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (4)$$

здесь $f(t)$ – некоторая функция, зависящая от микроскопических свойств системы. В данном случае, АФС, вычисленная на основе компьютерного моделирования, может быть рассмотрена как величина, которая характеризует микроскопическое состояние системы, и спектральная функция может быть вычислена следующим образом [10]:

$$f(\omega) = 1/2\pi \int_0^{\infty} A(t)e^{-i\omega t} dt, \quad (5)$$

Реальная часть спектральной функции автокорреляционных функций скоростей, как, динамический структурный фактор дает возможность определить частоты колебания частиц присутствием пиков на их кривых. Как было отмечено в работе [11], есть связь между этими функциями, автокорреляционная функция скоростей связана с автокорреляционной частью динамического структурного фактора. характеристиками частиц, таких как прямая корреляционная функция. На основе автокорреляционных функции скоростей можно вычислить коэффициент диффузии среднеквадратичным смещением или на основе соотношения Грина-Кубо:

$$D = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} A(t)dt. \quad (6)$$

из этого выражения можно заметить, что $\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}(f(\omega))$ равно коэффициенту диффузии с точностью в пределах численного коэффициента.

Мнимая часть спектральной функции характеризует потери энергии в системе.

Действительные и мнимые части спектральной функции при $\Gamma = 2$ показаны на рисунках 1, 2. Показано, что при малых значениях параметра связи действительная часть спектральной функции ведет себя монотонно и не наблюдаются осцилляции в системе. Из рисунка 2 видно, что величина $\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Re}(f(\omega))$ сокращается с увеличением коэффициента трения. В работе [3] показано уменьшение коэффициента диффузии с увеличением коэффициента трения. Действительные части спектральной функции при больших параметрах связи показаны на рисунках 3, 4. Рисунок 3 показывает сокращение коэффициента диффузии при увеличении параметра связи, теоретически до нуля (кристаллическое состояние). На этом рисунке видно также, что с увеличением параметра связи максимум кривой спектральной функции увеличивается. Данный максимум приблизительно расположен при частоте, близкой к плазменной частоте пылевой компоненты ω_d . Но на рисунке 4 показано, с увеличением коэффициента трения максимум исчезает.

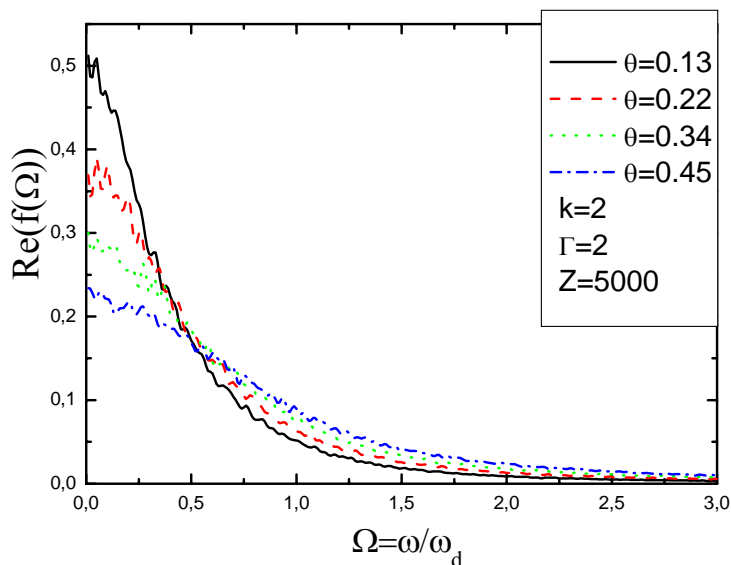


Рисунок 1 – Реальная часть спектральной функции при разных значениях параметра трения

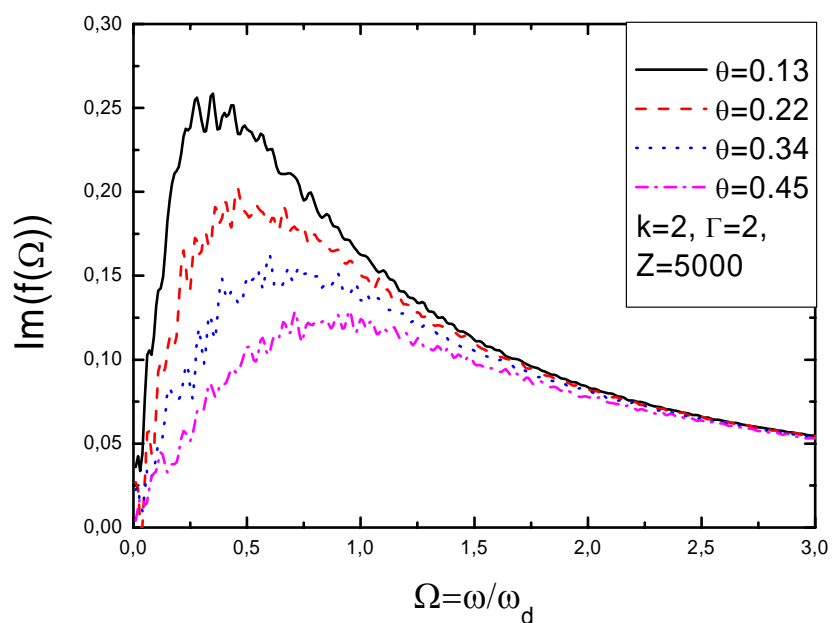


Рисунок 2 – Мнимая часть спектральной функции при разных значениях параметра трения

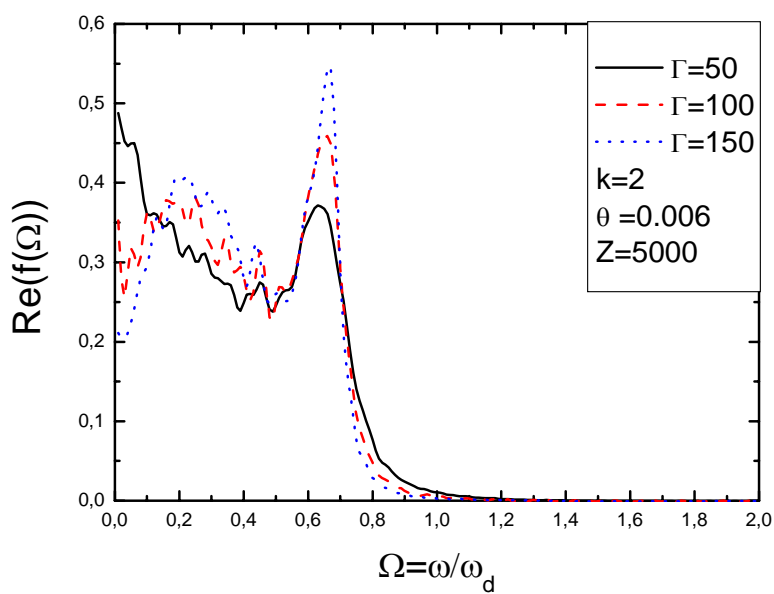


Рисунок 3 – Реальная часть спектральной функции при разных значениях параметра связи

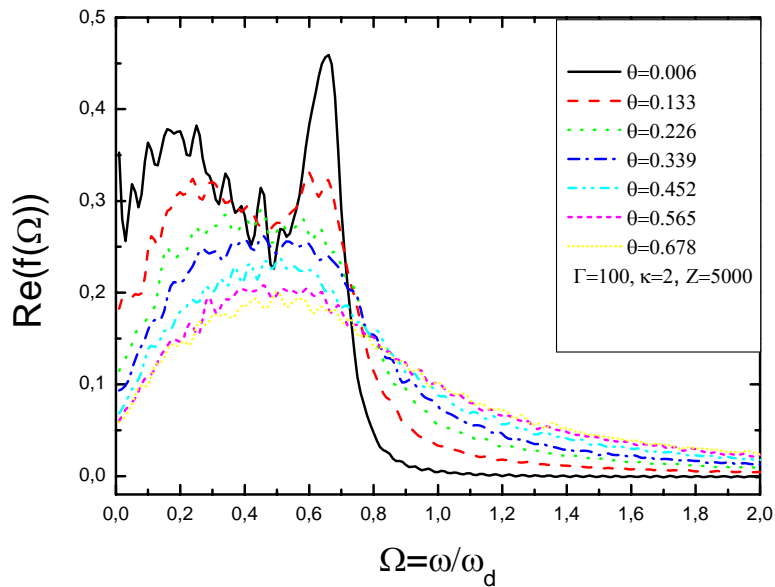


Рисунок 4 – Реальная часть спектральной функции при разных значениях параметра трения

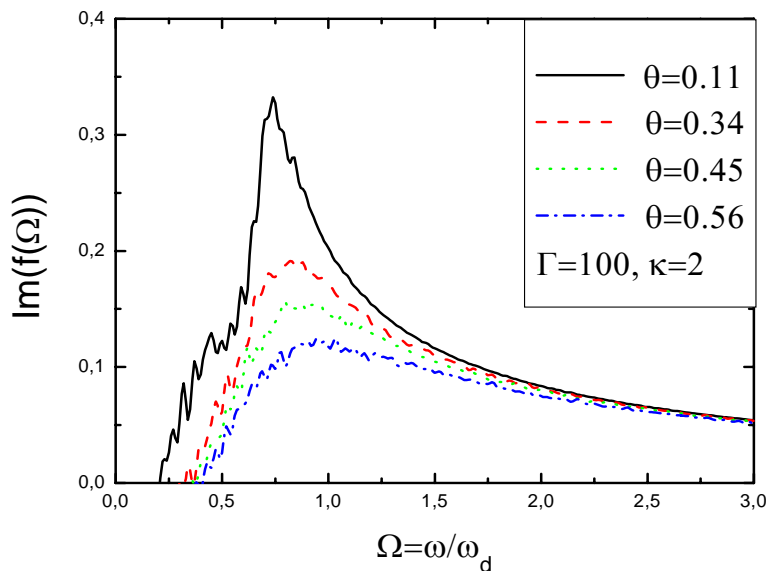


Рисунок 5 – Мнимая часть спектральной функции при разных значениях параметра трения

Мнимые части спектральной функции при больших параметрах связи показаны на рисунке 5. Этот рисунок показывает, что максимум энергетической абсорбции приблизительно расположен при частотах, близких к плазменной частоте пылевых частиц.

Заключение. Основным результатом компьютерного моделирования пылевых частиц, представленным в данной работе являются данные по исследованию спектральной функции автокорреляционных функции скоростей пылевых частиц. Показано, что в пылевой системе осуществляются колебания на частотах близких к плазменной частоте пылевых частиц при больших значениях параметра связи и при малых значениях коэффициента трения. Также показано, что максимум энергетической абсорбции приблизительно расположен на частотах, близких к плазменной частоте пылевых частиц.

REFERENCES

- 1 Dzhumagulova K.N., Ramazanov T.S., Masheeva R.U. Phys. Plasmas. 2013. 20, 113702.
- 2 Donko Z., Hartmann P. Phys. Rev. 2004. E 69, 016405.
- 3 Dzhumagulova K.N., Ramazanov T.S., Masheeva R.U. Contrib. Plasma Phys. 2012. 52, 182.
- 4 Ramazanov T.S., Dzhumagulova K.N. Contr. Plasma Phys. 2008. 48, 357.
- 5 Vaulina O.S., Khrapak S. JETP 92, 228. 2001.
- 6 Vaulina O.S., Khrapak S., Morfill G. Phys. Rev. 2002. E 66, 016404.
- 7 Hartmann, P. Kalman G.K., Donko Z., Kutasi K. Phys. Rev. 2005. E 72. 026409.
- 8 Dzhumagulova K.N., Ramazanov T.S., Masheeva R.U. Book of Abstracts. PNP-2012. Germany: Rostock, 2012.
- 9 Dzhumagulova K.N., Masheeva R.U. Izvestija NAN RK. Serija fiziko-matematicheskaja. 2013. № 2(288).
- 10 Landau L.D., Lipschitz E.M. Statistical physics. M., Nauka, 1976.
- 11 Match N.H., Tosi M.P. Atomic Dynamics in Liquids. Dover Publications. INC. New York, 1991.

Резюме

Қ. Н. Жұмағұлова, Р. У. Машеева, Р. Аханов

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан)

ТОЗАҢДЫ БӨЛШЕКТЕРДІҢ СПЕКТРЛІК ФУНКЦИЯСЫН ЗЕРТТЕУ

Жұмыста жылдамдықтардың автокорреляциялық функциясынан Фурье түрлендіруі арқылы тозаңды бөлшектердің тербелістерін теория жүзінде зерттеудің нәтижелері көрсетілген. Тоzaңды бөлшектердің қозғалыс теңдеуін шешу үшін Ланжевендік динамика әдісі қолданылды. Юкава потенциалы тозаңшалардың өзара әсерлесу потенциалы ретінде алынды. Спектрлік функцияның нақты және жорамал бөлігі байланыс параметрінің үлкен және үйкеліс параметрінің кіші мәндерінде тозаңды бөлшектердің плазмалық жиіліктеріне жақын жиіліктерде максимумға ие болатындығы көрсетілді.

Тірек сөздер: тозаңды плазма, жылдамдықтардың автокорреляциялық функциясы, спектрлік функция.

Summary

K. N. Dzhumagulova, R. U. Masheeva, R. Akhanov

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan)

INVESTIGATION OF SPECTRAL FUNCTION OF DUST PARTICLES

In this paper, the results of theoretical investigations of dust particles fluctuations on the basis of the Fourier analysis of the velocity autocorrelation function were presented. The Langevin dynamics method was used to solve the dust particles equations of motion. The Yukawa potential was used as an interaction potential. It was presented, that the real and imaginary parts of the spectral function have a maximum near the plasma frequency of dust particles at large values of the coupling parameter and low values of the coefficient of friction.

Keywords: dusty plasma, velocity autocorrelation functions, spectral function.

Поступила 05.05.2014 г.

A. S. ASKAROVA¹, S. A. BOLEGENOVA¹, M. A. GOROKHOVSKI²,
I. E. BEREZOVSKAYA¹, SH. S. OSPANOVA¹

(¹Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan,
²Ecole Centrale de Lyon, Lyon)

NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF THE SPRAY VELOCITY ON THE TETRADECANE'S COMBUSTION

Annotation. The problems of combustion are widely studied now by the scientists of the world. Increasing level of ecological pollution of the environment, reserve depletion of hydrocarbon fuel and economic growth of many countries causing increase of demand for energy – all these factors gave rise to the problem of finding of more economic and ecological way of fuel combustion [1]. In order to solve this problem it is necessary to study thoroughly the combustion process itself and that is why the methods of numerical simulation are getting wide spread in the science. The turbulence plays great role in many devices using combustion process and its study is maybe one of the most complicated sections of hydrodynamics. It is also necessary to take into account additional factors such as various chemical reactions and radiation [2].

Thus, computer simulation becomes more and more important element of study of combustion process and of designing different installations burning liquid fuel. It can be forecasted that the role of the numerical experiment will increase in future.

The purpose of this work is to study the influence of liquid fuel spray velocity on the fuel combustion by means of numerical simulation on the basis of the solution of differential equations of turbulent reacting flow.

Keywords: numerical simulation, combustion, two-phase flows.

Тірек сөздер: сандық модельдеу, жану, екіфазалы ағыстар.

Ключевые слова: численное моделирование, горение, двухфазные течения.

One of the priority tendencies of the scientific and technological development of Kazakhstan is the research of simulation of formation of polluting clouds and their dispersion in the atmosphere. This problem has a great value because of the increasing concern for the ecological situation in Kazakhstan as the atmospheric air in the cities of Kazakhstan is daily polluted by different hazardous substances (NO₂, CO, CO₂, soot and so on).

For the recent years the dispersion of the liquid sprays in the neutral atmospheric flows has been well studied by means of numerical, laboratory and natural researches. In these researches the main attention has been given to the dispersion of chemically reactive scalar admixture in the free convective flows.

The investigation of the formation of polluting clouds will allow creating the methods for the decrease of contain of hazardous substances in the atmosphere and for the prevention of formation of such clouds which contain hot liquid particles and these particles are the reasons of the formation of such polluting clouds. That kind of problems is one of the significant and insufficiently explored tasks for the present days.

In this region of research the numerical experiments on the combustion of liquid fuel sprays in the burner chamber have been carried out. In this work it has been researched the dependence of maximal temperature of combustion of the liquid fuel from the velocity of the spray by means of the numerical modeling on the basis of the solution of differential two-dimensional equations of the turbulent reactive flows.

Main equations of mathematical model of dispersion and combustion of spray of liquid fuel are presented below [1-3].

Continuity equation for component m:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_m \vec{u}) = \vec{\nabla} \left[\rho D \vec{\nabla} \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \right] + \dot{\rho}_m^c + \dot{\rho}^s \delta_{m1}. \quad (1)$$

Momentum equation:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} \vec{u}) = -\frac{1}{a^2} \vec{\nabla} p - A_0 \vec{\nabla} \left(\frac{2}{3} \rho k \right) + \vec{\nabla} \vec{\sigma} + \vec{F}^s + \rho \vec{g}. \quad (2)$$

Energy equation:

$$\frac{\partial(\rho I)}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} I) = -p \vec{\nabla} \vec{u} + (1 - A_0) \sigma \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{\nabla} \vec{J} + A_0 \rho \varepsilon + \dot{Q}^c + \dot{Q}^s, \quad (3)$$

where

$$\vec{J} = -K \nabla T - \rho D \sum_m h_m \nabla \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right).$$

Equations of $k - \varepsilon$ turbulence model:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} k) = -\frac{2}{3} \rho k \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \left[\left(\frac{\mu}{Pr_k} \right) \vec{\nabla} k \right] - \rho \varepsilon + \dot{W}^s. \quad (4)$$

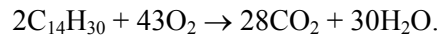
$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} \varepsilon) = -\left(\frac{2}{3} c_{\varepsilon_1} - c_{\varepsilon_3} \right) \rho \varepsilon \vec{\nabla} \vec{u} + \vec{\nabla} \left[\left(\frac{\mu}{Pr_\varepsilon} \right) \vec{\nabla} \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} \left[c_{\varepsilon_1} \vec{\sigma} : \vec{\nabla} \vec{u} - c_{\varepsilon_2} \rho \varepsilon + c_s \dot{W}^s \right]. \quad (5)$$

We have studied (C14H30) tetradecane's combustion depending on the spray velocity. Tetradecane is the main component of diesel fuel. It's used in passenger, freight and private vehicles. Liquid fuel is injected into the combustion chamber through a circular nozzle, located in the center of the bottom of the chamber. The overview of the combustion chamber is presented in figure 1.

The chamber is a cylinder with height equal to 15 cm and diameter is 4 cm. After the injection there is a rapid evaporation of fuel and the combustion is processing in the gas phase. The burning time of fuel is 4 ms. Time of injection of fuel droplets is 1.4 ms. The temperatures of the walls of the combustion chamber is 353 K. The initial temperature of gas in the chamber is 900 K. The temperature of the injected fuel is 300 K. The initial mean radius of injecting drops is 3 micrometers. The pressure in the combustion chamber is $4 \cdot 10^6$ Pa.

In the work the dependence of maximum temperature of fuel combustion from spray velocity has been obtained. Liquid fuel spray velocity was ranging from 150 to 350 m/s. It has been found out that at low velocities of liquid fuel spray the process of combustion does not occur.

Tetradecane has been an object of research and its chemical formula has the following form as $C_{14}H_{30}$. For this type of fuel the global chemical reaction of combustion leading to the formation of carbon dioxide and water is written in the following way:



This reaction is exothermal, i.e. it proceeds with huge calorification.

As the result of the conducted numerical experiments it has been determined that minimal velocity of liquid tetradecane's spray is equal to 200 m/s. This velocity is enough for the combustion to take place in the burner chamber. The most effective combustion proceeds at the velocity of the injected fuel varying from 260 to 320 m/s, under these conditions temperature reaches values from 2023 K to 2048 K (Figure 2).

However figure 3 shows the dependence of the distribution of CO_2 concentration on the rate of injection of tetradecane where the highest concentration of CO_2 is equal from 0.115 to 0.117 g/m^3 accounts for the velocity of the injected fuel varying from 270 to 320 m/s.

But the rate of injection tetradecane equal 260 m/s CO_2 concentration reaches the minimum value from the land 0,114 g/m^3 .

For the optimum velocity equal to 260 m/s, the plots of the temperature change in time and of the fuel concentration in the burner chamber have been obtained.

Figure 4 shows the distribution of the temperature in the space of the burner chamber for the velocity of spray equal to 260 m/s at different times: 1.1 ms, 1.8 ms, 3 ms, 4 ms correspondingly.

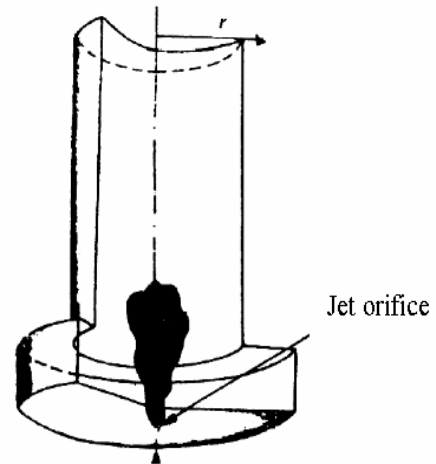


Figure 1 – Overview of the combustion chamber

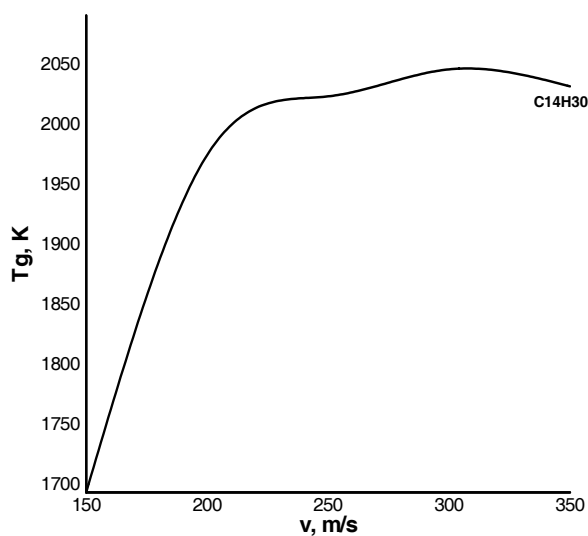


Figure 2 – Change of maximum temperature in the burner chamber depending on the velocity of the injected liquid fuel

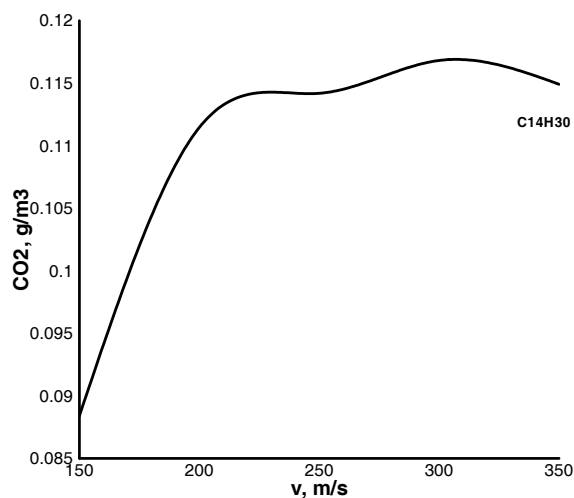


Figure 3 – The dependence of the distribution of CO₂ concentration on the rate of injection tetradecane

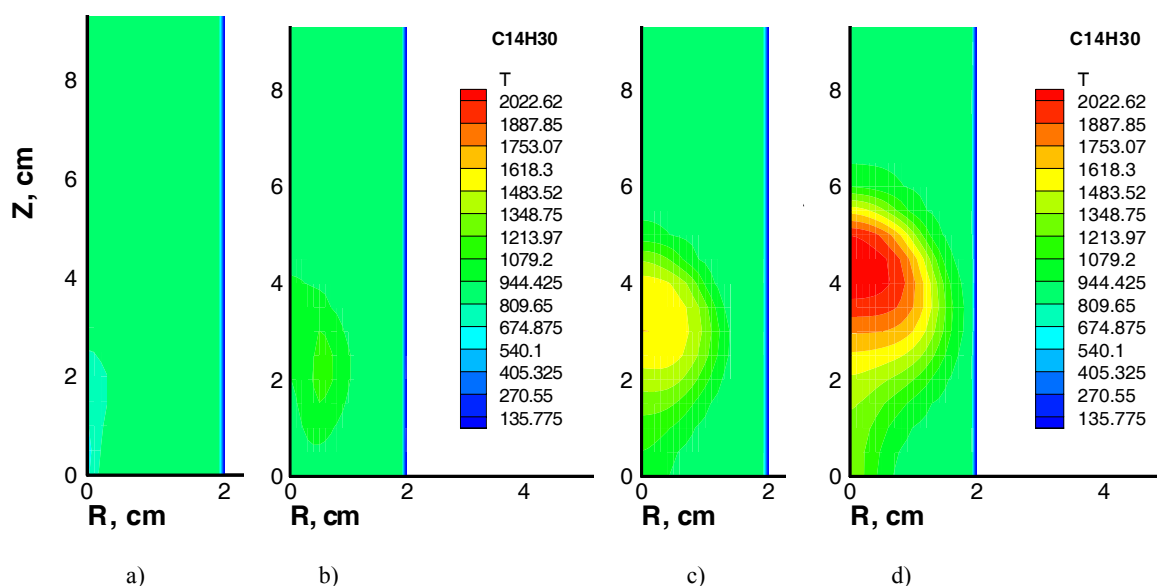


Figure 4 – The temperature distribution in the combustion chamber during combustion of tetradecane at various time moments: a) 1.1 ms, b) 1.8 ms; c) 3 ms, d) 4 ms for the velocity of the spray 260 m/s

At the final time moment the temperature reaches 2023 K and it can be seen that the temperature torch fills up almost all of the space of the chamber.

The distribution of the fuel concentration is presented in figure 5 for the same time moments as for the temperature and for the spray velocity 260 m/s. At the initial moment the concentration of fuel has minimal value and then increases because of the fuel injection in the chamber.

The fuel quickly vaporizes, the vapors are mixed with the oxidant and the mixture ignites and burns down for 4 ms. At the final moment the fuel concentration equals zero.

Figures 6, 7 show the dynamics of the distribution of reaction products concentration on time for the spray velocity 260 m/s.

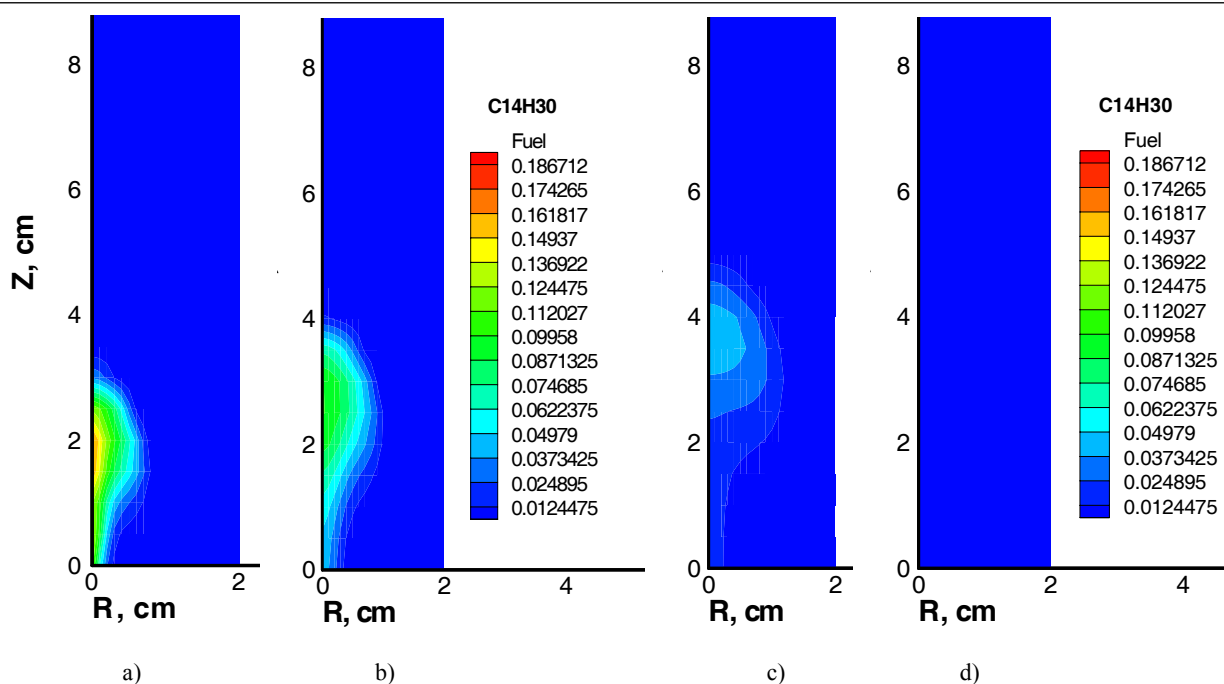


Figure 5 – The distribution of fuel vapor concentration in the burner chamber at different time moments:
 a) 1.1 ms, b) 1.8 ms; c) 3 ms, d) 4 ms for the velocity of the spray 260 m/s

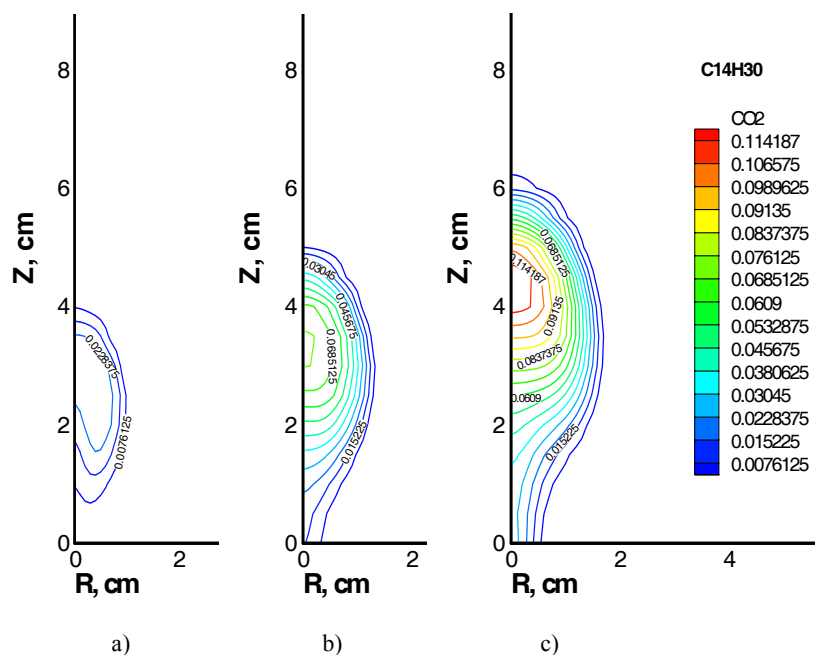


Figure 6 – The distribution of CO₂ in the combustion chamber during combustion of tetradecane at various time moments:
 a) 1.8 ms, b) 3 ms, c) 4 ms for the velocity of the spray 260 m/s

In this work the influence of the spray velocity of liquid tetradecane on its combustion has been studied. The distributions of maximum temperature and of CO₂ concentration depending on the spray velocity, time distributions of the fuel, CO₂, H₂O concentrations and temperature of the gas in the burner chamber for the effective velocity have been obtained. Also the change of maximum temperature in the burner chamber depending on the velocity of the injected liquid fuel has been obtained.

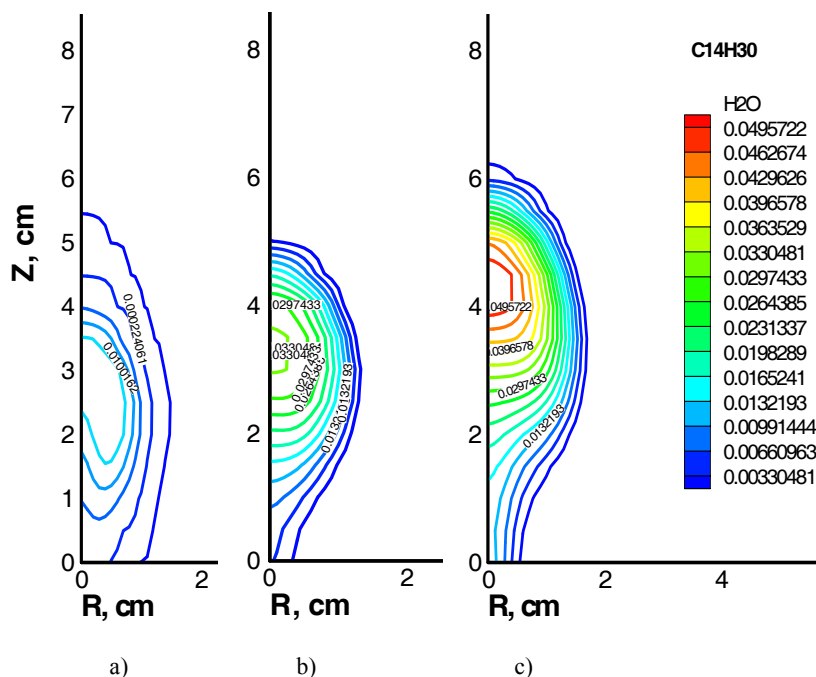


Figure 7 – The distribution of concentration of H₂O in the combustion chamber at time moments: a) 1.8 ms, b) 3 ms, c) 4 ms for the velocity of the spray 260 m/s

The further study of the combustion of liquid sprays will let not only to develop methods for the decrease the contain of harmful substances in the atmosphere and prevention of formation of polluting clouds, but also to improve the work of the engines of the internal combustion, of rockets, aviation engines and to make them more efficient and ecologically safer.

REFERENCES

- 1 Amsden, A.A., O'Rourke, P.J., Butler, T.D. KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays. Los Alamos, 1989. P. 160.
- 2 Askarova, A.S., Ryspayeva, M.Zh., Voloshina, I.E. Vliyanie massy na modelirovanie processa gorenija vpryska zhidkogo topliva // Vestnik KazNU. Seriya fizicheskaya. 2007. Vol. 1, N 5.
- 3 Askarova, A.S., Gorokhovskii, M.A., Loktionova, I.V., Ryspayeva, M.Zh. Gorenje zhidkih topliv v kamere sgoraniya. Izvestiya NAN RK. 2006. Vol. 3, N 6.

Резюме

*A. С. Асқарова¹, С. Ә. Бөлегенова¹, М. А. Гороховски²,
И. Э. Березовская¹, Ш. С. Оспанова¹*

(¹әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
²Лион Орталық университеті, Лион)

БҮРКУ ЖЫЛДАМДЫҒЫНЫҢ ТЕТРАДЕКАННЫҢ ЖАНУ ПРОЦЕСІНЕ ӘСЕРІН САНДЫҚ ЗЕРТТЕУ

Қоршаған ортаның экологиялық ластануы, көмірсутекті отын қорының азаюы және көптеген елдердің экономикалық өрлеуі энергия тұтынымына деген сұранысты арттыра түсті. Осы факторлардың барлығы отынды неғұрлым тиімді және экологиялық зиянсыз жағу тәсілдерін іздеуге түрткі болды. Осы мәселені шешу үшін жану процесін мұқият зерттеу керек және осыған байланысты сандық модельдеу әдістері кеңінен қолданылып келеді. Осы жұмыстың мақсаты – сұйық отынды бүрку жылдамдығының тетрадеканның жану процесіне әсерін турбуленттік екіфазалы ағынның дифференциалдық теңдеулерін шешу негізінде сандық модельдеуден тұрады.

Тірек сөздер: сандық модельдеу, жану, екіфазалы ағыстар.

Резюме

*А. С. Аскарова¹, С. А. Болегенова¹, М. А. Гороховски²,
И. Э. Березовская¹, Ш. С. Оспанова¹*

(¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
²Лионский Центральный университет, Лион)

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СКОРОСТИ ВПРЫСКА
НА ПРОЦЕСС ГОРЕНИЯ ТЕТРАДЕКАНА**

Повышение уровня экологического загрязнения окружающей среды, истощение запасов углеводородного топлива и экономический рост многих стран, вызывающих увеличение спроса на энергию – все эти факторы привели к проблеме нахождения более экономичного и экологического способов сжигания топлива. Для того чтобы решить эту проблему необходимо тщательно изучить процесс горения и именно поэтому методы численного моделирования широко распространены в науке. Целью данной работы является изучение влияния скорости впрыска жидкого топлива на горение тетрадекана с помощью численного моделирования на основе решения дифференциальных уравнений турбулентного реагирующего потока.

Ключевые слова: численное моделирование, горение, двухфазные течения.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 004.8

У. А. ТУКЕЕВ, М. А. БОЛАТБЕК, М. А. ИЛЖАНОВ, А. Х. РАЗАХОВ

¹эл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
«Математика және механика» ғылыми зерттеу институты, Алматы, Қазақстан)

ҚАЗАҚ-ОРЫС МАШИНАЛЫҚ АУДАРМАСЫ КӨПМӘНДІ БЕЙНЕЛЕУ АППАРАТЫ НЕГІЗІНДЕ

Аннотация. Зерттеу жұмысының мақсаты қазақша-орысша машиналық аудармасын көпмәнді бейнелеу аппараты негізінде құрудың үлгілерін, алгоритмдері мен бағдарламасын құрастыру және Қазақстан халқын мәтінді сапалы түрде аударатын машиналық аударма бағдарламасымен қамтамасыз ету болып табылады. Жұмыс нәтижесі ретінде қазақ тіліндегі сөздерді, сөз тіркестері мен қарапайым сөйлемді орыс тіліне сапалы түрде аударатын машиналық аударма бағдарламасы құрастырылды. Жұмыс нәтижесін – мақала тақырыбына сай құрастырылған машиналық аударма жасау бағдарламасын аудармашы көмегіне жүгінуге мәжбүр болған әр адам пайдалана алады. Зерттеудің ғылыми жаңалықтары – екі тілдің грамматикалық сәйкестіктерін орнату кесте түрінде жинақталған қосымшаларға сұраныс жасау арқылы шақыртуға негізделді, енгізілген сөздің түбірі мен қосымшасын ажыратуда іздеу екі жақтан жүргізілді, деректер базасы 9 сөз тобына бөлінген 12 000-нан астам сөзден тұрады.

Тірек сөздер: машиналық аударма, машиналық аударма анализаторы, машиналық аударма генераторы, көпмәнді бейнелеу аппараты.

Ключевые слова: машинный перевод, анализатор машинного перевода, генератор машинного перевода, аппарат многозначных отображений.

Keywords: machine translation, analyser of machine translation, generator of machine translation, set-valued mapping.

Кіріспе. Қазіргі таңда отандық нарықта қазақша-орысша және кері бағытта жұмыс істейтін бірнеше машиналық аударма түрлері бар. Алайда олардың көпшілігі сапалы аударма жасай бермейді. Сондықтан да машиналық аударма саласында машиналық аударманың сапасы өзекті мәселе болып қалуда.

Бұл мақалада бір тілден екінші тілге машиналық аударманың тиімді технологиясы ретінде көпмәнді бейнелеу аппаратын пайдалану ұсынылады [1]. Көпмәнді бейнелеу аппараты соңғы 30 жыл ішінде, атап айтсақ, ойындар теориясында, экстремальды есептер теориясында, математикалық экономикада қарқынды дамып келеді [2].

Осы тақырыптағы зерттеу жұмыстары. Көпмәнді бейнелеу аппаратын машиналық аудармада пайдалану бір тілден екінші тілге аударма жасау алгоритмдерінің тиімділігін арттырады, себебі көпмәнді бейнелеулерді кестелік түрде көрсету машиналық аударма алгоритмдерінің жылдамдығын арттырып, машиналық аударманың әр кезеңіндегі көпмәнділік мәселелерін анық көрсетіп, аталған мәселені көпмәнді бейнелеулерді бірімді бейнелеуге түрлендіру арқылы шешеді [3].

Машиналық аудармадағы омонимия мәселесін көптеген ғалымдар шешуге тырысқан. Соның ішінде И. С. Волошина ұсынған әдіс бойынша мәтінді салаларға бөлу ұсынылады. Алдымен машиналық аударма енгізілген сөздің аудармасын «Ортақ лексика» тарауынан іздейді, бұл жағдайда аудармашыға сөздің тек жиі қолданылатын баламасын ғана алу керек болады. Егер мәтін «арнайы лексика» тарауына жатса (математика, биология, химия, физика тараулары), онда оны аударудың екі жолы бар деп қарастырады. Бірінші жолы енгізілген мәтіннің саласын бірден белгілеп, оны сол тараудан ғана іздеу, ал екінші жолы – көпмәнді сөздерді сөз тіркестері түрінде енгізу арқылы, олардың дұрыс баламасын алу.

Көпмәнді бейнелеуді формальды түрде келесідей ұсынуға болады: X, Y – дискретті кеңістік, $P(Y)$ – Y жиынының барлық ішкі жиындарының тізбегі болсын. Сонда, X -тен Y -ке болатын F көпмәнді бейнелеуі – $x \in X$ әрбір нүктесіне x нүктесінің бейнесі деп аталатын бос емес $F(x) \subseteq Y$ жиынын салыстыратын сәйкестік болып табылады, яғни $F: X \rightarrow P(Y)$. Бұл бейнелеуді **м-бейнелеу** деп атаймыз (X -тен Y -ке).

Көпмәнді бейнелеуді бірімді бейнелеуге түрлендіру үшін X жиынына T параметрлердің қосымша жиынын енгіземіз:

$$F: X \times T \rightarrow Y, \quad (1.1)$$

Сол кезде F көпмәнді бейнелеуін бірімді бейнелеулер тізбегіне түрлендіруге мүмкіндік туады:

$$\{f_i: X \rightarrow Y\}, f_i(x) \in F(x). \quad (1.2)$$

Қазақ-орыс машиналық аудармасындағы көпмәнді бейнелеу үлгісін қарастырайық. Төменде көпмәнді бейнелеу кестелерінің сегменттері көрсетілген [4].

1.1-кесте – Орыс тіліндегі зат есім қосымшаларының көпмәнді бейнелеу сегментінің кестесі [4]

Окончание	Число	Падеж	Склонение
а,я	1	1	1
ы, и	1	2	1
е	1	3	1
у, ю	1	4	1
ой, ей, ей	1	5	1
е	1	6	1
ы, и	2	1	1
-, ей, ь	2	2	1
ам, ям	2	3	1
ы, ей, и	2	4	1
	...		

Қазақ-орыс машиналық аударма келесі ретте жұмыс істейді: алдымен кіріске келіп түскен сөзге морфологиялық талдау жасалады, соның негізінде енгізілген сөзді мақсат тілге аударатын морфологиялық синтез жасалады, келесі кезектес синтаксистік талдау және соған сәйкес синтаксистік синтез жасалады.

Қазақ-орыс машиналық аудармасында енгізілген сөздің негізі мен қосымшасын іздеу алгоритмі. Бағдарламаның мәліметтер қорында аударылмалы сөздердің түбірлері 8 кестеде сөз таптарына қарай бөлініп орналасқан. Осыған дейін іздеу әдісі келесі түрде жұмыс істеді:

Біріншіден, сөздің алғашқы әрпін барлық кестелерден іздеп, дұрыс нұсқасы табылған жағдайда, сөздің екінші бөлігін жалғаулар кестесінен іздеп, оның атрибуттарын анықтады.

Ал табылмаған жағдайда бірінші бөлігін бір әріпке ұзартып, дәл осы операция қайтадан орындалады. Осылай қажетті нәтиже алынғанша қайталана береді.

Тексеріс жүзінде аударма жылдамдығы күрт азайып кеткені байқалды. Оның негізгі себебі әрбір сөзді 8 кестеден айналдыра іздеген өте тиімсіз. Сол себепті аудармаға қажетті мәліметтерді алудың жолын өзгерту қажет болды. Жаңа әдіс бізді күткен нәтижемізге жеткізе алды.

Жаңа іздеу алгоритмі бойынша бірінші қадамда сөздің екінші әріпінен басталып соңына дейін созылатын бөлігін жалғаулар кестесінен іздейді. Табылмаған жағдайда оң жақ бөлікті бір әріпке қысқартып отырады. Түбінде жалғау кестеден табылған кезде, сөздің бірінші бөлігі, яғни түбірі жалғаудың параметрлерінде көрсетілген сөз табының кестесінен ізделеді.

Келесі кезектегі мәселе жалғаудың қай сөз табына жалғанғандығы анықталғаннан кейін, сөздің негізін қай кестеден іздеу керектігі болып табылады. Осылайша түбірі анықталса да, анықталмаса да жалғауды қысқарта береді және мүмкін болғанша жалғаудың ең қысқа нұсқасын анықтайды.

Қазақ-орыс машиналық аудармасының морфологиялық талдауы. Морфологиялық талдау машиналық аударма бағдарламасының негізі болып табылады. Кез келген тілде сөздің морфологиялық құрамы болады, яғни біз сөзді аудару барысында оның құрылымын толығымен көре

аламыз. Кез келген сөздің құрылымында түбір мен қосымшасы тұрады, келесі алгоритмде қазақ-орыс машиналық аударма бағдарламасындағы сөздің морфологиялық талдауын көре аласыз:

$$A_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\} \quad (1.3)$$

A_1 – сөйлем; a_1, a_2, \dots, a_{k-1} – сөздер.

Морфологиялық талдау барысында қазақ тілінде енгізілген сөздің негізі мен қосымшасы ажыратылады. Яғни сіз көріп тұрғандай, ең алдымен бағдарлама сөйлемді сөздерге бөледі, одан кейін толығымен сөзді алып, түбірді – part1 деп алады оны деректер қорында орналасқан 8 кестеден іздейді, ал жалғауды – part2 ретінде қарастырады, оның бастапқы мәні бос болады. (1.3) формула бойынша түбірді кестеден таппаса сөзді әр іздеу сайын бір әріпке қысқартып отырады, сәкесінше part2 бір әріпке қосып отырады.

Part1 = {"адамдар", "адамда", "адамд", "адам"} – сөз табылды → "человек"

Part2 = {"", "р", "ар", "дар"} – жалғау табылды → "и"

Нәтижесінде кіріске келген "адамдар" сөзі "люди" деп аударылады.

Морфологиялық талдау барысында көпмәнді бейнелеу аппаратын пайдалану. Қазақ тілінде көпмәнді қосымшалар жиі кездеседі, осы мәселені шешу үшін көпмәнді бейнелеу аппаратын пайдалану машиналық аударма жұмысының сапасын жақсартуда тиімді болып табылады. Мысалы, кіріске қазақ тіліндегі «келді» сөзі келіп түсетін болса, машина алдымен оның негізін («кел») табады және оның орыс тіліндегі баламасын алады, содан кейін қосымшасының орыс тіліндегі баламасын алу барысында табыс септігінің жалғауы «ді»-ні алу керек пе немесе өткен шақ жұрнағы «ді»-ні алу керек пе деген қиын жағдайға тап болады. Осы мәселені шешу барысында қазақ тіліндегі қосымшалар сөздікке кестелік бейнелеу түрінде енгізілді (1-сурет).

RecNo	id	zhalgau	s_e	koptik	septik	taueldik	jiktik	shak	bolymsyz
1	217	ді	2	1	0	0	3	6	<null>
2	754	ді	1	1	4	0	0	0	<null>
3	793	ді	2	2	0	0	3	6	<null>

1-сурет – Қазақ тіліндегі көпмәнді «ді» қосымшасы

Қазақ-орыс машиналық аудармасының морфологиялық синтезін жүргізу. Морфологиялық синтез енгізілген сөздің орыс тіліндегі аудармасы түбірінің атрибуттары мен қазақ тіліндегі қосымшалар атрибуттары негізінде жасалады.

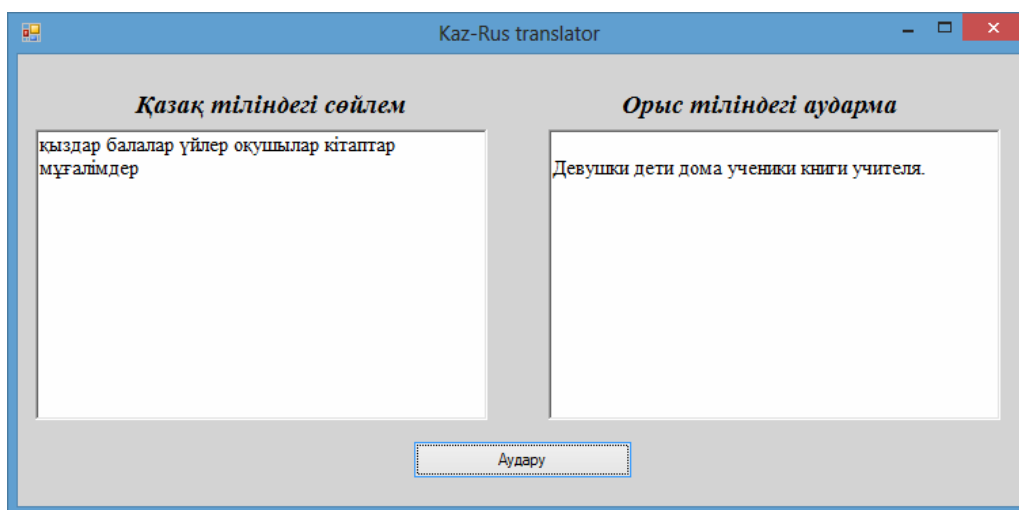
Қазақ-орыс машиналық аудармасында көптік жалғауларын аудару алгоритмдері. Қазақ тіліндегі көптік жалғау орыс тіліндегі «число» категориясына сәйкес келеді. Егер морфологиялық талдау барысында сөзге көптік жалғауы жалғанғаны белгілі болса, онда оның орыс тіліндегі аудармасына «множественное число» тағайындалады. Көптік формасы белгілі бір ережеге бағынбайтын, ерекше формадағы сөздер деректер базасындағы зат есім кестесіне енгізілді.

Сөзге көптік жалғауы жалғанғаны белгілі болған кезде деректер базасынан сол сөздің көптік бағаны тексеріледі, егер оның мәні 0-ге тең емес болса, онда тұрған мән алынады, мысалы, *бала – ребенок, балалар – дети*. Кері жағдайда көптік жалғауы келесі тәртіптер бойынша жалғанады:

Егер енгізілген сөздің орыс тіліндегі аудармасы «мужской родқа» тиісті болса және соңғы әрпі $pb[] = \{ 'б', 'в', 'д', 'з', 'л', 'м', 'н', 'п', 'р', 'с', 'т', 'ф' \}$ әріптерінің біріне тең болса, онда сөз аудармасына «ы» жалғауы жалғанады (мысалы, *қылыштар => кинжалы*). Егер аударманың соңғы әрпі $pb[] = \{ 'г', 'ж', 'й', 'ш', 'щ', 'ч' \}$ әріптерінің біріне тең болса, онда аударма соңына «и» қосымшасы жалғанады (мысалы, *гараждар => гаражи*) [4].

Егер сөз аудармасы «женский родқа» тиісті болса және соңғы әрпі «а», ал соңғы әріптің алдында $pb[] = \{ 'б', 'в', 'д', 'з', 'л', 'м', 'н', 'п', 'р', 'с', 'т', 'ф' \}$ жиынындағы әріптерінің бірі болса, онда сөз түбірінің орыс тіліндегі аудармасына «ы» жалғауы жалғанады (мысалы, *парталар => парты*), ал егер соңғы әрпі «я» болса немесе «а» болып, соңғы әріптің алдында $pb[] = \{ 'г', 'ж', 'й', 'х', 'ш', 'ч', 'щ', 'я' \}$ жиынындағы әріптердің бірі болса, онда сөздің орыс тіліндегі аудармасына «и» қосымшасы тағайындалады (мысалы, *жолдар => дороги*) [4].

Егер енгізілген сөздің аудармасы орыс тіліндегі «средний родқа» тиісті болса және соңғы екі әрпі «ие», «ре», «ле» болса, онда соңғы әріп «я» болып өзгереді, қалған жағдайлардың барлығында «а» қосымшасы жалғанады (мысалы, *терезелер* => *окна*, *теңіздер* => *моря*) [4].



2-сурет – Қазақ-орыс машиналық аудармасы бағдарламасының көпше түрдегі сөздерді аударуы

Қазақ-орыс машиналық аудармасында септік жалғауларын аудару алгоритмдері. Қазақ тіліндегі қосымшаның тағы бір түрі септік жалғауы болып табылады. Морфологиялық генератор жұмысын жеңілдету мақсатында орыс тіліндегі септік жалғаулары ДБ-да сәйкесінше орыс тіліндегі үш септеу бойынша кесте түрінде жинақталды. Бұл кестелерде орналасқан мәндер қазақ тіліндегі сөз атрибуттары бойынша шақырылатын болады. Ендігі кезекте жоғарыда келтірілген кестені қолдану арқылы қазақ тіліндегі септік жалғаулы сөздің орыс тіліне аударудың алгоритмдерін қарастырайық (сөздер жекеше түрде берілген):

Ілік септігі. 1-септеу. Ілік септігі орыс тіліндегі «родительный падежге» сәйкес келеді. Егер сөз аудармасының соңғы әрпі «а», ал соңғы әріптің алдындағы әріп $pb[] = \{ 'б', 'в', 'д', 'з', 'л', 'м', 'н', 'п', 'р', 'с', 'т', 'ф', 'ц' \}$ әріптерінің біріне тең болса, сөз аудармасына «ы» қосымшасы жалғанады, мысалы *көліктің* => *машины*. Егер сөз аудармасының соңғы әрпі «я» болса, онда аударманың соңғы әрпі «и» болып өзгертіледі, мысалы *жердің* => *земли* [4].

2-септеу. Егер сөз аудармасы «мужской родқа» тиісті болса, онда «родительный падежде» сөз соңына «а» қосымшасы жалғанады, мысалы *үйдің* => *дома*. Егер сөз аудармасы «мужской родқа» тиісті болса және соңғы әріп «ь» болса, онда сөздің соңғы әрпі «я» әрпімен алмастырылады, мысалы *жылқының* => *коня*. Егер сөз аудармасы «средний род» категориясына тиісті болса, онда морфологиялық синтез жасау барысында сөздің соңғы әрпі «а» жалғауымен алмастырылады, мысалы *күннің* => *солнца* [4].

3-септеу. Егер сөз аудармасы «женский род» категориясына тиісті болса және оның соңғы әрпі «ь» болса, онда «родительный падежде» ол сөз аудармасының соңғы әрпі «и» жалғауымен алмастырылады, *жолдың* => *пути* [4].

Барыс септігі. Орыс тіліндегі «дательный падежге» сәйкес келеді. 1-септеу. Егер сөз аудармасы «дательный падежге» тиісті болса, сөз аудармасына «е» қосымшасы жалғанады және сөз алдына «к» предлогы жалғанады, мысалы *көлікке* => *к машине* [4].

2-септеу. Егер сөз аудармасы «мужской род» немесе «средний родқа» тиісті болса, онда аударманың қосымшасы «у» қосымшасымен алмастырылады және сөз алдына «к» предлогы жалғанады, мысалы *сыныпқа* => *к классу*, *күнге* => *солнцу*. Егер сөз аудармасы «мужской родқа» тиісті болса және оның соңғы әрпі «ь» болса, онда сөзге «и» қосымшасы жалғанады [4].

3-септеу. Егер сөз аудармасы «женский род» категориясына тиісті болса және оның соңғы әрпі «ь» болса, онда қосымша «и» жалғауымен алмастырылады және сөз алдына «к» предлогы жалғанады, мысалы *жолға* => *к пути* [4].

Табыс септігі. Орыс тіліндегі «винительный падежге» сәйкес келеді. 1-септеу. Егер сөз аудармасы «винительный падежде» тұрса және қосымша «а», ал соңғы әріптің алдындағы әріп $pb[] = \{ 'б', 'в', 'г', 'д', 'ж', 'з', 'к', 'л', 'м', 'н', 'п', 'р', 'с', 'т', 'ф', 'ч', 'ш', 'щ', 'х', 'ц' \}$ әріптерінің біріне тең болса, сөз аудармасына «у» жалғауы жалғанады, мысалы *көлікті =>машину*. Егер сөздің соңғы әрпі «я» болса, онда аудару барысында сөздің қосымшасы «ю» болып өзгереді, мысалы *жерді =>землю* [4].

2-септеу. Егер сөз аудармасы мужской родқа тиісті болып, оның соңғы әрпі «ь» болса және сөз аудармасы средний родқа тиісті болып, оның соңғы екі әрпі «ие», «ре», «ле» болса, сөз қосымшасы «я»-ға ауысады, қалған жағдайларда «а» жалғауы жалғанады, мысалы *терезені =>окна, теңізді =>моря* [4].

3-септеу. Егер сөз аудармасы орыс тіліндегі үшінші септеуге сәйкес келсе, онда «винительный падежде» сөз түбірінің өзі шығарылады, мысалы *жолды =>путь* [4].

Жатыс септігі. Орыс тіліндегі «предложный падежге» сәйкес келеді және аударманың алдына «на» немесе «в» предлогтарының бірі қойылуы тиіс. Егер сөз «мужской род», «женский род» немесе «средний родқа» тиісті болса, онда сөз түбірінің аудармасына «е» жалғауы жалғанады да, сөз алдына «в» немесе «на» предлогы қойылады. Мысалы *көлікте =>в машине, үйде=>в доме* [4].

Шығыс септігі. Орыс тіліне аударылу барысында «родительный падежге» сәйкес аударылады, тек қана аударманың алдына «из» немесе «от» предлогы жалғанады.

1-септеу. Егер сөз аудармасының соңғы әрпі «а», ал соңғы әріптің алдындағы әріп $pb[] = \{ 'б', 'в', 'д', 'з', 'л', 'м', 'н', 'п', 'р', 'с', 'т', 'ф', 'ц' \}$ әріптерінің біріне тең болса, сөз аудармасына «ы» қосымшасы жалғанады және «из/от» предлогы қойылады, мысалы *көліктен => из машины*. Егер сөз аудармасының соңғы әрпі «я» болса, онда аударманың соңғы әрпі «ю» болып өзгертіледі және «из/от» предлогы қойылады, мысалы *автоматтандырудан=> из автоматизации* [4].

2-септеу. Егер сөз аудармасы «мужской родқа» тиісті болса, онда сөз соңына «а» қосымшасы жалғанады және сөз алдына «из/от» предлогы қойылады, мысалы *үйден=>из дома*. Егер сөз аудармасы «мужской родқа» тиісті болса және соңғы әріп «ь» болса, онда сөздің соңғы әрпі «я» әрпімен алмастырылады және «из/от» предлогы қойылады, мысалы *ажыратқыштан => из выключателя*. Егер сөз аудармасы «средний род» категориясына тиісті болса, онда морфологиялық синтез жасау барысында сөздің соңғы әрпі «а» жалғауымен алмастырылады және «из/от» предлогы қойылады, мысалы *терезеден => из окна* [4].

3-септеу. Егер сөз аудармасы «женский род» категориясына тиісті болса және оның соңғы әрпі «ь» болса, онда сөз аудармасының соңғы әрпі «и» жалғауымен алмастырылады және «из/от» предлогы қойылады, *жолдан =>из пути* [4].

Көмектес септік. Орыс тіліндегі «творительный падежге» сәйкес келеді.

1-септеу. Егер орыс тіліндегі сөз «творительный падеж» формасында тұрса және оның соңғы әрпі «а», ал соңғы әріптің алдындағы әріп $pb[] = \{ 'б', 'в', 'г', 'д', 'ж', 'з', 'к', 'л', 'м', 'н', 'п', 'р', 'с', 'т', 'ф', 'ч', 'ш', 'щ', 'х' \}$ әріптерінің біріне тең болса, онда сөзге «ой» жалғауы жалғанады, мысалы *көлікпен =>машинной*. Егер сөздің соңғы әрпі «ь» болса, онда морфологиялық синтез барысында сөзге «ей» жалғауы жалғанады, мысалы *жермен =>землей* [4].

2-септеу. Егер сөз аудармасы «мужской родқа» тиісті болса, синтез жүргізу барысында сөз түбіріне «ом» жалғауы жалғанады, мысалы *үймен =>домом*. Егер сөз аудармасы «мужской родқа» тиісті болса және оның соңғы әрпі «ь» болса немесе сөз аудармасы «средний родқа» тиісті болса, онда сөз түбіріне «ем» жалғауы жалғанады, мысалы *күнмен =>солнцем* [4].

3-септеу. Егер сөз аудармасы орыс тіліндегі үшінші склонениеге сәйкес келсе, онда бұл септікте сөз соңына «ю» жалғауы жалғанады, мысалы *жолмен =>путью* [4].

Септік атрибуттары жоғарыда келтірілген кестеге сәйкес орыс тіліне аударылады. Жоғарыда көрсетілген алгоритмдер жекеше түрдегі зат есімдерді септеуге арналған. Егер морфологиялық синтез кірісіне көпше түрдегі зат есім кіретін болса, онда алдымен сөз аудармасы көпше түрге ауыстырылады және тек содан кейін септеледі. Көпше түрдегі зат есімдердің септік жалғаулары да деректер базасына енгізілген [4].

Қазақ-орыс машиналық аудармасының синтаксистік талдауы. Машиналық аударманың сапалы болуының тағы бір шарты – сөйлемге дұрыс жасалған синтаксистік талдау мен сол талдауға байланысты құрастырылған синтаксистік синтездің болуы. Синтаксистік талдау барысында

қазақ тілінде енгізілген сөздер сөйлем мүшелеріне жіктеледі. Тілдегі сөйлемді құрауыштар арқылы формальды грамматика түрінде көрсететін болсақ:

- сөйлем (sentence-S)
- бастауыш тобы (noun phrase-NP)
- баяндауыш тобы (verb phrase-VP)
- пысықтауыш тобы (adverbial phrase-Adv.P)
- анықтауыш тобы (adjectival phrase-Adj.P)
- толықтауыш тобы (addition phrase-AdP)

Қазақ тіліндегі сөйлем құрылымын келесі формальды грамматика түрінде көрсетуге болады:

<сөйлем> ::= <бастауыш> <баяндауыш> <толықтауыш> <анықтауыш>

<пысықтауыш>

<бастауыш> ::= <атау септігіндегі зат есім> | <есімдік >

<баяндауыш> ::= <етістік> | <құрделі етістік >

<толықтауыш> ::= <табыс септігіндегі зат есім> | <табыс септігіндегі есімдік> | <көмектес септігіндегі зат есім>

<анықтауыш> ::= <сын есім> | <ілік септігіндегі зат есім>

<пысықтауыш> ::= <үстеу> | <барыс септігіндегі зат есім> | <жатыс септігіндегі зат есім> | <шығыс септігіндегі зат есім>

Қазақ-орыс машиналық аудармасының жұмысын жеңілдету мақсатында қазақ және орыс тіліндегі сөйлем мүшелерінің сәйкестіктері орнатылып, оларға арнайы нөмірлер тағайындалды. Осы нөмірлер арқылы қазақ және орыс тілдеріндегі сөйлем құрылымын тұрғызуға болады.

2-кесте – Қазақ және орыс тілдеріндегі сөйлем мүшелерінің сәйкестігі

Атрибут	Қазақ тіліндегі сөйлем мүшесі	Орыс тіліндегі сөйлем мүшесі
1	Бастауыш	Подлежащее
2	Баяндауыш	Сказуемое
3	Толықтауыш	Дополнение
4	Анықтауыш	Определение
5	Пысықтауыш	Обстоятельство

Қазақ-орыс машиналық аудармасының синтаксистік синтезі. Синтаксистік синтез – синтаксистік талдау жасалған сөйлемдегі сөйлем мүшелерін дұрыс ретпен орналастыру. Синтаксистік синтез барысында белгілі бір құрылымдағы қазақ тілінде енгізілген сөйлемнің орыс тіліндегі дұрыс құрылымы тағайындалады. Сөйлем мүшелерінің сөйлемдегі орындарының реті келесі сәйкестікте болады, теңдіктің сол жағында қазақ тіліндегі сөйлем құрылымы, ал теңдіктің оң жағында қазақ тіліндегі сөйлем құрылымына сәйкес келетін орыс тіліндегі сөйлем құрылымы орналасқан:

[1][2]=[1][2]

[1][4][4][3][2]=[1][4][2][4][3]

[3][2]=[3][2]

[1][4][3][4][2]=[1][4][3][4][2]

[1][3][2]=[1][2][3]

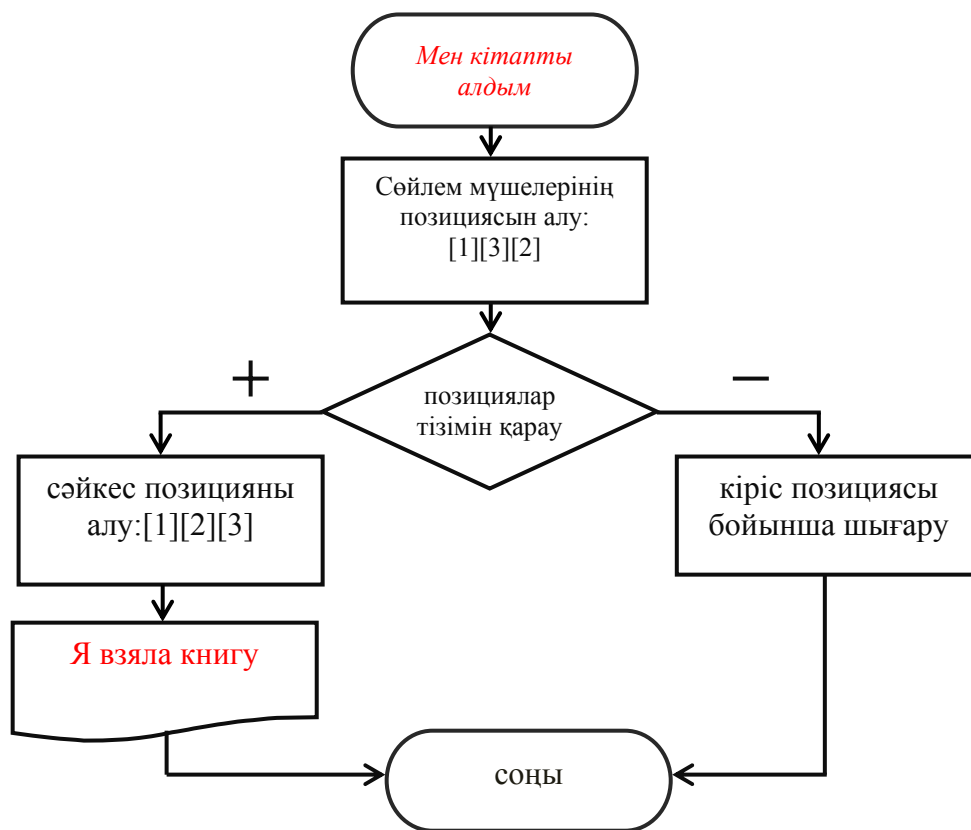
[1][3][4][4][2]=[1][2][3][4][4]

[1][4][2]=[1][2][4]

[1][4][4][3][2]=[1][2][4][4][3]

Бұл жерде қазақ тіліндегі алты сөзге дейінгі жиі кездесетін сөйлем құрылымдары жинақталған, егер машина енгізілген құрылымды бұл тізімнен таппаса, онда шығысындағы сөйлем кіріске келіп түскен позиция бойынша шығарылады (орыс тілінде сөйлем мүшелерінің реті орнықты болуы шарт емес). Қазақ тіліндегі сөйлемге синтаксистік талдау жасалып, олардың сөйлемдегі орналасу реттері анықталғаннан кейін жоғарыда келтірілген сәйкестік бойынша орыс тіліндегі сөйлем құрас-тырылады. Мысалы, қазақ тіліндегі [1][3][2] құрылымына сәйкес келетін «Мен кітапты алдым» сөйлемі енгізілетін болса, ондағы сөздердің қай сөз таптарына жататындықтары анықталады. Ендігі кезекте ол сөз таптарының қай сөйлем мүшесіне сәйкес келетіндіктері жоғарыда келтірілген формальды грамматика арқылы анықталады (3-сурет).

Кіріс: «Мен кітапты алдым», құрылымы [1][3][2]



3-сурет – Қазақ-орыс машиналық аудармасының синтаксистік синтез алгоритмі

Қазақ-орыс машиналық аудармасының жұмыс істеу нәтижелері. Қазіргі таңдағы қазақша-орысша машиналық аудармасының жұмыс нәтижесін келесі аударылған сөйлемдерден көруге болады:

Қазақ тіліндегі сөйлем	Орыс тіліндегі аударма
<p>мен ертең ойнамақпын. сен ертең ойнамақсың. ол ертең ойнамақ. біз ертең ойнамақпыз. сендер ертең ойнамақсыңдар.</p> <p>мен кеше келдім. мен кеше ойнағанмын. біз кеше келдік. біз кеше ойнадық. сен кеше ойнадың. сендер кеше ойнадыңдар. ол кеше келді. ол кеше ойнады.</p>	<p>Я завтра собираюсь играть. Ты завтра собираешься играть. Он завтра собирается играть. Мы завтра собираемся играть. Вы завтра собираетесь играть.</p> <p>Я вчера приходил. Я вчера играл. Мы вчера приходили. Мы вчера играли. Ты вчера играл. Вы вчера играли. Он вчера приходил. Он вчера играл.</p>
<p>Аудару</p>	

4-сурет – Қазақ-орыс машиналық аудармасының өткен шақ пен мақсатты келер шақты аудару мысалы

Қазақ тіліндегі сөйлем	Орыс тіліндегі аударма
<p>мен ертең ойнаймын. сен ертең ойнайсың. ол ертең ойнайды. біз ертең ойнаймыз. сендер ертең ойнайсыңдар.</p> <p>мен ертең ойнармын. сен ертең ойнарсың. ол ертең ойнар. біз ертең ойнармыз. сендер ертең ойнарсыңдар.</p>	<p>Я завтра буду играть. Ты завтра будешь играть. Он завтра будет играть. Мы завтра будем играть. Вы завтра будете играть.</p> <p>Я завтра буду играть, наверно. Ты завтра будешь играть, наверно. Он завтра будет играть, наверно. Мы завтра будем играть, наверно. Вы завтра будете играть, наверно.</p>
Аудару	

5-сурет – Қазақ-орыс машиналық аудармасының ауыспалы және болжалды келер шақты аудару мысалы

Қазақ-орыс машиналық аудармасының келешектегі жұмысы. Қорытындылай келе айтарымыз – қазақ-орыс машиналық аудармасы қазіргі таңда қарапайым сөйлемдерге сапалы аударма жасай алады, соның ішінде зат есімге септік, көптік, тәуелдік жалғауларын жалғау, сын есім мен зат есім арасындағы тәуелділікті орнату, осы шақ сөйлемдерін аудару. Соңғы атқарылған жұмыстар нәтижесінде қазақ-орыс машиналық аударма бағдарламасына өткен шақ және келер шақ алгоритмдері қосылып, аталған шақтағы сөйлемдер де сапалы түрде аударылуда. Келесі кезекте атқарылуы тиіс тапсырмалар – зат есім фразалары мен етістік фразаларын аудару алгоритмдерін қосу және бағдарламаның жұмыс тиімділігін арттыру.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Введение в теорию многозначных отображений: Составитель Б. Д. Гельман. – Воронеж, 2003.
- 2 Tomasz Kaczynski, Multivalued Maps As a Tool in Modeling and Rigorous Numerics. Departement de mathematiques. – Universite de Sherbrooke, 2008.
- 3 Тукеев У.А., Жуманов Ж.М., Сапакова С.З. Метод многозначных отображений для машинного перевода с одного естественного языка на другой. – 2013.
- 4 Баскаков Н.А., Хасенова А.К., Исенгалиева В.А., Қордабаев Т.Р. Қазақ және орыс тілдерінің салыстырмалы грамматикасы. – Алматы: Наука, 1966.

REFERENCES

- 1 Vvedenie v teoriyu mnogoznachnyh otobrazhenij: Sostavitel' B. D. Gel'man. Voronezh, 2003.
- 2 Tomasz Kaczynski, Multivalued Maps As a Tool in Modeling and Rigorous Numerics. Departement de mathematiques. Universite de Sherbrooke, 2008.
- 3 Tukeev U.A., Zhumanov Zh.M., Sapakova S.Z. Metod mnogoznachnyh otobrazhenij dlja mashinnogo perevoda s odnogo estestvennogo jazyka na drugoj. 2013.
- 4 Baskakov N.A., Hasenova A.K., Isengalieva V.A., Kordabaev T.R. Қазақ және орыс тилдерінің салыстырмалы грамматикасы. Almaty: Nauka, 1966.

Резюме

У. А. Тукеев, М. А. Болатбек, М. А. Ильжанов, А. Х. Разахов

(Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан)

КАЗАХСКО-РУССКИЙ МАШИННЫЙ ПЕРЕВОД НА ОСНОВЕ АППАРАТА МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Цель работы: разработка моделей, алгоритмов и программы казахско-русского машинного перевода на основе аппарата многозначных отображений, обеспечить отечественных пользователей качественной программой машинного перевода.

Результаты: была разработана программа, выполняющая перевод слов, словосочетаний и простых предложений с казахского на русский язык.

Область применения: предложенной программой может пользоваться любой человек, нуждающийся в помощи переводчика.

Научная новизна: поиск корня и окончаний введенного слова выполняется с двух сторон, соответствия окончаний казахского и русского языков выполняется с помощью запрашивания соответствующих суффиксов из базы данных, в базе данных имеется более 12 000 слов, разделенных по частям речи.

Ключевые слова: машинный перевод, анализатор машинного перевода, генератор машинного перевода, морфологический анализ, морфологический генератор, алгоритмы машинного перевода, синтаксический анализ, синтаксический генератор, аппарат многозначный отображений.

Summary

U. A. Tukeev, M. A. Bolatbek, M. A. Il'zhanov, A. Kh. Razakhov

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan)

KAZAKH-RUSSIAN MACHINE TRANSLATION BASED ON THE UNIT-VALUED MAPPINGS

Purpose of work: the system analysis of existing domestic machine translation systems, development of models, algorithms and the program of the analyser and generator of the Kazakh-Russian machine translation based on machine set-valued mapping.

Results: the program which is carrying out the translation of words, phrases and simple sentences from Kazakh into Russian was developed.

Scope: any person needing the help of the translator can use the offered program.

Scientific novelty: search of a root and the terminations of the entered word is carried out from two parties, compliances of the terminations of the Kazakh and Russian languages is carried out by means of requesting of the corresponding suffixes from a database, in a database is available more than 12 000 words divided in parts to speech.

Keywords: machine translation, analyser of machine translation, generator of machine translation, morphologic parse, morphologic generator, algorithms of machine translation, syntactic analyser, syntactic generator, set-valued mapping.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 004.8

М. А. БОЛАТБЕК¹, К. Д. БАЙСЫЛБАЕВА²

¹эл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
²Алматы Экономика және статистика академиясы, Алматы, Қазақстан)

ҚАЗАҚ-ОРЫС ЖӘНЕ КЕРІ БАҒЫТТАҒЫ МАШИНАЛЫҚ АУДАРМАНЫҢ ГРАММАТИКАЛЫҚ СӘЙКЕСТІКТЕРІ

Аннотация. Зерттеу жұмысының мақсаты қазақша-орысша және орысша-қазақша машиналық аударма анализаторы мен генераторын құруға қажетті алгоритмдер мен үлгілерді қалыптастыру, машиналық аударма бағдарламаларын құру болып табылады. Жұмыс нәтижесі ретінде қазақ тіліндегі сөздерді, сөз тіркестері мен қарапайым сөйлемді орыс тіліне және кері бағытта сапалы түрде аударатын машиналық аударма бағдарламасы құрастырылды. Жұмыс нәтижесінің қолданылу аймағы – кез келген саладағы мәтіндерді бастапқы тілден (қазақ, орыс) мақсат тіліне (орыс, қазақ) аударғысы келетін кез келген қолданушы. Зерттеудің ғылыми жаңалықтары қазақ және орыс тілдерінде грамматикалық ерекшеліктер мен ұқсастықтар көрсеткіштік кесте түрінде жинақталғандығы болып табылады, оларды бағдарламада қолдану барысында тек сұраныс жасау жеткілікті.

Тірек сөздер: машиналық аударма, машиналық аударма анализаторы, машиналық аударма генераторы.

Ключевые слова: машинный перевод, анализатор машинного перевода, генератор машинного перевода.

Keywords: machine translation, analyser of machine translation, generator of machine translation.

Қазақ тілі түркі тілдерінің қатарына жататын және оның осы топтағы тілдерге қатысты өзіндік ерекшеліктерін сақтаған тіл болып табылады. Қазақ тілі типі мен морфологиялық құрылымы жағынан агглюнативті тілдер қатарына жатады, сондықтан қазақ тіліндегі жаңа сөздер оның түбіріне немесе негізіне аффикстердің, грамматикалық суффикстердің (жұрнақтар) және қосымшалардың (жалғаулар) жалғануы арқылы құралады.

Орыс тілі флективті тілдер қатарына жатады. Орыс тіліндегі сөздер түбірге род, түр, септік сияқты үш грамматикалық категория сипаттарын флексия түрінде байланыстыратын сөз түрлендіруші аффикстерді жалғау арқылы құралады.

Қазақ тілі грамматикасының мәтінді қазақ тілінен орыс тіліне аудару барысында жеңілдік тудыратын тұстары:

– Көптеген түркі тілдеріндегі сияқты қазақ тілінде де сөз тіркестері мен сөйлемдегі сөздердің орны, сөздер арасындағы байланыс қатаң түрде анықталады және тұрақты болып келеді [1]:

а. баяндауыш әрдайым сөйлемнің соңында орналасады: *Мен университетте оқимын (Я учусь в университете);*

б. бастауыш әрдайым сөйлемнің бас жағында орналасады: *Сен Университетте оқисың (Ты учишься в университете);*

в. анықтауыш анықталуы тиіс сөздің алдында орналасады: *Мен Ұлттық университетте оқимын (Я учусь в Национальном университете);*

– Әртүрлі категориядағы етістікті тудыратын етістіктің негізі болып II жақтағы бұйрық рай формасындағы етістік табылады: *ойна /играй/ -ойна-й-ды /играет/; ойна-ды /играл/; ойна-мақ, /будет играть/;*

– Орыс тіліндегі «предлог» және «приставка» орнына қазақ тілінде аффикстер мен көмекші сөздер қолданылады: *налево – солға қарай; приехал – келді; до завтра – ертеңге дейін* [2].

Жоғарыда айтып кеткендей, қазақ тіліндегі сөз құрамының тұрақты болуы, яғни алдымен сөз түбірі, одан кейін қосымшаның орналасуы сөзге морфологиялық талдау мен синтез жасау барысында жеңілдік туындайды.

Қазақ тіліндегі мәтінді орыс тіліне аудару барысында қиындық тудыратын тұстар:

– Қазақ тіліндегі сөзден кейін орналасатын шылаулар орыс тілінің «предлогтарына» сәйкес келеді. Алайда қазақ тілінде әр септіктің тұрақты шылаулары болатын болса, орыс тілінде бір «предлог» бірнеше септікке сәйкес келеді, шылауы бар мәтінді орыс тіліне аудару барысында қажетті «предлогтың» қайсысын таңдау мәселесі туындайды, мысалы шығыс септігіндегі «үйімнен» сөзі енгізілетін болса, оның аудармасында орыс тіліндегі «родительный падеждің» **от, до, из, у, с** «предлогтарының» қайсысын таңдауды машина дәл таба бермейді, яғни *от дома, из дома, с дома, у дома, до дома* нұсқаларының ішінен бірі таңдалуы тиіс.

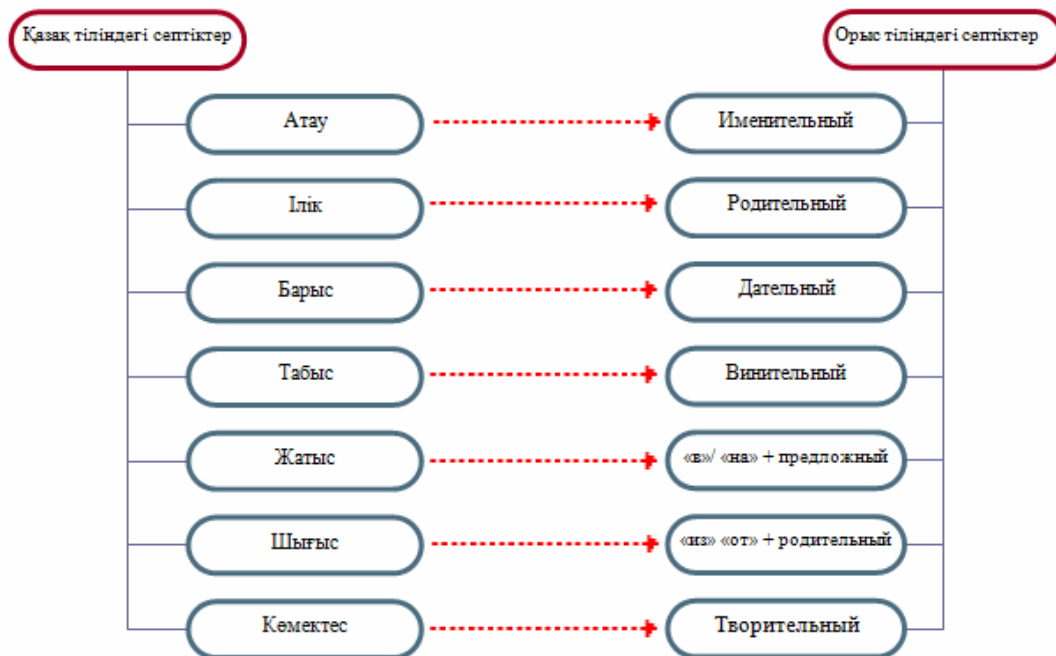
– Қазақ тілінде тәуелділікті білдіретін есімдік жасырын орналаса алады, яғни «үйімнің есігі» тіркесін көргенде біз ол үйдің бірінші жаққа тиісті екендігін түсінеміз, енді сол тіркесті орыс тіліне аударатын болсақ, тәуелділікті білдіретін есімдікті міндетті түрде қолдануымыз керек болады, яғни «*дверь моего дома*», есімдікті көрсетпей жай ғана «*дверь дома*» дейтін болсақ, мәтіннің мағынасы өзгеріп кетуі мүмкін. Тағы бір айта кететін жайт – орыс тілінде тәуелдік формасында тұрған сөзді септеу барысында оның алдында тұрған есімдік те міндетті түрде септеледі (мысалы, *менің үйімнің=> моего дома, менің үйіме => моему дому*).

– Қазақ тіліндегі етістіктің жіктік жалғаулары әр жақ үшін тұрақты болып келетін болса, яғни бірінші жақ үшін **-мын, -мін, -бын, -бін, -пын, -пін** болатын болса, орыс тіліндегі әр етістіктің өзіндік жіктелу формасы бар және көп жағдайда олар ешқандай заңдылықтарға бағынбастан өзгере береді, мысалы қазақ тіліндегі «*мен ұшамын*», «*сен ұшасың*», «*ол ұшады*» тіркестерінде етістіктің «**ұш**» түбірі сақталып, тек жіктік жалғаулары жалғанып отырса, орыс тілінде «*я лечу*», «*ты летишь*», «*он летит*» болып бастапқы сөз түбірінің «**ле**» бөлігі ғана сақталады. Орыс тілінде етістіктердің жіктелуінде ережеге бағынбайтын етістіктер көптеп кездеседі. Бұл мәселе етістіктерді аудару барысында қиындықтар тудырады.

– Қазақ тіліндегі омоним сөздердің көптеп кездесуі аудару барысында машинаға қиындық тудырады, яғни машина сөздің қай нұсқасының аудармасын алу керектігін білмей, семантика тұрғысынан сәйкес келмейтін нұсқаны алуы мүмкін.

Машиналық аударма кірісіне келіп түскен сөзге алдымен морфологиялық талдау жасалады. Морфологиялық талдау барысында сөздің негізі мен қосымшасы ажыратылады. Сөз негізі мен

қосымшасы және олардың сәйкес атрибуттары екі тілдегі деректер қорында орналасады. Қазақ тіліндегі септеулік шылаулар септелген сөздерден кейін орналасады, сол себепті қазақша-орысша машиналық аудармада кіріс сөзінен кейін тұрған септеулік шылауға қарағанда оның алдындағы сөзге назар көбірек аударылады. Соған орай қазақша-орысша машиналық аудармада септіктердің келесі сәйкестігін пайдаланған жөн.



1-сурет – Қазақша-орысша машиналық аудармасындағы септіктер сәйкестігі

Орыс тілінде морфологиялық омонимдер өте жиі кездеседі. Мысалы, «*дома*» сөзіндегі «а» қосымшасын қарастырсақ, машинаның оны аудару барысында көптік жалғауының (*дома – үйлер*), жатыс септігінің жалғауының (*дома – үйде*) әлде шығыс септігінің жалғауының (*из дома – үйден*) қайсысын таңдау керек деген мәселе туындайды. Аталған мәселені шешу барысында орысша-қазақша машиналық аудармасы үшін септіктердің келесі сәйкестіктері орнатылды (1-кесте).

1-кесте – Екі тіл септіктерінің сәйкестігі

Орыс тіліндегі септік түрлері	Қазақ тіліндегі септік түрлері
Именительный падеж	Атау септік
Родительный падеж	Ілік септік
Дательный падеж	Барыс септік
Винительный падеж	Табыс септік
Творительный падеж	Көмектес септік
Родительный падеж + из	Шығыс септік
Родительный падеж + от	Шығыс септік
Предложный падеж + на	Жатыс септік
Предложный падеж + в	Жатыс септік

Қазақ тілінде зат есім мен сын есім арасында қандай да бір грамматикалық тәуелділік болмайды, яғни септік, көптік жалғаулары тек қана анықталып тұрған зат есімге жалғанады. Ал орыс тілінде зат есім мен сын есімнің арасында грамматикалық тәуелділіктің болуы міндетті, мысалы егер зат есім септелетін болса, онда оның алдында тұрған сын есімге де сәйкесінше септік жалғаулары жалғануы тиіс [2]. Қазақ тіліндегі сын есім орыс тіліне өзі анықтап тұрған зат есімнің орыс тіліндегі «родына», көптік формасына және септігіне байланысты аударылады. Қазақша-орысша машиналық аударма генераторы мәтін ішінде сын есім кездескен жағдайда оған өзі анықтап тұрған (сын есімнен кейін орналасқан) зат есімнің атрибуттарын тағайындайды, яғни оның көптік, септік жалғаулары мен «роды» өзінен кейін орналасқан зат есімнің атрибуттарына тең болады (2-сурет):



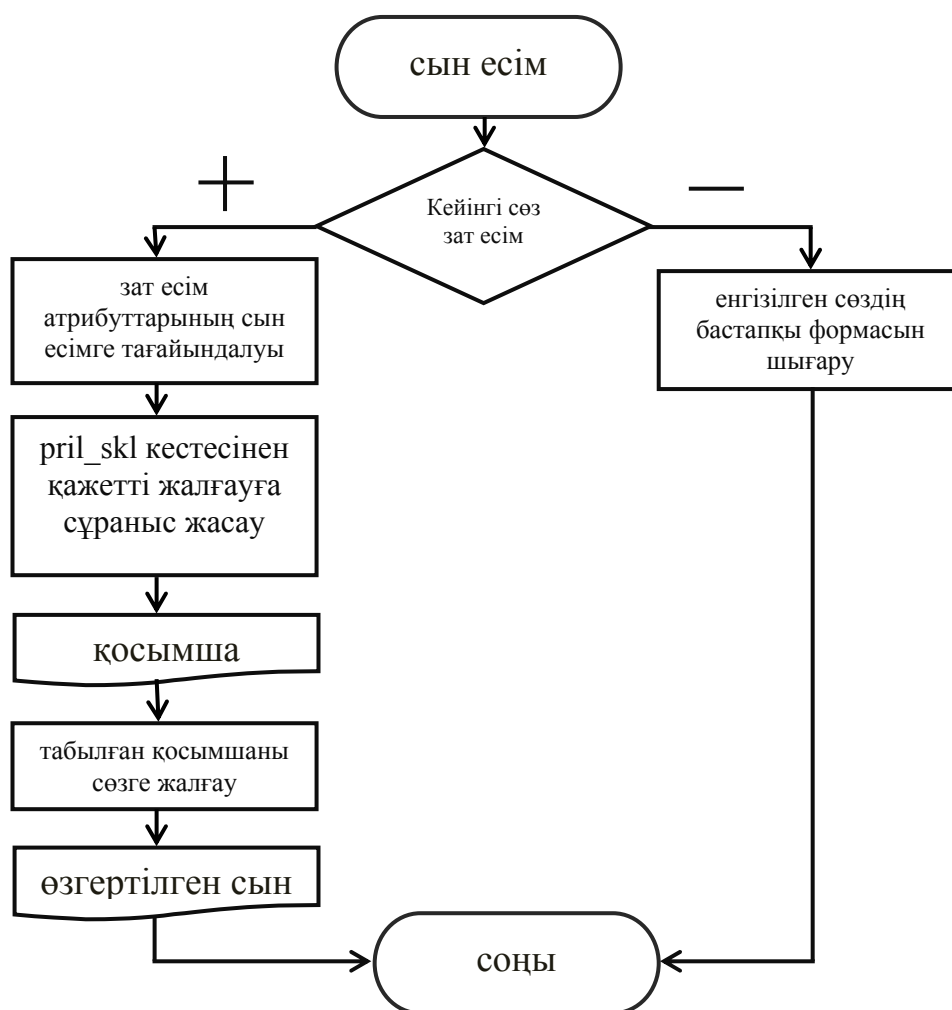
2-сурет – Кейінгі тұрған зат есім атрибутының сын есімге тағайындалуы

Орыс тіліндегі сын есімдердің де тұрақты септік жалғаулары болады. Олар бағдарламада қолданылу үшін деректер базасына жеке кесте ретінде толтырылды (3-сурет):

RecNo	padezh	rod	chislo	okonch1	okonch2
1	2	1	1	ого	его
2	3	1	1	ому	ему
3	1	1	1	ый	ий
4	4	1	1	ого	его
5	5	1	1	ым	им
6	6	1	1	ом	ем
7	0	2	1	ая	яя
8	2	2	1	ой	ей
9	3	2	1	ой	ей
10	4	2	1	ую	юю
11	5	2	1	ой	ей

3-сурет – Деректер базасындағы сын есімнің септік жалғаулары

Сын есімді аудару үшін кейінгі тұрған зат есімнің атрибуттары (род, көптік, септік) сын есімге берілгеннен кейін жоғарыдағы кестеден аталған атрибуттарға ие жалғауға сұраныс жасалады. Қажетті жалғау табылғаннан кейін олар сын есімге жалғанады, осы алгоритмді келесі түрде көрсетуге болады (4-сурет):



4-сурет – Қазақ-орыс машиналық аударма генераторының сын есімді аудару алгоритмі

Деректер базасындағы *okonch1* және *okonch2* жалғауларын таңдау сын есімнің соңғы әріптеріне байланысты жүргізіледі. Мысалы, мәтін ішінде кездесетін «қызыл кітаптың» тіркесін аудару қажет болса, алдымен сын есімнен кейін тұрған «кітап» сөзінің атрибуттары сын есімге тағайындалады. Кіріс мәліметтері:

<кітаптың>::=<кітап><тың>

<кітап>::=<rod=2,skl=1>

<тың>::=<padezh=2, chislo=1>

Сын есімге тағайындалатын атрибуттар:

<қызыл>::=<rod=2, padezh=2, chislo=1 >

Деректер базасындағы *pril_skl* кестесінен *rod=2*, *padezh=2*, *chislo=1* болатын жалғауға сұраныс жасалады және табылған қосымша сын есімге жалғанады.

Ал орыс тілінен қазақ тіліне аударма жасау барысында келтірілген мәселе үлкен қиындық туғызбайды, себебі – қазақ тілінде «род» ұғымы болмайды, мысалы синяя книга – **көк** кітап, синее небо – **көк** аспан және синий стол – **көк** үстел.

Морфологиялық талдау мен генератор жұмыстары аяқталғаннан кейін синтаксистік талдау мен генератор жұмыстары басталады. Қазақ тілінде сөйлем мүшелерінің орындары көбінесе тұрақты болып келеді, сол себепті орысша-қазақша машиналық аудармада қазақ тіліндегі сөйлем мүшелерінің ретін анықтап, оларды өз орындарына орналастыру қажеттілігі туындайды. Бұл мәселені шешу үшін екі тілдегі сөйлем мүшелерінің сәйкестіктері орнатылды:

Подлежащее – Бастауыш {1}

Сказуемое – Баяндауыш {2}

Дополнение – Толықтауыш {7}
 Определение – Анықтауыш {8}
 Обстоятельство – Пысықтауыш {9}

2-кесте – Орыс тілі мен қазақ тілінің сөйлем мүшелерінің сәйкестігі

Орыс тіліндегі сөйлем және реті	Қазақ тіліндегі сөйлем және реті
Я пойду	Мен барамын
{1 2}	{1 2}
Орыс тіліндегі сөйлем және реті	Қазақ тіліндегі сөйлем және реті
Читать книгу	Кітап оқу
{2 7}	{7 2}
Орыс тіліндегі сөйлем және реті	Қазақ тіліндегі сөйлем және реті
Я читаю книгу	Мен кітап оқып отырмын
{1 2 7}	{1 7 2}
Орыс тіліндегі сөйлем және реті	Қазақ тіліндегі сөйлем және реті
Красивая девушка танцует	Шырайлы қыз билеп жүр
{4 1 2}	{4 1 2}
Орыс тіліндегі сөйлем және реті	Қазақ тіліндегі сөйлем және реті
Я спешу домой	Мен үйге асығып барамын
{1 2 5}	{1 5 2}
Орыс тіліндегі сөйлем және реті	Қазақ тіліндегі сөйлем және реті
Я пишу письмо подруге	Мен құрбыма хат жазып отырмын
{1 2 7 5}	{1 5 7 2}
Орыс тіліндегі сөйлем және реті	Қазақ тіліндегі сөйлем және реті
Я на больших концертах танцую	Мен үлкен концерттерде билеймін
{1 4 7 2}	{1 4 7 2}
Орыс тіліндегі сөйлем және реті	Қазақ тіліндегі сөйлем және реті
Я читаю интересную книгу в библиотеке	Мен кітапханада қызықты кітап оқып отырмын
{1 2 4 7 5}	{1 5 4 7 2}

Қазіргі таңда жоғарыда келтірілген алгоритмдер бойынша жұмыс істейтін қазақша-орысша және орысша-қазақша машиналық аударма бағдарламалары бар. Олардың көмегімен қарапайым сөздерді, сөз тіркестерін және жай сөйлемдерді аударуға болады. Болашақта екі тілдің ерекшеліктері мен ұқсастықтарын ескере отырып, күрделі сөйлемдерді, етістік фразаларын және т.б. лексикалық бірліктерді аудару алгоритмдерін машиналық аударма бағдарламасына қосу жоспарлануда.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Баскаков Н.А., Хасенова А.К., Исенғалиева В.А., Қордабаев Т.Р. Қазақ және орыс тілдерінің салыстырмалы грамматикасы. – Алматы: Наука, 1966.
 2 <http://www.testent.ru/index/0-199>

REFERENCES

- 1 Baskakov N.A., Hasenova A.K., Isengalieva V.A., Kordabaev T.R. Қазақ және орыс тілдерінің салыстырмалы грамматикасы. – Алматы: Наука, 1966.
 2 <http://www.testent.ru/index/0-199>

Резюме

М. А. Болатбек¹, К. Д. Байсылбаева²

(¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
²Алматинская академия Экономики и статистики, Алматы, Казахстан)

ГРАММАТИЧЕСКИЕ СООТВЕТСТВИЯ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА С КАЗАХСКОГО НА РУССКИЙ ЯЗЫК И ОБРАТНО

Цель работы: формировать алгоритмы и модели для разработки анализатора и генератора казахско-русского и русско-казахского машинного перевода, разработка программы машинного перевода.

Результат: разработана программа перевода слов, словосочетаний и простых предложений с казахского на русский язык и обратно.

Область применения: все пользователи, нуждающиеся в переводе текста из исходного языка (казахский, русский) на целевой язык (русский, казахский)

Новизна работы: грамматические особенности и сходства двух языков представлены в виде индексных таблиц, при использовании их в программе достаточно сделать запрос.

Ключевые слова: машинный перевод, анализатор машинного перевода, генератор машинного перевода.

Summary

M. A. Bolatbek¹, K. D. Baisylbaeva²

(¹Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan,
²Алматы Экономика және статистика академиясы, Almaty, Kazakhstan)

GRAMMATICAL MATCHING MACHINE TRANSLATION FROM KAZAKH INTO RUSSIAN AND BACK

Work purpose: to form algorithms and models for development of the analyzer and the generator of the Kazakh-Russian and Russian-Kazakh machine translation, development of the program of machine translation.

Result: the translation program of words, phrases and simple sentences with Kazakh into Russian and back is developed.

Scope: all users needing the translation of the text from source language (Kazakh, Russian) into target language (Russian, Kazakh)

Novelty of work: grammatical features and similarities of two languages are presented in the form of index tables, when using them in the program it is enough to make request.

Keywords: machine translation, analyser of machine translation, generator of machine translation.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 519.633.6:532.546

А. С. АЖИБЕКОВА

(Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан)

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КОМБИНИРОВАННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель, описывающая нестационарный процесс фильтрации жидкости в круговом пласте. Ставится комбинированная обратная задача идентификации параметров пласта. Предложен итерационный метод совместного определения коэффициента вязкости жидкости и давления на контуре пласта. Получены априорные оценки для решений прямой и сопряженной задач. Показана ограниченность искомых модельных характеристик, доставляющих минимум некоторому функционалу при известных значениях забойных давлений. Доказана монотонность минимизируемого функционала.

Ключевые слова: комбинированная обратная задача, итерационный метод, априорная оценка.

Тірек сөздер: аралас кері есеп, итерациялық әдіс, априорлық бағалау.

Keywords: combined inverse problem, iterative method, a priori estimate.

Введение. Задачи подземной гидродинамики, как и задачи математической физики в целом, делятся на прямые и обратные. Прямая задача заключается в определении решения заданного уравнения или системы уравнений при определенных начальных и граничных условиях. Математическая постановка обратных задач: по дополнительной информации о решении рассматриваемой задачи требуется определить неизвестную функцию. Искомая функция либо является коэффициентом дифференциального уравнения, либо входит в краевые или начальные условия. Проблемы, связанные с интерпретацией результатов гидродинамических исследований скважин принадлежит к классу обратных задач подземной гидродинамики. Характер дополнительной информации определяется возможностями промыслового эксперимента. Разработка и обоснование математических моделей физических процессов тесно связана с решением обратных задач для дифференциальных уравнений. При решении обратных задач подземной гидродинамики необходимо учитывать наличие погрешностей в промысловых данных. Обратные задачи математической физики часто оказываются в классическом смысле поставленным некорректно [1]. С этой особенностью обратных задач связаны основные трудности построения эффективных вычислительных алгоритмов. Необходимость рассмотрения некорректных задач и их постановка, естественная с точки зрения приложений, была впервые отмечена А.Н. Тихоновым. Было показано, что от классического понятия корректности целесообразно перейти к условно корректной постановке задачи при выполнении условий. А.Н. Тихонов разработал новый подход, позволяющий строить приближенные решения некорректно поставленных задач, устойчивые к малым изменениям исходных данных [2].

Различные постановки и решения обратных задач фильтрации жидкости даны в работах [3-5]. Численные методы решения обратных задач подземной гидродинамики изучены в работах [6, 7].

В работе рассмотрен итерационный подход к решению обратной задачи подземной гидродинамики. Разработанные итерационные формулы позволяют оценить коэффициент вязкости жидкости и давление на контуре пласта. Структура статьи организована следующим образом. В первом разделе приводится математическая формулировка задачи. Во втором разделе строятся прямые и сопряженные разностные задачи, выводятся итерационные формулы расчета искомых переменных: коэффициента вязкости и давления на контуре пласта. В третьем разделе получены априорные

оценки для решений прямой и сопряженной задачи. Полученные результаты оформлены в виде леммы 1 и леммы 2. В четвертом разделе приведены результаты доказательства ограниченности приближенных значений коэффициента вязкости и давления на контуре пласта в виде теоремы 1. В пятом разделе получена априорная оценка для решения вспомогательной задачи (лемма 3) и доказывается монотонность минимизируемого функционала. Результат оформлен в виде теоремы 2.

1. Постановка задачи. Рассмотрим в области $Q = (r_c, R) \times (0, T)$ уравнение параболического типа, описывающее осесимметрическое нестационарное течение жидкости в пористой среде. В работе рассматривается математическая модель нестационарной фильтрации нефти к скважине в круговом резервуаре. Функция $P(r, t)$ является решением задачи:

$$\frac{\partial P(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{\beta r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{kr}{\mu} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right), \quad r_c < r < R, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial P(r_c, t)}{\partial r} = \frac{q(t)}{2\pi H r_c}, \quad P(R, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

и начальным условием

$$P(r, 0) = P_0(r) - P_K, \quad r_c \leq r \leq R. \quad (3)$$

Здесь r – фазовая переменная; t – время; $P(r, t)$ – давление; k – проницаемость пласта; β – коэффициент упругоэластичности пласта; μ – вязкость жидкости; $q(t)$ – дебит; P_K – давление на контуре пласта; H – мощность пласта; r_c – радиус скважины; R – радиус пласта; T – время эксперимента.

В качестве дополнительного условия используем измеренное давление на забое скважины:

$$P_\sigma(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Требуется определить величины: вязкость μ и давление на контуре пласта P_K . Остальные параметры, входящие в систему (1)-(4) считаем известными. Введем обозначение: $\bar{\mu} = \frac{1}{\mu}$, $z = (\bar{\mu}, P_K)$.

Решение $z = (\bar{\mu}, P_K)$ комбинированной обратной задачи (1)- (4) доставляет минимум функционалу:

$$J(z) = \int_0^T (P(r_c, t) + P_K - P_\sigma(t))^2 dt \rightarrow \min. \quad (5)$$

2. Итерационный метод решения. Искомую величину $z = (\bar{\mu}, P_K)$ находим рекуррентно. Задается начальное приближение при $n = 0$: $z_n = (\bar{\mu}(n), P_K(n))$. Приближение z_n минимизирует функционал:

$$J(z_n) = \int_0^T (P_n(r_c, t) - P_\sigma(t) + P_K(n))^2 dt \rightarrow \min,$$

где $P_n(r, t)$ – решение прямой задачи (1)-(3) для z_n .

Следующее приближение z_{n+1} определяем из условия монотонности функционала $0 < J(z_{n+1}) < J(z_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Пусть Δ – оператор со следующими свойствами:

- 1) $\Delta f = f(n+1) - f(n)$,
- 2) $\Delta(f \cdot g) = f(n) \cdot \Delta g + g(n) \cdot \Delta f + \Delta f \cdot \Delta g$,

где функции $f, g \in R^n$.

Тогда

$$\Delta P(r, t) = P_{n+1}(r, t) - P_n(r, t), \quad \Delta \bar{\mu} = \bar{\mu}(n+1) - \bar{\mu}(n), \quad \Delta P_K = P_K(n+1) - P_K(n).$$

Рассмотрим разность функционалов:

$$\begin{aligned}
 J(z_{n+1}) - J(z_n) &= \int_0^T (P_{n+1}(r_c, t) - P_\sigma(t) + P_K(n+1))^2 dt - \int_0^T (P_n(r_c, t) - P_\sigma(t) + P_K(n))^2 dt = \\
 &= 2 \int_0^T (\Delta P(r_c, t) + \Delta P_K) (P_n(r_c, t) - P_\sigma(t) + P_K(n)) dt + \int_0^T (\Delta P(r_c, t) + \Delta P_K)^2 dt = \\
 &= 2 \int_0^T \Delta P(r_c, t) (P_n(r_c, t) - P_\sigma(t) + P_K(n)) dt + 2 \int_0^T \Delta P_K (P_n(r_c, t) - P_\sigma(t) + P_K(n)) dt + \\
 &\quad + \int_0^T (\Delta P(r_c, t) + \Delta P_K)^2 dt.
 \end{aligned}$$

С другой стороны, находим что:

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^T \Delta P(r_c, t) (P(r_c, t) - P_\sigma(t) + P_K) dt &= \int_{r_c}^R \beta r \Delta P_K \psi(r, 0) dr + \\
 + \int_0^T \int_{r_c}^R kr \Delta \bar{\mu} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} dr dt &+ \int_0^T \int_{r_c}^R kr \Delta \bar{\mu} \frac{\partial \Delta P(r, t)}{\partial r} \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} dr dt, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где функция $\psi(r, t)$ является решением сопряженной задачи:

$$\beta \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{\mu} k r \frac{\partial \psi(r, t)}{\partial r} \right) = 0, \quad (7)$$

$$\bar{\mu} k r_c \frac{\partial \psi(r_c, t)}{\partial r} = 2(P(r_c, t) - P_\sigma(t) + P_K), \quad \psi(R, t) = 0, \quad (8)$$

$$\psi(r, T) = 0. \quad (9)$$

Учитывая (6), получим:

$$\begin{aligned}
 J(z_{n+1}) - J(z_n) &= \int_0^T \Delta P_K \bar{\mu}(n) k R \frac{\partial \psi_n(R, t)}{\partial r} dt + \int_0^T \int_{r_c}^R \Delta \bar{\mu} k r \frac{\partial P_n(r, t)}{\partial r} \frac{\partial \psi_n(r, t)}{\partial r} dr dt + \\
 + \int_0^T \int_{r_c}^R kr \Delta \bar{\mu} \frac{\partial \Delta P(r, t)}{\partial r} \frac{\partial \psi_n(r, t)}{\partial r} dr dt &+ \int_0^T (\Delta P(r_c, t) + \Delta P_K)^2 dt.
 \end{aligned}$$

Из условия монотонности функционала $0 < J(z_{n+1}) < J(z_n)$, выводим итерационные формулы расчета параметров:

$$\bar{\mu}(n+1) = \bar{\mu}(n) - \gamma_1(n) \int_0^T \int_{r_c}^R kr \frac{\partial P_n(r, t)}{\partial r} \frac{\partial \psi_n(r, t)}{\partial r} dr dt, \quad (10)$$

$$P_K(n+1) = P_K(n) - \gamma_2(n) \int_0^T \bar{\mu}(n) k R \frac{\partial \psi_n(R, t)}{\partial r} dt, \quad (11)$$

где $\gamma_l(n) > 0, l = 1, 2$.

3. Априорные оценки. В работе получены априорные оценки для решений прямой и сопряженной задач.

Лемма 1. Если $P_0(r) \in L_2(r_c, R)$, $q(t) \in L_2(0, T)$, то для решения прямой задачи (1)-(3) $P_n(r, t)$ имеют место оценки:

$$\beta \int_{r_c}^R r P_n^2(r, t) dr + \bar{\mu}(n) k \int_0^t \int_{r_c}^R r \left(\frac{\partial P_n(r, \tau)}{\partial r} \right)^2 dr d\tau \leq c_1 \left(1 + P_K^2(n) + \frac{1}{\bar{\mu}(n)} \right),$$

$$\int_0^t P_n^2(r_c, \tau) d\tau \leq \frac{c_1}{\bar{\mu}(n)k} \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \left(1 + P_K^2(n) + \frac{1}{\bar{\mu}(n)}\right), \quad (c_1 = \text{const}).$$

Доказательство: Умножим уравнение (1) для n -го приближения на функцию $P_n(r, t)$ и проинтегрируем в области $Q^t = (r_c, R) \times (0, t)$:

$$\int_{r_c}^R \int_0^t \beta r \frac{\partial P_n(r, \tau)}{\partial \tau} P_n(r, \tau) d\tau dr = \int_0^t \int_{r_c}^R \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{\mu}(n) k r \frac{\partial P_n(r, \tau)}{\partial r} \right) P_n(r, \tau) dr d\tau.$$

Применяя формулу интегрирования по частям и учитывая начальное и граничные условия (2)-(3), выводим:

$$\begin{aligned} \int_{r_c}^R \beta r P_n^2(r, t) dr + 2 \int_0^t \int_{r_c}^R \bar{\mu}(n) k r \left(\frac{\partial P_n(r, \tau)}{\partial r} \right)^2 dr d\tau &= \int_{r_c}^R \beta r P_0^2(r) dr - 2 \int_{r_c}^R \beta r P_0(r) P_K(n) dr + \\ &+ \int_{r_c}^R \beta r P_K^2(n) dr - 2 \int_0^t \frac{q(\tau)}{2\pi H} P_n(r_c, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Используя ε -неравенство Коши, оцениваем:

$$\begin{aligned} \int_{r_c}^R \beta r P_n^2(r, t) dr + \left(2 - \frac{\varepsilon_1}{k\bar{\mu}(n)} \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \right) \int_0^t \int_{r_c}^R \bar{\mu}(n) k r \left(\frac{\partial P_n(r, \tau)}{\partial r} \right)^2 dr d\tau &\leq \int_{r_c}^R \beta r P_0^2(r) dr - \\ &2\beta \int_{r_c}^R r P_0(r) P_K(n) dr + \int_{r_c}^R \beta r P_K^2(n) dr + \frac{1}{4\varepsilon_1 \pi^2 H^2} \int_0^t q^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon_1 = \frac{k\bar{\mu}(n)}{\ln\left(\frac{R}{r_c}\right)}$. Тогда получим следующую оценку:

$$\beta \int_{r_c}^R r P_n^2(r, t) dr + \bar{\mu}(n) k \int_0^t \int_{r_c}^R r \left(\frac{\partial P_n(r, \tau)}{\partial r} \right)^2 dr d\tau \leq c_1 \left(1 + P_K^2(n) + \frac{1}{\bar{\mu}(n)} \right),$$

где $c_1 = \max \left\{ 2\beta \int_{r_c}^R r P_0^2(r) dr, \beta (R^2 - r_c^2), \frac{1}{4\pi^2 H^2 k} \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \int_0^t q^2(\tau) d\tau \right\}$.

Тогда $\int_0^t P_n^2(r_c, \tau) d\tau \leq \frac{c_1}{\bar{\mu}(n)k} \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \left(1 + P_K^2(n) + \frac{1}{\bar{\mu}(n)} \right)$. Лемма доказана.

Аналогичным образом выведены априорные оценки для решения сопряженной задачи.

Лемма 2. Если $P_0(r) \in L_2(r_c, R)$, $P_\sigma(t) \in L_2(0, T)$, то для решения сопряженной задачи (7)-(9) имеют место оценки:

$$\begin{aligned} \beta \int_{r_c}^R r \psi_n^2(r, t) dr + \bar{\mu}(n) k \int_t^T \int_{r_c}^R r \left(\frac{\partial \psi_n(r, \tau)}{\partial r} \right)^2 dr d\tau &\leq \frac{c_2(\bar{\mu}(n) + 1)}{\bar{\mu}^2(n)} \left(1 + P_K^2(n) + \frac{1}{\bar{\mu}(n)} \right), \\ \int_t^T \psi_n^2(r_c, \tau) d\tau &\leq \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \frac{c_2(\bar{\mu}(n) + 1)}{k\bar{\mu}^3(n)} \left(1 + P_K^2(n) + \frac{1}{\bar{\mu}(n)} \right). \end{aligned}$$

Здесь $c_2 = \max \left\{ \frac{12}{k} \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \int_t^T P_\sigma^2(\tau) d\tau, \frac{12c_1}{k^2} \left(\ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \right)^2, \frac{12T}{k} \ln\left(\frac{R}{r_c}\right) \right\}$.

4. Ограниченность $\bar{\mu}(n+1)$, $P_K(n+1)$. Учитывая леммы 1, 2 доказана ограниченность приближенных значений искомых величин $\bar{\mu}(n+1)$, $P_K(n+1)$.

Теорема 1. Если имеют место условия лемм 1 и 2, то существуют константы c_i , непрерывно зависящие от начальных данных, такие, что $\bar{\mu}(n+1)$ и $P_K(n+1)$ удовлетворяют неравенствам:

$$0 < c_3 \leq \bar{\mu}(n+1) \leq c_4 < \infty,$$

$$0 < c_5 \leq P_K(n+1) \leq c_6 < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

5. Монотонность функционала. Для доказательства монотонности последовательности минимизируемых функционалов рассмотрим вспомогательную задачу относительно $\Delta P(r, t)$:

$$\beta \frac{\partial \Delta P(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \Delta \left(\bar{\mu} \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right) \right), \quad r_c < r < R, \quad 0 < t \leq T, \quad (12)$$

$$kr_c \Delta \left(\bar{\mu} \frac{\partial P(r_c, t)}{\partial r} \right) = 0, \quad \Delta P(R, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (13)$$

$$\Delta P(r, 0) = -\Delta P_K, \quad r_c \leq r \leq R. \quad (14)$$

Получены априорные оценки для решения задачи (12)-(14).

Лемма 3. Если имеет место теорема 1, то для решения задачи (12)-(14) справедливы оценки:

$$\beta \int_{r_c}^R r (\Delta P(r, t))^2 dr + c_3 k \int_0^t \int_{r_c}^R r \left(\frac{\partial \Delta P(r, \tau)}{\partial r} \right)^2 dr d\tau \leq c_7 \left((\Delta P_K)^2 + (\Delta \bar{\mu})^2 \right),$$

$$\int_0^T (\Delta P(r_c, t))^2 dt \leq c_8 \left((\Delta P_K)^2 + (\Delta \bar{\mu})^2 \right), \quad c_7, c_8 = const.$$

Доказана следующая теорема о монотонности функционала.

Теорема 2. Пусть

$$\bar{A}^2 = \left(\int_0^T \int_{r_c}^R kr \frac{\partial P_n(r, t)}{\partial r} \frac{\partial \psi_n(r, t)}{\partial r} dr dt \right)^2 > 0, \quad \bar{B}^2 = \left(\int_0^T \bar{\mu}(n) kR \frac{\partial \psi_n(R, t)}{\partial r} dt \right)^2 > 0$$

и имеет место лемма 3. Тогда существуют константы $\gamma_l(n)$, $l = 1, 2$, для которых выполняется неравенство $J(z_{n+1}) - J(z_n) < 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
- 2 Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 287 с.
- 3 Kravaris G., Seinfeld J.H. Identification of parameters in distributed parameter system by regularization // SIAM J. Control and Optimization. – 1985. – Vol. 23, N 2. – P. 217-241.
- 4 Sun N.-Z. Inverse problems in Groundwater modeling. Kluwer Acad., Norwell, Mass. – 1997. – 337 p.
- 5 Sergienko I.V., Deineka V.S. Solving combined inverse problems for multicomponent parabolic distributed systems // Cybernetics and Systems Analysis. 2007. – Vol. 43, N 5.
- 6 Ажибекова А.С. Итерационный метод рас чета коэффициента упругости нефтяного месторождения // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. 2013. № 4.
- 7 Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г. Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации. – М.: Ижевск, 2006. – 172 с.

REFERENCES

- 1 Adamar Zh. *Zadacha Koshi dlja linejnyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa*. M.: Nauka, 1978. (in Russ).
- 2 Tihonov A.N., Arsenin V.Ja. *Metody reshenija nekorrektnyh zadach*. M.: Nauka, 1979. (in Russ).
- 3 Kravaris G., Seinfeld J.H. *SIAM J. Control and Optimization*. 1985. Vol. 23, N 2.
- 4 Sun N.-Z. *Kluwer Acad.*, Norwell, Mass. 1997.
- 5 Sergienko I.V., Deineka V.S. *Cybernetics and Systems Analysis*. Vol. 43, N 5. 2007.
- 6 Azhibekova A.S. *News of NAS RK. Series of Physical and Mathematical*. N 4. 2013. (in Russ).
- 7 Hairullin M.H., Hisamov R.S., Shamsiev M.N., Farhullin R.G. *Interpretacija rezul'tatov gidrodinamicheskikh issledovanij skvazhin metodami reguljarizacii*. M. Izhevsk, 2006. (in Russ).

Резюме

Ә. С. Әжібекова

(Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан)

МҰНАЙ ҚАБАТТЫҢ ПАРАМЕТРЛЕРІН АНЫҚТАУ КЕРІ ЕСЕБІН ШЕШУГЕ АРНАЛҒАН
ИТЕРАЦИЯЛЫҚ ТӘСІЛ

Жұмыста оралымды мұнай қабаттағы тұрақсыз сүзбе құбылысының математикалық үлгісі қарастырылған. Мұнайлы қабаттың параметрлерін анықтаудың аралас кері есебі қойылған. Сұйықтық тұтқырлығын және бастапқы қабат қысымын анықтаудың итерациялық әдісі ұсынылған. Тура және кері есептер шешімдеріне априорлық бағалаулар табылған. Ізделіп отырған шамалардың шектеулі екендігі көрсетілген. Минимизацияланатын функционалдың бірқалыптылығы дәлелденген.

Тірек сөздер: аралас кері есеп, итерациялық әдіс, априорлық бағалау.

Summary

A. S. Azhibekova

(Kazakh-British technical university, Almaty, Kazakhstan)

ITERATIVE APPROACH FOR SOLVING A COMBINED INVERSE PROBLEM
OF IDENTIFYING RESERVOIR PARAMETERS

This paper considers a mathematical model of an unsteady fluid filtration process in a circular reservoir. A combined inverse problem consists of identifying reservoir parameters. An iterative method is proposed for determining the viscosity coefficient and the external boundary pressure. A number of a priori estimates for solutions of direct and conjugate problems are obtained. The finiteness of approximate values of the unknowns is shown. The solution of the inverse problem minimizes a residual functional. The monotonicity of the minimized functional is proved.

Keywords: combined inverse problem, iterative method, a priori estimate.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 517.927

Е. А. АҚЖИГИТОВ¹, Ж. М. КАДИРБАЕВА²

¹Казахский агротехнический университет им. С. Сейфуллина, Астана, Казахстан,
²Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан)

РАЗРЕШИМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Методом параметризации получен критерий разрешимости линейной краевой задачи с интегральным условием для систем нагруженных дифференциальных уравнений. Предложен алгоритм нахождения решения рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, интегральные условия, алгоритм.

Тірек сөздер: дифференциалдық теңдеу, интегралдық шарт, алгоритм.

Keywords: differential equations, integral conditions, the algorithm.

Рассматривается краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(t)x(\theta_{i-1}) + f(t), \quad t \in (0, T), \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$Bx(0) + Cx(T) + \int_0^T D(t)x(t)dt = d, \quad d \in R^n, \quad (2)$$

где матрицы $A_j(t)$, $D(t)$, $j = \overline{0, m+1}$ размерности $(n \times n)$ и n – вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0, T]$, B и C – постоянные матрицы размерности $(n \times n)$, $0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \theta_{m+1} = T$.

Через $C([0, T], R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x: [0, T] \rightarrow R^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$.

Непрерывная на $[0, T]$ функция $x(t)$, имеющая на $(0, T)$ непрерывную производную по t , называется решением краевой задачи (1), (2), если она удовлетворяет системе нагруженных дифференциальных уравнений (1) и интегральному краевому условию (2).

В последние годы интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений неуклонно возрастает и они находят многочисленные применения в задачах практики. Нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения и краевые задачи для таких уравнений рассмотрены в [1-4] и получены условия их разрешимости различными методами. В работах [3, 4] линейная двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений решалась методом параметризации [5]. На его основе были установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости указанной задачи. Численная реализация метода параметризации решения линейной двухточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений предложена в [6].

Одним из важных классов краевых задач для дифференциальных уравнений являются задачи с интегральными условиями. Интегральные условия в частности возникают в тех случаях, когда невозможно непосредственное измерение каких-либо физических величин, но известно их усредненное значение. Подобные ситуации имеют место при изучении явлений, происходящих в плазме, процессов распространения тепла, некоторых технологических процессов, процессов влагопереноса в пористых средах, обратных задачах, а также в задачах математической биологии и демографии [7].

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости и построения решения линейной краевой задачи с интегральным условием (2) для систем нагруженных дифференциальных уравнений (1).

Задача (1), (2) исследуется методом параметризации. Интервал $[0, T]$ разбиваем точками нагружения: $[0, T) = \bigcup_{r=1}^m [\theta_{r-1}, \theta_r)$.

Сужение вектор-функции $x(t)$ на r -ый интервал $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t) = x(t)$ при $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$. Введем дополнительные параметры $\lambda_r = x_r(\theta_{r-1})$, $r = \overline{1, m+1}$, и на каждом интервале $[\theta_{r-1}, \theta_r)$ производим замену $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, $r = \overline{1, m+1}$. Тогда исходная задача (1), (2) перейдет к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A_0(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(t)\lambda_i + f(t), \quad (3)$$

$$u_r(\theta_{r-1}) = 0, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}, \quad (4)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{m+1} + C \lim_{t \rightarrow T-0} u_{m+1}(t) + \sum_{j=1}^{m+1} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} D(t)[u_j(t) + \lambda_j]dt = d, \quad d \in R^n, \quad (5)$$

$$\lambda_p + \lim_{t \rightarrow \theta_p-0} u_p(t) = \lambda_{p+1}, \quad p = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Задачи (1), (2) и (3) – (6) эквивалентны в следующем смысле. Если функция $x(t)$ является решением задачи (1), (2), тогда пара $(\lambda, u[t])$, где $\lambda = (x(\theta_0), x(\theta_1), \dots, x(\theta_m))$, $u[t] = (x(t) - x(\theta_0), x(t) - x(\theta_1), \dots, x(t) - x(\theta_m))$ является решением задачи (3)–(6). И наоборот,

если пара $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$, где $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_{m+1})$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_{m+1}(t))$, является решением задачи (3) – (6), тогда функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$, $t \in [\theta_{r-1}, \theta_r)$, $r = \overline{1, m+1}$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{m+1} + \lim_{t \rightarrow T-0} \tilde{u}_{m+1}(t)$ является решением исходной задачи (1), (2).

Введение дополнительных параметров позволяет получить начальные данные (4). При фиксированных значениях параметров $\lambda \in R^{n(m+1)}$ систему функций $u[t]$ можно определить решая задачи Коши (3), (4). Используя $X(t)$ – фундаментальную матрицу дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, решение задачи Коши (3), (4) запишем в виде

$$u_r(t) = X(t) \int_{\theta_{r-1}}^t X^{-1}(\tau) \left[A_0(\tau)\lambda_r + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(\tau)\lambda_i + f(\tau) \right] d\tau, \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}. \quad (7)$$

Переходя в правой части (7) к пределу при $t \rightarrow \theta_r - 0$, и подставив соответствующие им выражения в условия (5), (6), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров λ_r , $r = \overline{1, m+1}$:

$$\begin{aligned} & B\lambda_1 + C\lambda_{m+1} + CX(T) \int_{\theta_m}^T X^{-1}(\tau) \left[A_0(\tau)\lambda_{m+1} + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(\tau)\lambda_i \right] d\tau + \\ & + \sum_{j=1}^{m+1} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} D(t) \left\{ X(t) \int_{\theta_{j-1}}^t X^{-1}(\tau) \left[A_0(\tau)\lambda_j + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(\tau)\lambda_i \right] d\tau + \lambda_j \right\} dt = \\ & = d - CX(T) \int_{\theta_m}^T X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^{m+1} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} D(t) X(t) \int_{\theta_{j-1}}^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau dt, \\ & \lambda_p + X(\theta_p) \int_{\theta_{p-1}}^{\theta_p} X^{-1}(\tau) \left[A_0(\tau)\lambda_p + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(\tau)\lambda_i \right] d\tau - \lambda_{p+1} = -X(\theta_p) \int_{\theta_{p-1}}^{\theta_p} X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad p = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (8)$$

Матрицу соответствующей левой части системы уравнений (8), (9) обозначим через $Q(\theta)$ и систему запишем в виде

$$Q(\theta)\lambda = -F(\theta), \quad \lambda \in R^{n(m+1)}, \quad (10)$$

где

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} -d + CX(T) \int_{\theta_m}^T X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{m+1} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} D(t) X(t) \int_{\theta_{j-1}}^t X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau dt \\ X(\theta_1) \int_{\theta_0}^{\theta_1} X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \\ \dots \\ X(\theta_m) \int_{\theta_{m-1}}^{\theta_m} X^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau \end{pmatrix}.$$

Определение. Задача (1), (2) называется однозначно разрешимой, если для любой пары $(f(t), d)$, где $f(t) \in C([0, T], R^n)$, $d \in R^n$, она имеет единственное решение.

Справедливы следующие утверждения

Теорема 1. Для однозначной разрешимости задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы матрица $Q(\theta): R^{n(m+1)} \rightarrow R^{n(m+1)}$ была обратимой.

Теорема 2. Задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда вектор $F(\theta) \in R^{n(m+1)}$, составленный из заданной пары $(f(t), d)$, $f(t) \in C([0, T], R^n)$, $d \in R^n$, ортогонален к ядру транспонированной матрицы $(Q(\theta))'$, т.е. для $\forall \xi \in Ker(Q(\theta))'$ справедливо равенство $(F(\theta), \xi) = 0$, где (\cdot, \cdot) – скалярное произведение в $R^{n(m+1)}$.

При выполнении условий теоремы 2 единственное решение задачи (1), (2) определяется на основе следующего алгоритма.

Коэффициенты и правую часть системы (10) находим решая матричные и векторные задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A_0(t)X + A_i(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad i = \overline{0, m+1}, \quad X(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, m+1},$$

$$\frac{dX}{dt} = A_0(t)X + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad X(\theta_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, m+1}.$$

Решая систему (10) найдем $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{m+1}^*)$, где $\lambda^* \in R^{n(m+1)}$ состоит из значений решений исходной задачи (1), (2) в начальных точках подинтервалов, т.е. $\lambda_r^* = x^*(\theta_{r-1})$, $r = \overline{1, m+1}$.

Значения решения в остальных точках подинтервалов снова определяется решением задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A_0(t)x + \sum_{i=1}^{m+1} A_i(t)\lambda_i + f(t), \quad t \in [\theta_{r-1}, \theta_r), \quad r = \overline{1, m+1}, \quad (11)$$

$$x(\theta_{r-1}) = \lambda_r, \quad r = \overline{1, m+1}. \quad (12)$$

Если фундаментальная матрица известна и используемые интегралы вычисляются, то предлагаемый алгоритм позволяет получить решение рассматриваемой задачи (1), (2) в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М: Высшая школа, 1995. – 205 с.
- 2 Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравн. – 1979. – Т. 15, № 1. – С. 96-105.
- 3 Бакирова Э.А. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. – 2005. – № 1. – С. 95-102.
- 4 Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations // Science review. S. Seifullin Kazakh agro technical university. – 2012. – № 2(10). – С. 35-40.
- 5 Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1989. – Т. 29, № 1. – С. 50-66.
- 6 Джумабаев Д.С., Илиясова Г.Б. Об одной численной реализации метода параметризации решения линейной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. – 2014. – № 2. – С. 275-280.
- 7 Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для квазилинейного гиперболического уравнения // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 1. – С. 88-95.

REFERENCES

- 1 Nahushev A.M. Uravneniya matematicheskoy biologii. M: Vysshaya shkola, 1995. 205 s.
- 2 Nahushev A.M. Kraevye zadachi dlja nagruzhennyh integro-differencial'nyh uravnenij giperbolicheskogo tipa i nekotorye ih prilozhenija k prognozu pochvennoj vlagi. Differenc. uravn. 1979. T. 15, № 1. S. 96-105.
- 3 Bakirova Je.A. O priznake odnoznachnoj razreshimosti dvouhtochечноj kraevoj zadachi dlja sistemy nagruzhennyh differencial'nyh uravnenij. Izvestija NAN RK. Ser. fiz.-matem. 2005. № 1. S. 95-102.
- 4 Akzhigitov E.A., Kadirbayeva Zh.M. On a solvability of two-point boundary value problem for loaded differential equations. Science review. S. Seifullin Kazakh agro technical university. 2012. № 2(10). S. 35-40.
- 5 Dzhumabaev D.S. Priznaki odnoznachnoj razreshimosti linejnoy kraevoj zadachi dlja obyknovennogo differencial'nogo uravnenija. Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiziki. 1989. T. 29, № 1. S. 50-66.
- 6 Dzhumabaev D.S., Ilijasova G.B. Ob odnoj chislennoj realizacii metoda parametrizacii reshenija linejnoy kraevoj zadachi dlja nagruzhennogo differencial'nogo uravnenij. Izvestija NAN RK. Serija fiz.-mat. 2014. № 2. S. 275-280.
- 7 Pul'kina L.S. Nelokal'naja zadacha s integral'nymi uslovijami dlja kvazilinejnogo giperbolicheskogo uravnenija. Matematicheskie zametki. 2001. T. 70, № 1. S. 88-95.

Резюме

Е. А. Ақжігітов¹, Ж. М. Қадырбаева²

¹С. Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, Астана, Қазақстан,
²ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан)

ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ҮШІН ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТЫ БАР СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

Параметрлеу әдісі негізінде жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін интегралдық шарты бар сызықты шеттік есептің шешілімділігінің критеріі алынған. Қарастырылып отырған есептің шешімін табу алгоритмі ұсынылған.

Тірек сөздер: дифференциалдық теңдеу, интегралдық шарт, алгоритм.

Summary

E.A. Akzhigitov, Zh.M. Kadirbayeva

¹S. Seifullin Kazakh agrotechnical university, Astana, Kazakhstan,
²Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan)

SOLVABILITY OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Criterion of solvability of linear boundary value problem with integral condition for systems of loaded differential equations is received by parametrization method. An algorithm for finding solution of considering problem is offered.

Keywords: differential equations, integral conditions, the algorithm.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 517.956

С. А. АЛДАШЕВ

(Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан)

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Аннотация. В работе показано однозначная разрешимость классического решения задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа.

Ключевые слова: задача Пуанкаре, уравнение Лапласа, многомерный.

Тірек сөздер: Пуанкаре есебі, Лаплас теңдеуі, көп өлшемді.

Keywords: the task Poincare, the Laplace equation, multidimensional.

Введение. Корректные постановки краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитически функций комплексного переменного изучены в [1, 2].

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений ([3]).

В данной работе показано, однозначная разрешимость классического решения задачи Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа.

П.1. Постановка задачи и результат. Пусть D – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D области D обозначим через $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$ соответственно.

В области D рассмотрим многомерное уравнение Лапласа

$$\Delta_x u + u_{tt} = 0, \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным x_1, \dots, x_m , $m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m , t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$.

В качестве задачи Пуанкаре рассмотрим задачу

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D из класса $C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup S_0) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_t|_{t=0} = \nu(r, \theta), u|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t, \theta), u|_{S_\alpha} = \varphi(r, \theta). \quad (2)$$

при этом $\psi(\alpha, 0) = \varphi(1, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева.

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = const.$$

Через $\bar{v}_n^k(r), \psi_n^k(t), \bar{\varphi}_n^k(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $\nu(r, \theta)$, $\psi(t, \theta)$, $\varphi(r, \theta)$.

Тогда справедлива

Теорема. Если $\nu(r, \theta) \in W_2^l(S_0), \psi(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), \varphi(r, \theta) \in W_2^l(S_\alpha), l > \frac{3m}{2}$, то задача 1 однозначно разрешима

п.2. Доказательство теоремы. В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u + u_{tt} = 0, \quad (4)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, j > 1.$$

Известно ([4]), что спектр оператора δ собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2), n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 принадлежит классу $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (5)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (5) в (4), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([4]), будем иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k + \bar{u}_{ntt}^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n} \quad n = 0, 1, \dots \quad (6)$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, запишется в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k(r, 0) = \bar{v}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_n^k(t), \quad \bar{u}_n^k(r, 0) = \bar{\varphi}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

В (6), (7) произведя замену $\bar{u}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_n^k(t)$ получим

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k + \bar{u}_{ntt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (8)$$

$$\bar{u}_{nt}^k(r, 0) = v_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = 0, \quad \bar{u}_n^k(r, \alpha) = \varphi_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

$$\bar{f}_n^k(r, t) = -\psi_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_n^k, \quad v_n^k(r) = \bar{v}_n^k(r) - \psi_{nt}^k(0), \quad \varphi_n^k(r) = \bar{\varphi}_n^k(r) - \psi_n^k(\alpha).$$

Произведя замену $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(z, t)$ задачу (8),(9) приведем к следующей задаче

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k + v_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (10)$$

$$u_{nt}^k(r, 0) = \tilde{v}_n^k(r), \quad u_n^k(1, t) = 0, \quad u_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_n^k \quad (11)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad \tilde{f}_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \tilde{v}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} v_n^k(r), \quad \bar{\varphi}_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \varphi_n^k(r).$$

Решение задачи (10),(11) ищем в виде

$$v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t), \quad (12)$$

где $u_{1n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$Lv_{1n}^k = \tilde{f}_n^k(r, t), \quad (13)$$

$$v_{1nt}^k(r, 0) = 0, \quad v_{1n}^k(1, t) = 0, \quad v_{1n}^k(r, \alpha) = 0, \quad (14)$$

а $u_{2n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \quad (15)$$

$$v_{2nt}^k(r, 0) = \bar{v}_n^k(r), \quad v_{2n}^k(1, t) = 0, \quad v_{2n}^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r). \quad (16)$$

Решение выше указанных задач рассмотрим в виде

$$u_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (17)$$

при этом пусть

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r), \quad \tilde{v}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k R_s(r), \quad \bar{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k R_s(r). \quad (18)$$

Подставляя (17) в (13), (14), с учетом (18), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (19)$$

$$R_s(1) = 0, |R_s(0)| < \infty, \quad (20)$$

$$T_{stt} - \mu T_s(t) = a_{ns}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad (21)$$

$$T_{st}(0) = 0, \quad T_s(\alpha) = 0. \quad (22)$$

Ограниченным решением задачи (19),(20) является ([15])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (23)$$

где $\nu = n + \frac{m-2}{2}$, $\mu_{s,n}$ – нули функций Бесселя первого рода $J_\nu(z)$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (21) представимо в виде ([5])

$$T_{s,n}(t) = c_{1s} ch\mu_{s,n} t + c_{2s} sh\mu_{s,n} t + \frac{ch\mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) sh\mu_{s,n} \xi d\xi - \frac{sh\mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) ch\mu_{s,n} \xi d\xi,$$

c_{1s}, c_{2s} – произвольные постоянные, удовлетворив условию будем иметь

$$\begin{aligned} \mu_{s,n} T_{s,n}(t) = & \left[(th\mu_{s,n} \alpha) \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) ch\mu_{n,s} \xi d\xi - \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) sh\mu_{n,s} \xi d\xi \right] ch\mu_{n,s} t + \\ & + (ch\mu_{n,s} t) \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) sh\mu_{n,s} \xi d\xi - (sh\mu_{n,s} t) \int_0^\alpha a_{ns}^k(\xi) ch\mu_{n,s} \xi d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя (23) в (18) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), r^{-\frac{1}{2}} \tilde{v}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{ns}^k J_\nu(\mu_{s,n} r). \quad (25)$$

Ряды (25) – разложения в ряды Фурье – Бесселя ([6]), если

$$a_{ns}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (26)$$

$$e_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{v}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad b_{ns}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi,$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \dots$ – положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (23),(24) получим решение задачи (13),(14) в виде

$$u_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (28)$$

где $a_{ns}^k(t)$ определяется из (26).

Далее, подставляя (23) в (15), (16), с учетом (18), будем иметь задачу

$$T_{stt} - \mu_{s,n}^2 T_s = 0, \quad 0 < t < \alpha, \quad (29)$$

$$T_{st}(0) = e_{n,s}^k, \quad T_s(\alpha) = b_{n,s}^k. \quad (30)$$

Общее решение уравнения (29) имеет вид

$$c'_{2s} = \frac{e_{ns}^k}{\mu_{s,n}}, \quad c'_{1s} = \frac{B_{ns}^k}{ch\mu_{s,n} \sin \alpha} - \frac{e_{ns}^k}{\mu_{s,n}} th\mu_{s,n} \alpha. \quad (32)$$

Из (23), (31),(32) найдем решение задачи (15), (16)

$$v_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (33)$$

где e_{ns}^k, b_{ns}^k находится из (27).

Таким образом, из (5),(12) следует, что решением задачи 1 является ряд

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_n^k(t) + r^{\frac{1-m}{2}} [v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)] Y_{n,m}^k(\theta) \right\}, \quad (34)$$

где $v_{1n}^k(r, t), v_{2n}^k(r, t)$ определяются из (28) и (33).

Учитывая формулу ([6]) $2J_{\nu}'(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки ([6,4])

$$|J_{\nu}(z)| \leq \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu},$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $v(r, \theta), \psi(t, \theta), \varphi(r, \theta)$, как в [7-9], можно показать, что полученное единственное решение (34) принадлежит классу $C(\overline{D_{\alpha}}) \cap C^1(D_{\alpha} \cup S_0) \cap C^2(D_{\alpha})$.

Теорема доказано.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164 с.
- 2 Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 203 с.
- 3 Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
- 4 Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
- 5 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965 – 703 с.
- 6 Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 295 с.
- 7 Алдашев С.А. О некоторых краевых задачах многомерного волнового уравнения // ДАН СССР. – 1982. – Т. 265, № 1. – С. 3-8.
- 8 Алдашев С.А. О некоторых локальных и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 9, № 1. – С. 3-8.
- 9 Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.

REFERENCES

- 1 Bicadze A.V. Uravnenija smeshannogo tipa. M.: Izd. AN SSSR, 1959. 164 s.
- 2 Bicadze A.V. Kraevye zadachi dlja jellipticheskikh uravnenij vtorogo porjadka. M.: Nauka, 1966. 203 s.
- 3 Bicadze A.V. Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh. M.: Nauka, 1981. 448 s.
- 4 Mihlin S.G. Mnogomernye singuljarnye integral'nye uravnenija. M.: Fizmatgiz, 1962 254 s.
- 5 Kamke Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam. M.: Nauka, 1965. 703 s.
- 6 Bejtmen G., Jerdejn A. Vysshie transcendentnye funkcii. T. 2. M.: Nauka, 1974. 295 s.
- 7 Aldashev S.A. O nekotoryh kraevyh zadachah mnogomernogo volnovoogo uravnenija. DAN SSSR. 1982. T. 265, № 1. S. 3-8.
- 8 Aldashev S.A. O nekotoryh lokal'nyh i nelokal'nyh kraevyh zadachah dlja volnovogo uravnenija. Differencial'nye uravnenija. 1983. T. 9, № 1. S. 3-8.
- 9 Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlja mnogomernyh giperbolicheskikh i smeshannyh uravnenij. Almaty: Gylym, 1994. 170 s.

Резюме

С. А. Алдашев

(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан)

**КӨП ӨЛШЕМДІ ЛАПЛАС ТЕҢДЕУІНЕ ЦИЛИНДР АЙМАҒЫНДА
ПУАНКАРЕ ЕСЕБІНІҢ КОРРЕКТИЛІГІ**

Жұмыста көп өлшемді Лаплас теңдеуіне цилиндр аймағында Пуанкаре есебінің классикалық шешімі барлығы және жалғыздығы көрсетілген.

Тірек сөздер: Пуанкаре есебі, Лаплас теңдеуі, көп өлшемді.

Summary

S. A. Aldashev

(Kazakh national pedagogical university named after Abai, Almaty, Kazakhstan)

**CORRECTNESS OF POINCARÉ'S PROBLEM IN A CYLINDRICAL REGION
FOR LAPLACE'S MULTI-MEASURED EQUATION**

For elliptic equations, boundary-value problems on the plane were shown to be well posed by using methods from the theory of analytic functions of complex variable. When the number of independent variables is greater than two, difficulties of a fundamental nature arise. The highly attractive and convenient method of singular integral equations can hardly be applied, because the theory of multidimensional singular integral equations is still incomplete. The work shows single-valued solvability of classical solution to Poincaré's problem in a cylindrical region for Laplace's multi-measured equation.

Keywords: the task Poincaré, the Laplace equation, multidimensional.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 531.3

А. БАРАЕВ, М. Ж. ЖУМАБАЕВ, А. С. ТУЛЕП

(Южно-Казахстанский государственный институт, Шымкент, Казахстан,
Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Казахстан)

**УДАР ПО ЛЕВОМУ КОНЦУ НИТИ,
ОГИБАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА,
ИМЕЮЩЕГО КРИВОЛИНЕЙНУЮ ФОРМУ**

Аннотация. Предлагается методика определения законов распределения сил натяжения, давления и трения на поверхности контакта твердого тела, имеющим произвольное поперечное сечение, различные методы определения этих законов.

Ключевое слово: нить, скольжение, математическая модель, удар, поверхность, трения, сила, реакция, натяжение.

Тірек сөздер: жіп, сырғанау, математикалық модель, соққы, бет, үйкеліс, күш, реакция, тартылу.

Keywords: thread, slip, mathematical model, blow, surface, friction, force, reaction, tension..

Ниже предлагается методика определения законов распределения сил натяжения, давления и трения на поверхности контакта твердого тела, имеющим произвольное поперечное сечение. В работах [1–5] также предлагаются различные методы определения этих законов. Предлагаемая здесь

методика отличается от предыдущих наиболее строгим применением основных законов механики в постановке задачи и получением достаточно простых аналитических решений.

Пусть нить при $t < 0$ обгибает поверхности твердого тела, имеющего заданную криволинейную форму $r = r(\alpha)$ (рисунок 1, а). Если поверхность контакта нити с твердым телом B_1CB_n имеет цилиндрическую форму, то $r = r(\alpha) = \text{const}$. Разобьем поверхность твердого тела, имеющий контакт с нитью на n прямолинейные участки $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots, B_{n-1}B_n$ (рисунок 2, а). В предельном случае, когда $n \rightarrow \infty$ длина каждого из прямолинейных участков будет стремиться к длине соответствующей дуги кривой B_1CB_n . Углы $B_0OB_1, B_1OB_2, B_2OB_3, \dots$ обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ соответственно. Очевидно, что

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1, \quad \sum_{i=2}^k \alpha_i = \varphi_1, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{i=k+1}^n \alpha_i = \varphi_{n+1}, \quad \sum_{i=k+1}^{n+1} \alpha_i = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \varphi_{n+1}.$$

При $t \geq 0$ точке A нити сообщается постоянное по времени скорость u . При этом прямолинейные AB_1, B_nE и криволинейная B_1CB_n участки нити двигаются с постоянной скоростью, так как предполагается, что процесс скольжения происходит в стационарном режиме. Области 1 и $n + 1$ имеют постоянные натяжения T_1 и T_{n+1} соответственно. Натяжение T_1 больше, чем T_{n+1} , так как участок AB_1 нити перетягивает участок B_nE из области $m + 1$ на поверхность контакта.

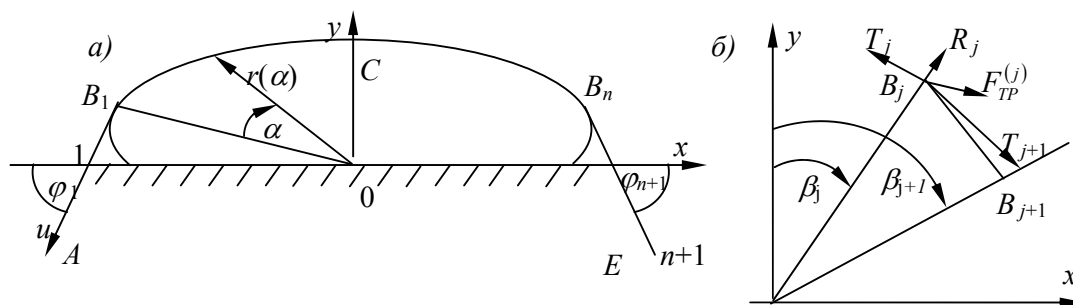


Рисунок 1

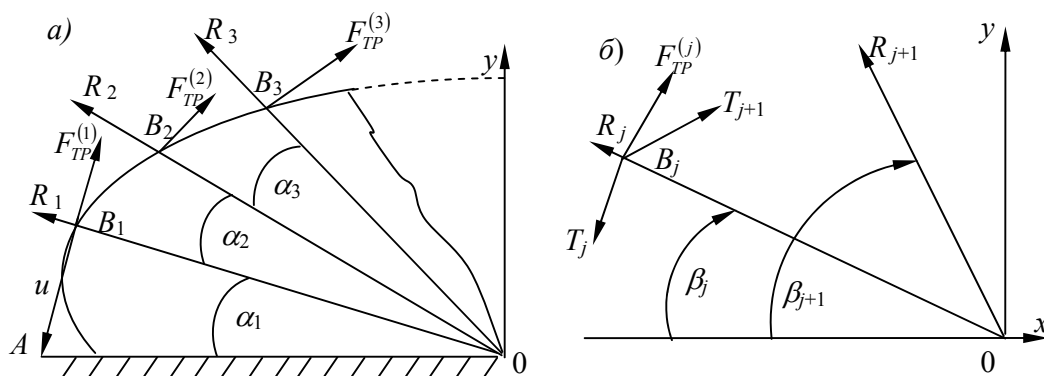


Рисунок 2

На криволинейном участке на нить действуют распределенные силы натяжения, давления и трения поверхности контакта. Предположим, что линии действия распределенных сил натяжения, давления и трения расположены в плоскости (x, y) . Натяжение криволинейного участка возрастает от $T_{n+1} = T_{\text{MIN}}$ в точке B_n до $T_1 = T_{\text{MAX}}$ в точке B_1 .

Предположим, что силы давления, распределенные вдоль кривых $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots$ приводятся к точкам B_1, B_2, B_3, \dots и эквивалентны равнодействующим R_1, R_2, R_3, \dots , направленным вдоль радиусов r_1, r_2, r_3, \dots поперечного сечения твердого тела. Вектор натяжение

T_1 направлен вдоль касательной к точке B_1 , линии действия натяжения $T_2, T_3, T_4, \dots, T_n$ проходят через прямых $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots, B_{n-1}B_n$, а силы трения $F_{TP}^{(1)}, F_{TP}^{(2)}, F_{TP}^{(3)}, \dots, F_{TP}^{(n)}$ направлены перпендикулярно к силам давления $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ соответственно.

Вертикальную ось y проводим так, чтобы все проекции на данную ось силы трения $F_{TP}^{(1)}, F_{TP}^{(2)}, F_{TP}^{(3)}, \dots, F_{TP}^{(k)}$ были положительными, а $F_{TP}^{(k+1)}, F_{TP}^{(k+2)}, F_{TP}^{(k+3)}, \dots, F_{TP}^{(n)}$ – отрицательными. Если точка B_k расположится на оси $x = 0$, то $\sum_{i=1}^k \alpha_i = \frac{\pi}{2}$. При этом проекция на ось x силы R_k равно нулю и линия действия силы трения $F_{TP}^{(k)}$ будет параллельной оси $y = 0$.

Введем обозначения: x^\bullet и y^\bullet – составляющие скорости частиц нити на оси x и y соответственно; ds – длина рассматриваемого элемента нити; s – лагранжева координата, отсчитываемая от точки A нити; T – натяжение; ρ – плотность материала нити; F – площадь поперечного сечения нити; f – коэффициент трения;

Уравнения законов сохранения количества движения, массы и неразрывности скольжения нити имеют вид [3]:

– в областях 1 и 2 (рисунки 2, а и 3, а)

$$\begin{aligned} \rho_1 F_1 ds_1 (x_1^\bullet - x_2^\bullet) &= [-T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - R_1 \cos \alpha_1 + f R_1 \sin \alpha_1] dt, \\ \rho_1 F_1 ds_1 (y_1^\bullet - y_2^\bullet) &= [-T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + R_1 \sin \alpha_1 + f R_1 \cos \alpha_1] dt, \\ ds_1 &= \frac{|x_1^\bullet| dt}{\sin \alpha_1} = \frac{|y_1^\bullet| dt}{\cos \alpha_1}, \quad x_1^\bullet = -u \sin \alpha_1, \quad y_1^\bullet = -u \cos \alpha_1, \\ ds_2 &= \frac{|x_2^\bullet| dt}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{|y_2^\bullet| dt}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad x_2^\bullet = -u \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \quad y_2^\bullet = -u \cos(\alpha_1 + \alpha_2), \\ ds_0 &= ds_1 = ds_2, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_1 F_1 ds_1 = \rho_2 F_2 ds_2; \end{aligned}$$

– в областях 2 и 3

$$\begin{aligned} \rho_2 F_2 ds_2 (x_2^\bullet - x_3^\bullet) &= [-T_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + T_3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - R_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + f R_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] dt, \\ \rho_2 F_2 ds_2 (y_2^\bullet - y_3^\bullet) &= [-T_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + T_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + R_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + f R_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] dt, \\ ds_2 &= \frac{|x_2^\bullet| dt}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{|y_2^\bullet| dt}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad x_2^\bullet = -u \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \quad y_2^\bullet = -u \cos(\alpha_1 + \alpha_2), \\ ds_3 &= \frac{|x_3^\bullet| dt}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} = \frac{|y_3^\bullet| dt}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}, \\ x_3^\bullet &= -u \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad y_3^\bullet = -u \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ ds_0 &= ds_2 = ds_3, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_2 F_2 ds_2 = \rho_3 F_3 ds_3; \end{aligned}$$

..... и т.д.;

– в областях $k-1$ и k

$$\begin{aligned} \rho_{k-1} F_{k-1} ds_{k-1} (x_{k-1}^\bullet - x_k^\bullet) &= \left[-T_{k-1} \sin \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) + T_k \sin \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) - R_{k-1} \cos \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) + f R_{k-1} \sin \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \right] dt, \\ \rho_{k-1} F_{k-1} ds_{k-1} (y_{k-1}^\bullet - y_k^\bullet) &= \left[-T_{k-1} \cos \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) + T_k \cos \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) + R_{k-1} \sin \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) + f R_{k-1} \cos \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \right) \right] dt, \end{aligned}$$

$$ds_{k-1} = \frac{|x_{k-1}^\bullet| dt}{\sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right)} = \frac{|y_{k-1}^\bullet| dt}{\cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right)}, \quad x_{k-1}^\bullet = -u \sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right), \quad y_{k-1}^\bullet = -u \cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right),$$

$$ds_k = \frac{|x_k^\bullet| dt}{\sin\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right)} = \frac{|y_k^\bullet| dt}{\cos\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right)}, \quad x_k^\bullet = -u \sin\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right), \quad y_k^\bullet = -u \cos\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right),$$

$$ds_0 = ds_{k-1} = ds_k, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_{k-1} F_{k-1} ds_{k-1} = \rho_k F_k ds_k.$$

Исключив неизвестные составляющие скорости и элементарную массу, полученную систему приводим к виду:

– на участках 1 и 2

$$u^2 [-\sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] = -T_1^* \sin \alpha_1 + T_2^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - R_1^* \cos \alpha_1 + fR_1^* \sin \alpha_1,$$

$$u^2 [-\cos \alpha_1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] = -T_1^* \cos \alpha_1 + T_2^* \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + R_1^* \sin \alpha_1 + fR_1^* \cos \alpha_1;$$

– на участках 2 и 3

$$u^2 [-\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] = -T_2^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + T_3^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) -$$

$$- R_2^* \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + fR_2^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2),$$

$$u^2 [-\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)] = -T_2^* \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + T_3^* \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) +$$

$$+ R_2^* \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + fR_2^* \cos(\alpha_1 + \alpha_2);$$

..., и.д.

– на участках $k-1$ и k

$$u^2 \left[-\sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + \sin\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) \right] = \left[-T_{k-1}^* \sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + T_k^* \sin\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) - R_{k-1}^* \cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + \right.$$

$$\left. + fR_{k-1}^* \sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \right] dt, \quad (1)$$

$$u^2 \left[-\cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + \cos\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) \right] = \left[-T_{k-1}^* \cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + T_k^* \cos\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) + R_{k-1}^* \sin\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) + \right.$$

$$\left. + fR_{k-1}^* \cos\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i\right) \right] dt. \quad (2)$$

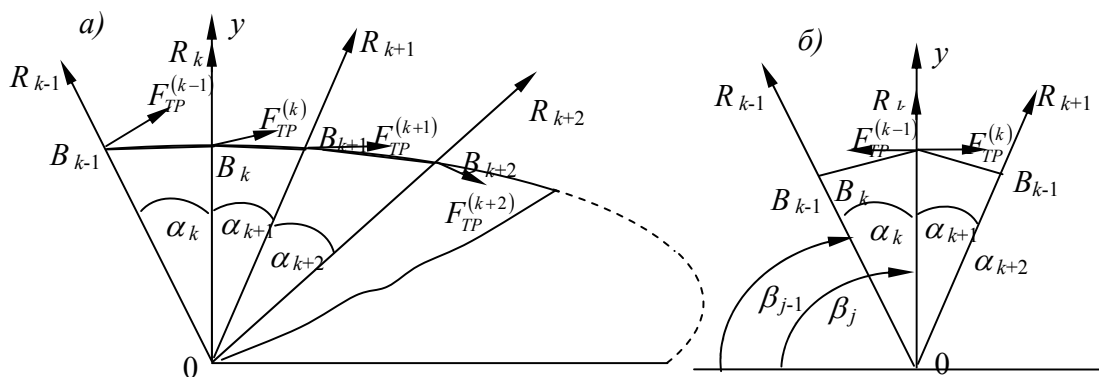


Рисунок 3

Пусть натяжение T_1 области 1 известно. Тогда последняя система уравнения служат для определения неизвестные натяжения $T_2, T_3, T_4, \dots, T_k$ и силы давления $R_1, R_2, R_3, \dots, R_{k-1}$ – всего имеются $2k - 2$ неизвестных и столько же уравнения.

Напишем уравнения движения для областей k и $k + 1$ (рисунок 3, а)

$$\rho_k F_k ds_k (x_k^\bullet - x_{k+1}^\bullet) = \left[-T_k \sin \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) + T_{k+1} \sin \alpha_{k+1} - R_k \cos \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) + fR_k \sin \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) \right] dt,$$

$$\rho_k F_k ds_k (y_k^\bullet - y_{k+1}^\bullet) = \left[-T_k \cos \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) - T_{k+1} \cos \alpha_{k+1} + R_k \sin \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) + fR_k \cos \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) \right] dt,$$

$$ds_k = \frac{|x_k^\bullet| dt}{\sin \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right)} = \frac{|y_k^\bullet| dt}{\cos \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right)}, \quad x_k^\bullet = -u \sin \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right), \quad y_k^\bullet = -u \cos \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right),$$

$$ds_{k+1} = \frac{|x_{k+1}^\bullet| dt}{\sin \alpha_{k+1}} = \frac{|y_{k+1}^\bullet| dt}{\cos \alpha_{k+1}}, \quad x_{k+1}^\bullet = -u \sin \left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \right), \quad y_{k+1}^\bullet = u \cos \left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \right),$$

$$ds_0 = ds_k = ds_{k+1}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_k F_k ds_k = \rho_{k+1} F_{k+1} ds_{k+1}.$$

Очевидно, что если в результате разбиения поверхности контакта точка B_k окажется на оси $x = 0$, как это показано на рисунке 3, то

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = \frac{\pi}{2}. \quad (3)$$

В этом случае из последней системы, получаем

$$\rho_k F_k ds_k (x_k^\bullet - x_{k+1}^\bullet) = (-T_k + T_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + fR_k) dt, \quad (4)$$

$$\rho_k F_k ds_k (y_k^\bullet - y_{k+1}^\bullet) = (-T_k \cos \alpha_{k+1} + R_k) dt \quad (5)$$

и в точке B_k движение по вертикальной оси отсутствует, т.е. $y_k^\bullet = 0$. Кроме того в уравнения (4) и (5) требуется, с учетом выражение (3) и условие $y_k^\bullet = 0$, внести соответствующие поправки.

Напишем уравнения движения для областей, расположенных в правой от оси y части задачи (рис. 3, а):

– в областях $k + 1$ и $k + 2$

$$\rho_{k+1} F_{k+1} ds_{k+1} (x_{k+1}^\bullet - x_{k+2}^\bullet) = [-T_{k+1} \cos \alpha_{k+1} + T_{k+2} \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + R_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + fR_{k+1} \cos \alpha_{k+1}] dt,$$

$$\rho_{k+1} F_{k+1} ds_{k+1} (y_{k+1}^\bullet - y_{k+2}^\bullet) = [T_{k+1} \sin \alpha_{k+1} - T_{k+2} \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + R_{k+1} \cos \alpha_{k+1} - fR_{k+1} \sin \alpha_{k+1}] dt,$$

$$ds_{k+1} = \frac{|x_{k+1}^\bullet| dt}{\sin \alpha_{k+1}} = \frac{|y_{k+1}^\bullet| dt}{\cos \alpha_{k+1}}, \quad x_{k+1}^\bullet = -u \sin \left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \right), \quad y_{k+1}^\bullet = u \cos \left(\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i \right),$$

$$ds_{k+2} = \frac{|x_{k+2}^\bullet| dt}{\cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})} = \frac{|y_{k+2}^\bullet| dt}{\sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})}, \quad x_{k+2}^\bullet = -u \sin \left(\sum_{i=1}^{k+2} \alpha_i \right), \quad y_{k+2}^\bullet = u \cos \left(\sum_{i=1}^{k+2} \alpha_i \right),$$

$$ds_0 = ds_{k+1} = ds_{k+2}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_{k+1} F_{k+1} ds_{k+1} = \rho_{k+2} F_{k+2} ds_{k+2};$$

– в областях $k + 2$ и $k + 3$

$$\rho_{k+2} F_{k+2} ds_{k+2} (x_{k+2}^\bullet - x_{k+3}^\bullet) = [-T_{k+2} \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + T_{k+3} \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3}) + R_{k+2} \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + fR_{k+2} \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})] dt,$$

$$\begin{aligned} \rho_{k+2} F_{k+2} ds_{k+2} (y_{k+2}^\bullet - y_{k+3}^\bullet) &= [T_{k+2} \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) - T_{k+3} \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3}) + \\ &+ R_{k+2} \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) - fR_{k+2} \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})] dt, \\ ds_{k+2} &= \frac{|x_{k+2}^\bullet| dt}{\cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})} = \frac{|y_{k+2}^\bullet| dt}{\sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})}, \quad x_{k+2}^\bullet = -u \sin\left(\sum_{i=1}^{k+2} \alpha_i\right), \quad y_{k+2}^\bullet = u \cos\left(\sum_{i=1}^{k+2} \alpha_i\right), \\ ds_{k+3} &= \frac{|x_{k+2}^\bullet| dt}{\cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3})} = \frac{|y_{k+2}^\bullet| dt}{\sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3})}, \\ x_{k+3}^\bullet &= -u \sin\left(\sum_{i=1}^{k+3} \alpha_i\right), \quad y_{k+3}^\bullet = u \cos\left(\sum_{i=1}^{k+3} \alpha_i\right), \\ ds_0 &= ds_{k+2} = ds_{k+3}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_{k+2} F_{k+2} ds_{k+2} = \rho_{k+3} F_{k+3} ds_{k+3}; \\ &\dots, \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

– в областях $n-1$ и n

$$\begin{aligned} \rho_{n-1} F_{n-1} ds_{n-1} (x_{n-1}^\bullet - x_n^\bullet) &= \left[-T_{n-1} \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) + T_n \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + R_{n-1} \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) + fR_{n-1} \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) \right] dt, \\ \rho_{n-1} F_{n-1} ds_{n-1} (y_{n-1}^\bullet - y_n^\bullet) &= \left[T_{n-1} \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) - T_n \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + R_{n-1} \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) - fR_{n-1} \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) \right] dt, \\ ds_{n-1} &= \frac{|x_{n-1}^\bullet| dt}{\sin\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j\right)} = \frac{|y_{n-1}^\bullet| dt}{\cos\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j\right)}, \quad x_{n-1}^\bullet = -u \sin \cos\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j\right), \quad y_{n-1}^\bullet = u \cos \cos\left(\sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j\right), \\ ds_n &= \frac{|x_n^\bullet| dt}{\cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)} = \frac{|y_n^\bullet| dt}{\sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)}, \quad x_n^\bullet = -u \sin \cos\left(\sum_{j=k+1}^n \alpha_j\right), \quad y_n^\bullet = u \cos \cos\left(\sum_{j=k+1}^n \alpha_j\right), \\ ds_0 &= ds_{n-1} = ds_n, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_{n-1} F_{n-1} ds_{n-1} = \rho_n F_n ds_n; \end{aligned}$$

– в областях n и $n+1$

$$\begin{aligned} \rho_n F_n ds_n (x_n^\bullet - x_{n+1}^\bullet) &= \left[-T_n \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + T_{n+1} \cos \varphi_{n+1} + R_n \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + fR_n \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) \right] dt, \\ \rho_n F_n ds_n (y_n^\bullet - y_{n+1}^\bullet) &= \left[T_n \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) - T_{n+1} \sin \varphi_{n+1} + R_n \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) - fR_n \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) \right] dt, \\ ds_n &= \frac{|x_n^\bullet| dt}{\cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)} = \frac{|y_n^\bullet| dt}{\sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)}, \quad x_n^\bullet = -u \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right), \quad y_n^\bullet = u \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right), \\ ds_{n+1} &= \frac{|x_{n+1}^\bullet| dt}{\cos \varphi_{n+1}} = \frac{|y_{n+1}^\bullet| dt}{\sin \varphi_{n+1}}, \quad x_{n+1}^\bullet = -u \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n+1} \alpha_i\right), \quad y_{n+1}^\bullet = u \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n+1} \alpha_i\right), \\ ds_0 &= ds_n = ds_{n+1}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_n F_n ds_n = \rho_{n+1} F_{n+1} ds_{n+1}. \end{aligned}$$

Последние уравнения преобразуем так:

– на участках $k+1$ и $k+2$

$$\begin{aligned} u^2 [-\cos \alpha_{k+1} + \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})] &= -T_{k+1}^* \cos \alpha_{k+1} + T_{k+2}^* \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + \\ &+ R_{k+1}^* \sin \alpha_{k+1} + fR_{k+1}^* \cos \alpha_{k+1}, \end{aligned}$$

$$u^2[\sin \alpha_{k+1} - \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2})] = T_{k+1}^* \sin \alpha_{k+1} - T_{k+2}^* \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + R_{k+1}^* \cos \alpha_{k+1} - fR_{k+1}^* \sin \alpha_{k+1};$$

– на участках $k+2$ и $k+3$

$$u^2[-\cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3})] = -T_{k+2}^* \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + T_{k+3}^* \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3}) + R_{k+2}^* \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) + fR_{k+2}^* \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}),$$

$$u^2[\sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) - \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3})] = T_{k+2}^* \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) - T_{k+3}^* \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \alpha_{k+3}) + R_{k+2}^* \cos(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}) - fR_{k+2}^* \sin(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2});$$

..., и т.д.

– на участках $n-1$ и n

$$u^2\left[-\cos\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) + \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)\right] = \left[-T_{n-1}^* \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) + T_n^* \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + R_{n-1}^* \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) + fR_{n-1}^* \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right)\right] dt. \quad (6)$$

$$u^2\left[\sin\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) - \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)\right] = \left[T_{n-1}^* \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) - T_n^* \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + R_{n-1}^* \cos\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right) - fR_{n-1}^* \sin\left(\sum_{i=k+1}^{n-1} \alpha_i\right)\right] dt. \quad (7)$$

– на участках n и $n+1$

$$u^2\left[-\cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + \cos \varphi_{n+1}\right] = \left[-T_n^* \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + T_{n+1}^* \cos \varphi_{n+1} + R_n^* \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) + fR_n^* \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)\right] dt. \quad (8)$$

$$u^2\left[\sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) - \sin \varphi_{n+1}\right] = \left[T_n^* \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) - T_{n+1}^* \sin \varphi_{n+1} + R_n^* \cos\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right) - fR_n^* \sin\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i\right)\right] dt. \quad (9)$$

Условие $\beta_j = \frac{\pi}{2}$ будет иметь место, если при делении поверхности контакта точка B_k окажется

на вертикальной оси $x = 0$, как показано на рисунке 3, б.

Напишем уравнения движения для схем, изображенных на рисунках 1, б–3, б:

– в области $x < 0$ (рисунок 2, б)

$$\rho_j F_j ds_j (x_j^* - x_{j+1}^*) = (-T_j \sin \beta_j + T_{j+1} \sin \beta_{j+1} - R_j \cos \beta_j + fR_j \sin \beta_j) dt,$$

$$\rho_j F_j ds_j (y_j^* - y_{j+1}^*) = (-T_j \cos \beta_j + T_{j+1} \cos \beta_{j+1} + R_j \sin \beta_j + fR_j \cos \beta_j) dt,$$

$$ds_j = \frac{|x_j^*| dt}{\sin \beta_j} = \frac{|y_j^*| dt}{\cos \beta_j}, \quad x_j^* = -u \sin \beta_j, \quad y_j^* = -u \cos \beta_j,$$

$$ds_{j+1} = \frac{|x_{j+1}^*| dt}{\sin \beta_{j+1}} = \frac{|y_{j+1}^*| dt}{\cos \beta_{j+1}}, \quad x_{j+1}^* = -u \sin \beta_{j+1}, \quad y_{j+1}^* = -u \cos \beta_{j+1},$$

$$ds_0 = ds_j = ds_{j+1}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_j F_j ds_j = \rho_{j+1} F_{j+1} ds_{j+1};$$

В общем случае решение задачи будет состоят из системы функций $T_i = T_i(u, \varphi_i)$ и $R_i = R_i(u, \varphi_i)$, где $i = 1, 2, 3, \dots, k-1, k, k+1, \dots, n-1, n, n+1$. Для получения этих функций, методом последовательного исключения неизвестных, необходимо решать системы $n+1$ подобных к системам: (1) и (2) – для области $x < 0$; (6) и (7) – для области $x > 0$; (4) и (5) – на вертикальной оси $x = 0$; (8) и (9) – для области $n+1$.

Ниже предлагается удобные для теоретического анализа и ведения числовых расчетов систему аналитическое решение задачи. Введем вместо коэффициента k новый индекс $j = 1, 2, 3, \dots, k-1, k, k+1, \dots, n-1, n, n+1$ (рисунки 1, б–3, б) так, что $T_j = T_i$, $R_j = R_i$,

$$\beta_j = \begin{cases} \sum_{i=1}^j \alpha_i & - \text{в области } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & - \text{на вертикальной оси } x = 0 \\ \sum_{i=k+1}^j \alpha_i & - \text{в области } x > 0 \end{cases}$$

– на вертикальной оси $x = 0$ (рисунок 3, б)

$$\rho_k F_k ds_k (x_k^* - x_{k+1}^*) = (-T_k + T_{k+1} \cos \alpha_{k+1} + fR_k) dt,$$

$$\rho_k F_k ds_k (y_k^* - y_{k+1}^*) = (-T_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + R_k) dt;$$

$$ds_k = |x_k^*| dt, \quad y_j^* = 0, \quad x_k^* = -u,$$

$$ds_{k+1} = \frac{|x_{k+1}^*| dt}{\sin \alpha_{j+1}} = \frac{|y_{k+1}^*| dt}{\cos \alpha_{j+1}}, \quad x_{j+1}^* = -u \sin \alpha_{j+1}, \quad y_{j+1}^* = u \cos \alpha_{j+1},$$

$$ds_0 = ds_k = ds_{k+1}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_k F_k ds_k = \rho_{k+1} F_{k+1} ds_{k+1};$$

– в области $x > 0$ (рисунок 1, б)

$$\rho_j F_j ds_j (x_j^* - x_{j+1}^*) = (-T_j \cos \beta_j + T_{j+1} \cos \beta_{j+1} + R_j \sin \beta_j + fR_j \cos \beta_j) dt,$$

$$\rho_j F_j ds_j (y_j^* - y_{j+1}^*) = (T_j \sin \beta_j - T_{j+1} \sin \beta_{j+1} + R_j \cos \beta_j - fR_j \sin \beta_j) dt,$$

$$ds_j = \frac{|x_j^*| dt}{\cos \beta_j} = \frac{|y_j^*| dt}{\sin \beta_j}, \quad x_j^* = -u \cos \beta_j, \quad y_j^* = -u \sin \beta_j,$$

$$ds_{j+1} = \frac{|x_{j+1}^*| dt}{\cos \beta_{j+1}} = \frac{|y_{j+1}^*| dt}{\sin \beta_{j+1}}, \quad x_{j+1}^* = u \cos \beta_{j+1}, \quad y_{j+1}^* = -u \sin \beta_{j+1},$$

$$ds_0 = ds_j = ds_{j+1}, \quad \rho_0 F_0 ds_0 = \rho_j F_j ds_j = \rho_{j+1} F_{j+1} ds_{j+1}.$$

Полученные выше уравнения приводим к виду:

– в области $x < 0$

$$u^2 (-\sin \beta_j + \sin \beta_{j+1}) = -T_j^* \sin \beta_j + T_{j+1}^* \sin \beta_{j+1} - R_j^* (\cos \beta_j + f \sin \beta_j), \quad (10)$$

$$u^2 (-\cos \beta_j + \cos \beta_{j+1}) = -T_j^* \cos \beta_j + T_{j+1}^* \cos \beta_{j+1} + R_j^* (\sin \beta_j + f \cos \beta_j); \quad (11)$$

– в окрестности вертикальной оси $x = 0$

$$-u^2 (1 - \sin \alpha_{k+1}) = -T_k^* + T_{k+1}^* \cos \alpha_{k+1} + fR_k^*, \quad (12)$$

$$u^2 \cos \alpha_{k+1} = -T_k^* \sin \alpha_{k+1} + R_k^*; \quad (13)$$

– в области $x < 0$

$$u^2 (-\cos \beta_j + \cos \beta_{j+1}) = -T_j^* \cos \beta_j + T_{j+1}^* \cos \beta_{j+1} + R_j^* (\sin \beta_j + f \cos \beta_j), \quad (14)$$

$$u^2(\sin \beta_j - \sin \beta_{j+1}) = T_j^* \sin \beta_j - T_{j+1}^* \sin \beta_{j+1} + R_j^*(\cos \beta_j - f \sin \beta_j). \quad (15)$$

Задавая j значения $1, 2, 3, \dots, k-1, k$ из уравнения (10) и (11) получаем системы для областей 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, ..., $k-1$ и k . В точке B_k имеют место уравнения (12) и (13). Далее присвоив j значения $k+1, k+2, k+3, \dots, n-1, n, n+1$ из уравнения (14) и (15) получаем системы для областей $k+1$ и $k+2$, $k+2$ и $k+3$, ..., $n-2$ и $n-1$, $n-1$ и n , n и $n+1$.

Пусть натяжение T_1 области 1 известно и требуется найти решения для участков, расположенных в области $x < 0$. Рассмотрим уравнения (10) и (11). Умножим уравнение (10) на $\cos \beta_{j+1}$, (11) – на $\sin \beta_{j+1}$ и найдем их разность

$$R_j^* = \frac{(u^2 - T_j^*) \sin(\beta_j - \beta_{j+1})}{\sin(\beta_j + \beta_{j+1}) + f \cos(\beta_j - \beta_{j+1})}. \quad (16)$$

Умножим уравнение (10) на $\sin \beta_j + f \cos \beta_j$, (11) – на $\cos \beta_j + f \sin \beta_j$ и найдем их сумму

$$T_{j+1}^* = u^2 - \frac{(u^2 - T_j^*) \left(1 + \frac{f}{2} \sin 2\beta_j\right)}{\cos(\beta_j - \beta_{j+1}) + f \sin(\beta_j + \beta_{j+1})}. \quad (17)$$

Найдем решения системы (12) и (13). Уравнение (12) умножим на $\sin \alpha_{k+1}$, (13) – на $\cos \alpha_{k+1}$ и установим их сумму

$$R_k^* = \frac{u^2(1 - \sin \alpha_{k+1}) + T_k^* \sin \alpha_{k+1}}{\cos \alpha_{k+1} + f \sin \alpha_{k+1}}. \quad (18)$$

Уравнение (13) умножим на f и установим разность уравнения (12) и (13)

$$T_{k+1}^* = \frac{u^2(\sin \alpha_{k+1} - f \cos \alpha_{k+1} - 1) + T_k^*}{\cos \alpha_{k+1} + f \sin \alpha_{k+1}}. \quad (19)$$

Умножим уравнение (14) на $\sin \beta_{j+1}$, (15) – на $\cos \beta_{j+1}$ и найдем их сумму

$$R_j^* = \frac{(u^2 - T_j^*) \sin(\beta_j - \beta_{j+1})}{\cos(\beta_j - \beta_{j+1}) - f \sin(\beta_j - \beta_{j+1})}. \quad (20)$$

Умножим уравнения (14) на $\cos \beta_j - f \sin \beta_j$, (15) – на $\sin \beta_j + f \cos \beta_j$ и найдем их разность

$$T_{j+1}^* = \frac{u^2[\cos(\beta_j - \beta_{j+1}) - f \sin(\beta_j - \beta_{j+1}) - 1] + T_j^*}{\cos(\beta_j - \beta_{j+1}) - f \sin(\beta_j - \beta_{j+1})}. \quad (21)$$

Выражения (16)–(21) являются аналитическим решением рассмотренной задачи. Числовые расчеты ведутся следующим образом. Задавая $1, 2, 3, \dots, k-1, k$ из решения (16) и (17) определяются параметры движения областей 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, ..., $k-2$ и $k-1$, $k-1$ и k . Далее используя значение натяжения T_k , как исходное, из решения (18) и (19) определяются неизвестная реактивная сила R_k^* и натяжение T_{k+1}^* . Задавая j значения $k+1, k+2, k+3, \dots, n-1, n, n+1$ из решения (20) и (21) определяются параметры движения областей $k+1$ и $k+2$, $k+2$ и $k+3$, ..., $n-1$ и n , n и $n+1$.

Выводы

1. Построена математическая модель скольжения нити, движущегося в стационарном режиме по поверхности твердого тела, имеющего произвольное поперечное сечение.
2. Получено аналитическое решение, позволяющее устанавливать зависимости сил натяжения, давления и трения от свойства материала, формы поперечного сечения и координаты расположения твердого тела в заданной плоскости, условия контакта и скорости удара.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Каган В.М. Взаимодействие нити с рабочими органами текстильных машин. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984. – 218 с.
- 2 Бараев А. Математические модели скольжения намоточных свзей // Технология машиностроения. – М., 2009. – № 7. – С. 38-42.
- 3 Бараев А. Скольжения нерастяжимой гибкой нити по поверхности твердого тела // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – М., 2009. – № 3. – С. 9-12.
- 4 Бараев А., Дасибеков А.Д., Культурсинов Ж.К. О проблеме решения задачи скольжения гибкой связи по поверхности твердого тела // Междунар. научно-технич. конф. «Механика деформируемого твердого тела», посвящ. 70-летию акад. АН Р.Уз Ш. Т. Ширинкулова. – Самарканд, 2007. – С. 78-81.
- 5 Бараев А., Эргашов М., Дасибеков А. Натяжение, деформация и неровнота гибкой связи. – Астана, 2008. – 354 с.

REFERENCES

- 1 Kagan V.M. Vzaimodejstvie niti s rabochimi organami tekstil'nyh mashin. M.: Legkaja i pishhevaja promyshlennost', 1984. 218 s.
- 2 Baraev A. Matematicheskie modeli skol'zhenija namotochnyh svzej. Tehnologija mashinstroenija. M., 2009. № 7. S. 38-42.
- 3 Baraev A. Skol'zhenija nerastjazhimoj gibkoj niti po poverhnosti tverdogo tela. Stroitel'naja mehanika inzheknrnyh konstrukcij i sooruzhenij. M., 2009. № 3. S. 9-12.
- 4 Baraev A., Dasibekov A.D., Kul'tursinov Zh.K. O probleme reshenija zadachi skol'zhenija gibkoj svjazi po poverhnosti tverdogo tela. Mezhdunar. nauchno-tehnich. konf. «Mehanika deformirumogo tverdogo tela», posvjashh. 70-letiju akad. AN R.Uz Sh. T. Shirinkulova. Samarkand, 2007. S. 78-81.
- 5 Baraev A., Jergashov M., Dasibekov A. Natjazhenie, deformacija i nerovnota gibkoj svjazi. Astana, 2008. 354 s.

Резюме

А. Бараев, М. Ж. Жұмабаев, А. С. Төлеп

(Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік институты, Шымкент, Қазақстан,
Қ. А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан)

ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ПІШІНІ БАР ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ БЕТКІ ЖАҒЫН АЙНАЛДЫРА ҚОРШАП ТҮРҒАН
ЖІПКЕ СОЛ ЖАҚ СОҒЫНАН СОҒҚЫ БЕРУ

Кез келген көлденең қималы қозғалмайтын қатты дене бетімен, стационар режимде қозғалатын, созылмайтын жіптің сырғанау есебі қарастырылады. Жанасу беттеріндегі үйкеліс және қысым түсіретін күштердің орналасу заңдылығын анықтау әдістемесі ұсынылады. Есептің аналитикалық шешімі және сандық эксперименттік зерттеулер жүргізу сұлбасы келтірілген.

Тірек сөздер: жіп, сырғанау, математикалық модель, соққы, бет, үйкеліс, күш, реакция, тартылу.

Summary

A. Baraev, M. Zh. Zhumabaev, A. S. Tulep

(South Kazhastanskiy state institute, Shymkent, Kazakhstan,
International kazakh-turkish university named by Kh. A. Yassavi, Turkestan, Kazakhstan)

KICK ON THE LEFT END OF THE STRING, ENVELOPE SURFACE OF A RIGID BODY
WITH A CURVED SHAPE

Impact of the left end of yarn, envelope of surfaces of system of improvable solid body In this article given a problem about sliding of non-elongation yarn which moves on the surface of improvable solid body, which have arbitrary section. It is also suggested the method of setting up rules of the power of stretching, pressure on the surface when they are in contact. Analytical solution of the problem and scheme of numerical search that was experimented.

Keywords: thread, slip, mathematical model, blow, surface, friction, force, reaction, tension.

Поступила 05.05.2014 г.

А. БОЛЕН

(Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан)

ГАУССОВЫ СУММЫ ДЛЯ ХАРАКТЕРОВ ДИРИХЛЕ ПО МОДУЛЮ 2^l И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Аннотация. В работе дается вычисления Гауссовых сумм для характеров Дирихле по модулю 2^l , и их приложения к универсальному конструктивному описанию абсолютно абелевых циклических полей примарной степени 2^l , с ведущим дивизором 2^{l+2} . Вычислены минимальные многочлены порождающих элементов в универсальном конструктивном описании. Производится подсчет числа всех абсолютно циклических полей степени 2^l , с ведущим дивизором 2^{l+2} .

Ключевые слова: суммы, характеры, поля, многочлен дивизор.

Тірек сөздер: косындылар, характерлер, өрістер, көпмүше, дивизор.

Keywords: sums, characters, fields, polynomial, divisor.

Эффективным инструментом для конструктивного описания абсолютно абелевых полей особую роль играет, суммы Гаусса по характеру Дирихле. Теорема Кронекера-Вебера утверждает, что любое абсолютно абелево поле (а.а.п.) будет подполем поля деления круга $Q(\zeta_f)$, при некотором

f , где $\zeta_f = \cos \frac{2\pi}{f} + i \sin \frac{2\pi}{f} \in C^*$, Q – поле рациональных чисел. Ведущим дивизором а.а.п. K ,

называется наименьшее натуральное число $F(K) = f$ такое, что $Q(\zeta_f)$, является наименьшим полем поля деления круга, в котором содержится K . Так как любая а.а.п. является композитом абсолютно циклических полей степени p^l , где p простое число, то конструктивное описание множества всех абсолютно абелевых полей сводится к описанию множества всех абсолютно циклических полей примарной степени p^l .

Для любого $l \in Z^+$, $U(2^{l+2}) = (\overline{-1}) \times (\overline{5})$, $|\overline{-1}| = 2$, $|\overline{5}| = 2^{k-2}$. группы характеров Дирихле по модулю 2^{l+2} , имеет разложение $X(2^{l+2}) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^l})$, $\lambda_{-1}(-1) = -1$, $\lambda_{2^l}(-1) = 1$, $\lambda_{-1}(5) = 1$, $\lambda_{2^l}(5) = \zeta_{2^l}$, $|\lambda_{-1}| = 2$, $|\lambda_{2^l}| = 2^l$. Если $\chi \in X(2^l)$, характер с ведущим модулем $F(\chi) \neq 1$, $F(\chi) \neq 4$, то $F(\chi) = 2^{2+ord_2|\chi|}$.

Определение 1. Два примитивных характера Дирихле $\chi_1, \chi_2 \in X(f)$, по модулю m , называются эквивалентными и обозначаются $\chi_1 \sim \chi_2$, если их ведущие модули совпадают $F(\chi_1) = F(\chi_2) = f$, и порождают одну и ту же подгруппу группы $X(f)$, то есть $(\chi_1) = (\chi_2)$.

Пусть p простое число, X_{p^l} – множество всех примитивных характеров порядка p^l , X_{p^l}/\sim – фактормножество множество X_{p^l} – всех примитивных характеров порядка p^l по эквивалентности \sim , P_{p^l} – множество всех абсолютно циклических полей степени p^l . Известно [1, 2], что отображение $\psi: X_{p^l}/\sim \rightarrow P_{p^l}$, определенное формулой $\psi(\chi) = Q(\theta(\chi))$, $\chi \in X_{p^l}$, $F(\chi) = f$, примитивный характер Дирихле по модулю f , порядка $|\chi| = p^l$, $\theta(\chi) = \sum_{t \in Ker \chi} \zeta_f^t \in Q(\zeta_f)$ является биективным отображением, причем $F(\chi) = F(Q(\theta(\chi)))$,

$$|Q(\theta(\chi)):Q| = |\chi|, \text{ и } \theta(\chi) = \sum_{t \in \text{Ker}\chi} \zeta_f^t = \frac{1}{p^l} \sum_{k=0}^{p^l-1} \tau(\chi^k) \in Q(\zeta_f), \text{ где } \tau(\chi^i) = \sum_{t \in U(f)} \chi^i(t) \zeta_f^t,$$

суммы Гаусса.

Гауссовы суммы для характеров Дирихле по модулю 2^l поддаются более конкретному вычислению.

Предложение 1. Пусть $l \in \mathbb{Z}^+$, $U(2^{l+2}) = (\overline{-1}) \times (\overline{5})$, $X(2^{l+2}) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^l})$, $\lambda_{-1}(-1) = -1, \lambda_{2^l}(-1) = 1, \lambda_{-1}(5) = 1, \lambda_{2^l}(5) = \zeta_{2^l}, |\lambda_{-1}| = 2, |\lambda_{2^l}| = 2^l$. Если $0 \leq k < 2^l$, $k \equiv 0 \pmod{2}$, то $\tau(\lambda_{2^l}^k) = 0$. Если $0 \leq k < 2^l$, $k \equiv 1 \pmod{2}$, $l \equiv 1 \pmod{2}$, то

$$\tau(\lambda_{2^l}^k) = 2^{\frac{l+1}{2}} \left(\zeta_{2^{l+2}}^{4kt_k \pm 5^{l_k}} + \zeta_{2^{l+2}}^{4k(2^{\frac{l-3}{2} + t_k) \pm 5^{2^{\frac{l-3}{2} + t_k}}} \right),$$

$$\tau(\lambda_{-1} \lambda_{2^l}^k) = -2^{\frac{l+1}{2}} \left(\zeta_{2^{l+2}}^{4kt_k \pm 5^{l_k}} + \zeta_{2^{l+2}}^{4k(2^{\frac{l-3}{2} + t_k) \pm 5^{2^{\frac{l-3}{2} + t_k}}} \right), \text{ где } 5^{2^{\frac{l-1}{2}}} - 1 \equiv 2^{\frac{l+3}{2}} q \pmod{2^{l+2}},$$

$$\pm 5^t (5^{2^{\frac{l-1}{2}}} - 1) \equiv -2^{\frac{l+3}{2}} k \pmod{2^{l+2}} \text{ или } \pm 5^{l_k} \equiv -q^{-1} k \pmod{2^{\frac{l+1}{2}}}. \text{ Если } 0 \leq k < 2^l,$$

$$k \equiv 1 \pmod{2}, \quad l \equiv 0 \pmod{2}, \quad \text{то} \quad \tau(\lambda_{2^l}^k) = 2^{\frac{l+2}{2}} \zeta_{2^{l+2}}^{4kt_k \pm 5^{l_k}},$$

$$\tau(\lambda_{-1} \lambda_{2^l}^k) = \pm 2^{\frac{l+2}{2}} \zeta_{2^{l+2}}^{4kt_k \pm 5^{l_k}}, \quad \text{где} \quad 5^{2^{\frac{l-2}{2}}} - 1 \equiv 2^{\frac{l+2}{2}} q \pmod{2^{l+2}},$$

$$\pm 5^{l_k} \equiv -q^{-1} k \pmod{2^{\frac{l+2}{2}}}.$$

Доказательство.

$$U(2^{l+2}) = (\overline{-1}) \times (\overline{5}), \quad X(2^{l+2}) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^l}),$$

$$\lambda_{-1}(-1) = -1, \lambda_{2^l}(-1) = 1, \quad \lambda_{-1}(5) = 1, \quad \lambda_{2^l}(5) = \zeta_{2^l}, \quad |\lambda_{-1}| = 2, \quad |\lambda_{2^l}| = 2^l.$$

$$\tau(\lambda_{2^l}^k) = \sum_{t=1}^{2^l-1} \lambda_{2^l}^k(5^t) \zeta_{2^{l+2}}^{5^j} + \sum_{t=1}^{2^l-1} \lambda_{2^l}^k(-5^t) \zeta_{2^{l+2}}^{-5^t} = \sum_{t=1}^{2^l-1} \zeta_{2^{l+2}}^{4kt+5^t} + \zeta_{2^{l+2}}^{4kt-5^t}.$$

$$\tau(\lambda_{-1} \lambda_{2^l}^k) = \sum_{t=1}^{2^l-1} \lambda_{-1} \lambda_{2^l}^k(5^t) \zeta_{2^{l+2}}^{5^j} + \lambda_{-1} \lambda_{2^l}^k(-5^t) \zeta_{2^{l+2}}^{-5^t} = \sum_{t=1}^{2^l-1} \zeta_{2^{l+2}}^{4kt+5^t} - \zeta_{2^{l+2}}^{4kt-5^t}.$$

Если $0 \leq k < 2^l$, $k \equiv 0 \pmod{2}$, то $F(\lambda_{2^l}^k) < 2^l$ и $\tau(\lambda_{2^l}^k) = 0$. Если $l \equiv 1 \pmod{2}$,

$$k \equiv 1 \pmod{2}, \quad \text{то} \quad 4 \cdot 2^{\frac{l-1}{2}} j + 5^{2^{\frac{l-1}{2}}} j \equiv 5^0 \equiv 1 \pmod{2^{l+2}},$$

$$4(2^{\frac{l-3}{2}} + 2^{\frac{l-1}{2}} j) + 5^{2^{\frac{l-3}{2} + 2^{\frac{l-1}{2}} j}} \equiv 4 \cdot 2^{\frac{l-3}{2}} + 5^{2^{\frac{l-3}{2}}} \pmod{2^{l+2}}, \quad \text{сравнения}$$

$$4k(t + 2^{\frac{l-1}{2}}) \pm 5^{t+2^{\frac{l-1}{2}}} \equiv 4kt \pm 5^t \pmod{2^{l+2}} \quad \text{равносильно} \quad \text{сравнению}$$

$$\pm 5^t (5^{2^{\frac{l-1}{2}}} - 1) \equiv -2^{\frac{l+3}{2}} k \pmod{2^{l+2}} \quad \text{или} \quad \pm 5^t \equiv -q^{-1} k \pmod{2^{\frac{l+1}{2}}}, \quad \text{где}$$

$5^{2^{\frac{l-1}{2}}} - 1 \equiv 2^{\frac{l+3}{2}} q \pmod{2^{l+2}}$, $q \equiv 1 \pmod{2}$. Заметим, что существует $t_k \in Z$, такое что $5^{t_k} \equiv -q^{-1}k \pmod{2^{\frac{l+1}{2}}}$ или $-5^{t_k} \equiv -q^{-1}k \pmod{2^{\frac{l+1}{2}}}$. Таким образом, если $0 \leq k < 2^l$, $k \not\equiv 0 \pmod{2}$, $l \equiv 1 \pmod{2}$, то $\tau(\lambda_{2^l}^k) = 2^{\frac{l+1}{2}} (\zeta_{2^{l+2}}^{4kt_k \pm 5^{t_k}} + \zeta_{2^{l+2}}^{4k(2^{\frac{l-3}{2}} + t_k) \pm 5^{2^{\frac{l-3}{2}} + t_k}})$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}^k) = -2^{\frac{l+1}{2}} (\zeta_{2^{l+2}}^{4kt_k \pm 5^{t_k}} + \zeta_{2^{l+2}}^{4k(2^{\frac{l-3}{2}} + t_k) \pm 5^{2^{\frac{l-3}{2}} + t_k}})$, где $5^{2^{\frac{l-1}{2}}} - 1 \equiv 2^{\frac{l+3}{2}} q \pmod{2^{l+2}}$, $\pm 5^{t_k} \equiv -q^{-1}k \pmod{2^{\frac{l+1}{2}}}$. Если $l \equiv 0 \pmod{2}$, $k \equiv 1 \pmod{2}$, то сравнения $4k(t + 2^{\frac{l-2}{2}}) \pm 5^{t+2^{\frac{l-2}{2}}} \equiv 4kt \pm 5^t \pmod{2^{l+2}}$ равносильно сравнению $\pm 5^t(5^{2^{\frac{l-2}{2}}} - 1) \equiv -2^{\frac{l+2}{2}} k \pmod{2^{l+2}}$ или $\pm 5^{t_k} \equiv -q^{-1}k \pmod{2^{\frac{l+2}{2}}}$, где $5^{2^{\frac{l-2}{2}}} - 1 \equiv 2^{\frac{l+2}{2}} q \pmod{2^{l+2}}$, $q \equiv 1 \pmod{2}$. Заметим, что существует $t_k \in Z$, такое что $5^{t_k} \equiv -q^{-1}k \pmod{2^{\frac{l+2}{2}}}$ или $-5^{t_k} \equiv -q^{-1}k \pmod{2^{\frac{l+2}{2}}}$. $\text{Ker } \lambda_{2^l}^k = \{1, -1\}$, $\text{Ker } \lambda_{-1}\lambda_{2^l}^k = \{1, -5^{2^{l-1}k^{-1}}\}$. Таким образом, если $0 \leq k < 2^l$, $l \equiv 0 \pmod{2}$, $k \equiv 1 \pmod{2}$, то $\tau(\lambda_{2^l}^k) = 2^{\frac{l+2}{2}} \zeta_{2^{l+2}}^{4kt \pm 5^t}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}^k) = \pm 2^{\frac{l+2}{2}} \zeta_{2^{l+2}}^{4kt \pm 5^t}$. где $5^{2^{\frac{l-2}{2}}} - 1 \equiv 2^{\frac{l+2}{2}} q \pmod{2^{l+2}}$, $\pm 5^t \equiv -q^{-1}k \pmod{2^{\frac{l+2}{2}}}$.

Предложение 2. Для любого $l \in Z^+$, $U(2^{l+2}) = (\overline{-1}) \times (\overline{5})$, $X(2^{l+2}) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^l})$, $\lambda_{-1}(-1) = -1$, $\lambda_{2^l}(-1) = 1$, $\lambda_{-1}(5) = 1$, $\lambda_{2^l}(5) = \zeta_{2^l}$, $|\lambda_{-1}| = 2$, $|\lambda_{2^l}| = 2^l$. с точностью до эквивалентности по модулю 2^{l+2} существует в точности два примитивных характера: $\lambda_{2^l}, \lambda_{-1}\lambda_{2^l}$ порядка $|\lambda_{2^l}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^l}| = 2^l$, и существует в точности два циклических поля степени $2^l = |K_i : Q|$, с ведущим дивизором 2^{l+2} : $K_1 = Q(\theta(\lambda_{2^l})) = Q(\zeta_{2^{l+2}} + \zeta_{2^{l+2}}^{-1}) = Q(2 \cos \frac{2\pi}{2^{l+2}})$ и $K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})) = Q(\zeta_{2^{l+2}} - \zeta_{2^{l+2}}^{-1}) = Q(2i \sin \frac{2\pi}{2^{l+2}})$, соответственно с дискриминантами $D_1 = D_2 = 2^{(l+1)2^l - 1}$, при $l \neq 1$, $1, \theta(\lambda_{2^l}), \theta(\lambda_{2^l})^2, \dots, \theta(\lambda_{2^l})^{2^l - 1}$ и $1, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}), \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})^2, \dots, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})^{2^l - 1}$ являются целыми базисами полей K_1, K_2 , где $\theta(\lambda_{2^l}) = \sum_{t \in \text{Ker } \lambda_{2^l}} \zeta_{2^{l+2}}^t = \zeta_{2^{l+2}} + \zeta_{2^{l+2}}^{-1}$ и $\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}) = \sum_{t \in \text{Ker } \lambda_{-1}\lambda_{2^l}} \zeta_{2^{l+2}}^t = \zeta_{2^{l+2}} - \zeta_{2^{l+2}}^{-1}$. Для

$f_{2^l}(x)$, $g_{2^l}(x)$ минимальных многочленов чисел $\theta(\lambda_{2^l}), \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})$, справедливы рекуррентные формулы $f_{2^{l+1}}(x) = f_{2^l}(x^2 - 2)$, $g_{2^{l+1}}(x) = f_{2^l}(x^2 + 2)$.

Доказательство. Заметим, что существует единственное циклическое поле $Q(\zeta_4) = Q(i)$, степени 2, с ведущим дивизором 2^2 : с дискриминантом $D = -4$, $1, i$ является целым базисом. Существует в точности два циклических поля K_1, K_2 , степени $2^2 = |K_i : Q|$, с ведущим дивизором 2^3 :

$$K_1 = Q(\zeta_8 + \zeta_8^{-1}) = Q(2 \cos \frac{\pi}{4}) = Q(\sqrt{2}), \quad K_2 = Q(\zeta_8 - \zeta_8^{-1}) = Q(i2 \sin \frac{\pi}{4}) = Q(i\sqrt{2}),$$

соответственно с дискриминантами $D_1 = 8, D_2 = -8$, при этом $1, \sqrt{2}$ и $1, i\sqrt{2}$ являются целыми базисами полей K_1, K_2 .

При $l \in Z^+, l > 1$, $U(2^{l+2}) = (\overline{-1}) \times (\overline{5})$, $X(2^{l+2}) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^l})$, $\lambda_{-1}(-1) = -1$, $\lambda_{2^l}(-1) = 1$, $\lambda_{-1}(5) = 1$, $\lambda_{2^l}(5) = \zeta_{2^l}$, $|\lambda_{-1}| = 2$, $|\lambda_{2^l}| = 2^l$, с точностью до эквивалентности по модулю 2^{l+2} существует в точности два примитивных характера: $\lambda_{2^l}, \lambda_{-1}\lambda_{2^l}$ порядка $|\lambda_{2^l}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^l}| = 2^l$, $Ker \lambda_{2^l} = \{1, -1\}$, $Ker \lambda_{-1}\lambda_{2^l} = \{1, -5^{2^{l-1}}\}$, $5^{2^{l-1}} \equiv 1 + 2^{l-1} \pmod{2^l}$, и существует в точности два циклических поля степени 2^l , с ведущим дивизором 2^{l+2} : $K_1 = Q(\theta(\lambda_{2^l})) = Q(\zeta_{2^{l+2}} + \zeta_{2^{l+2}}^{-1})$ и $K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})) = Q(\zeta_{2^{l+2}} - \zeta_{2^{l+2}}^{-1})$, где $\theta(\lambda_{2^l}) = \sum_{t \in Ker \lambda_{2^l}} \zeta_{2^{l+2}}^t = \zeta_{2^{l+2}} + \zeta_{2^{l+2}}^{-1}$, $\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l}) = \sum_{t \in Ker \lambda_{-1}\lambda_{2^l}} \zeta_{2^{l+2}}^t = \zeta_{2^{l+2}} - \zeta_{2^{l+2}}^{-1}$. Группа

Галуа циклических полей K_1, K_2 степени 2^l , являются циклические группы $U(2^{l+2})/Ker \lambda_{2^l}$, $U(2^{l+2})/Ker \lambda_{-1}\lambda_{2^l}$ порядка $|\lambda_{2^l}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^l}| = 2^l$.

$$\theta_j = 5^j(\theta(\lambda_{2^l})) = \sum_{t \in Ker \lambda_{2^l}} \zeta_{2^{l+2}}^{jt} = \zeta_{2^{l+2}}^j + \zeta_{2^{l+2}}^{-j},$$

$$\theta'_j = 5^j(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})) = \sum_{t \in Ker \lambda_{-1}\lambda_{2^l}} \zeta_{2^{l+2}}^{jt} = \zeta_{2^{l+2}}^j - \zeta_{2^{l+2}}^{-j}.$$

Теперь применим теоремы о ведущих дивизорах дискриминанта поля к вычислению дискриминанта D_1 поля K_1 :

$$D_1 = \prod_{s=0}^{2^l-1} F(\lambda_{2^l}^s) = \prod_{s=1}^{2^l-1} 2^{2+ord_2|\lambda_{2^l}^s|} = 2^{(l+2)(2^l-1)} / 2^{\sum_{s=1}^{2^l-1} ord_2 s} = 2^{(l+1)2^l-1}.$$

Аналогично вычисляется дискриминант D_2 поля

$$K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})) = Q(\zeta_{2^{l+2}} - \zeta_{2^{l+2}}^{-1}) = Q(2i \sin \frac{2\pi}{2^{l+2}}), \quad D_2 = 2^{(l+1)2^l-1} \text{ при } l > 1,$$

Обозначим через $f_{2^l}(x)$ и $g_{2^l}(x)$ минимальные многочлены чисел $\theta(\lambda_{2^l}), \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^l})$ соответственно. Так как,

$$(\zeta_{2^{l+2}} + \zeta_{2^{l+2}}^{-1})^2 = \zeta_{2^{l+1}} + \zeta_{2^{l+1}}^{-1} + 2, \quad (\zeta_{2^{l+2}} - \zeta_{2^{l+2}}^{-1})^2 = \zeta_{2^{l+1}} + \zeta_{2^{l+1}}^{-1} + 2,$$

справедливы рекуррентные формулы $f_{2^{l+1}}(x) = f_{2^l}(x^2 - 2)$, $g_{2^{l+1}}(x) = f_{2^l}(x^2 + 2)$.

Ниже приведены конкретные вычисления для изучения циклических полей степени 2^l , с ведущим дивизором 2^{l+2} , при $l = 1, 2, 3, 4, 5$.

Примеры. 1. По модулю $f = 8$, $U(2^3) = (-\bar{1})(\bar{5})$, $X(2^3) = (\lambda_{-1})(\lambda_2)$, $\lambda_{-1}(-1) = -1$, $\lambda_2(-1) = 1$, $\lambda_{-1}(5) = 1$, $\lambda_2(5) = -1$, с точностью до эквивалентности существует два примитивных характера: $\lambda_2, \lambda_{-1}\lambda_2$ порядка $|\lambda_2| = |\lambda_{-1}\lambda_2| = 2$, $\text{Ker } \lambda_2 = \{1, -1\}$, $\text{Ker } \lambda_{-1}\lambda_2 = \{1, -5\}$, $\tau(\lambda_2) = 2(\zeta_{2^3} + \zeta_{2^3}^{-1}) = 2\sqrt{2}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_2) = 2(\zeta_{2^3} - \zeta_{2^3}^{-1}) = 4i \sin \frac{\pi}{4} = i2\sqrt{2}$ и существует два квадратичных поля $K_1 = Q(\theta(\lambda_2)) = Q(\sqrt{2})$ и $K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_2)) = Q(i\sqrt{2})$, с ведущим дивизором $f = 8$, и с дискриминантами $D_1 = 8, D_2 = -8$.

2. По модулю $f = 16$, $U(2^4) = (-\bar{1})(\bar{5})$, $X(2^4) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^2})$, $\lambda_{2^2}(5) = \zeta_{2^2}$, с точностью до эквивалентности существует в точности два примитивных характера: $\lambda_{2^2}, \lambda_{-1}\lambda_{2^2}$ порядка $|\lambda_{2^2}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^2}| = 2^2$, и существует в точности два циклических поля с ведущим дивизором $f = 16$: $K_1 = Q(\theta(\lambda_{2^2})) = Q(2 \cos \frac{\pi}{8}) = Q(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ и $K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})) = Q(2i \sin \frac{\pi}{8}) = Q(i\sqrt{2 - \sqrt{2}})$, с дискриминантом $D_1 = D_2 = 2^{11}$.

$U(2^4) = \{1, 5, 5^2 = -7, 5^3 = -3, -1, -5, -5^2 = 7, -5^3 = 3\}$. $5 - 1 \equiv 2^{\frac{2+2}{2}} \pmod{2^{2+2}}, q = 1$, $\pm 5^t \equiv -k \pmod{2^{\frac{2+2}{2}}}$, при $k=1, t=0-$, $-5^0 \equiv -1 \pmod{2^{\frac{2+2}{2}}}$, $\tau(\lambda_{2^2}) = 2^2 \zeta_{16}^{-1}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}) = -4\zeta_{2^4}^{-1}$, при $k=3, t=0+$, $5^0 \equiv -3 \pmod{2^{\frac{2+2}{2}}}$, $\tau(\lambda_{2^2}^3) = 2^2 \zeta_{16}^{5^0} = 4\zeta_{16}$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}^3) = 2^{\frac{2+2}{2}} \zeta_{2^{2+2}}^{5^0} = 4\zeta_{16}$. $\theta_0 = \theta(\lambda_{2^2}) = \zeta_{16}^{-1} + \zeta_{16} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\theta_1 = 5^1(\theta(\lambda_{2^2})) = \zeta_{16}^{-5} + \zeta_{16}^5 = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\theta_2 = 5^2(\theta(\lambda_{2^2})) = \zeta_{16}^{-9} + \zeta_{16}^9 = -\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\theta_3 = \zeta_{16}^{-3} + \zeta_{16}^3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\theta'_0 = \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}) = \frac{1}{4}(\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}^3) + \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})) = \zeta_{16} - \zeta_{16}^{-1} = 2i \sin \frac{\pi}{8} = i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\theta'_1 = 5^1(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})) = \zeta_{16}^{5^1} - \zeta_{16}^{-5^1} = 2i \sin \frac{5\pi}{8} = i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\theta'_2 = 5^2(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})) = \zeta_{16}^{5^2} - \zeta_{16}^{-5^2} = 2i \sin \frac{9\pi}{8} = -i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\theta'_3 = 5^3(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})) = \zeta_{16}^{5^3} - \zeta_{16}^{-5^3} = 2i \sin \frac{13\pi}{8} = -i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $\theta'_0, \theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ являются корнями минимального многочлена $g_{2^4}(x) = x^4 + 4x^2 + 2$. $1, \theta(\lambda_{2^2}), \theta(\lambda_{2^2})^2, \theta(\lambda_{2^2})^3$ и $1, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2}), \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})^2, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^2})^3$ являются целыми базисами полей K_1, K_2 .

3. По модулю $f = 32$, $U(2^5) = (-\bar{1})(\bar{5})$, $X(2^5) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^3})$, $\lambda_{2^2}(5) = \zeta_{2^2}$, с точностью до эквивалентности существует в точности два примитивных характера: $\lambda_{2^3}, \lambda_{-1}\lambda_{2^3}$ порядка $|\lambda_{2^3}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^3}| = 2^3$, и существует в точности два циклических поля с ведущим дивизором $f = 32$:

$$K_1 = Q(\theta(\lambda_{2^3})) = Q(2 \cos \frac{\pi}{16}) = Q(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}) \quad \text{и}$$

$$K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^3})) = Q(2i \sin \frac{\pi}{16}) = Q(i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}), \quad \text{с дискриминантом}$$

$D_1 = D_2 = 2^{31} \cdot 1, \theta(\lambda_{2^3}), \dots, \theta(\lambda_{2^3})^7$ и $1, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^3}), \dots, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^3})^7$ являются целыми базиса-

ми циклических полей K_1, K_2 . $5^2 - 1 \equiv 2^{3+3} \cdot 3 \pmod{2^{3+2}}$, $q = 3$, $5^{t_k} \equiv -3^{-1}k \equiv k \pmod{2^2}$.

$$5^0 \equiv -3^{-1} \cdot 1 \pmod{2^2}, \quad \text{при } k=1, \quad t_1=0, \quad \tau(\lambda_{2^3}) = 4(\zeta_{2^5} + \zeta_{2^5}^9),$$

$$\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^3}) = 4(\zeta_{2^5} + \zeta_{2^5}^9). \quad -5^0 \equiv 3 \pmod{2^2}, \quad \text{при } k=3, \quad t_3=0,$$

$$\tau(\lambda_{2^3}^3) = 4(\zeta_{2^5}^{-1} + \zeta_{2^5}^7), \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^3}^3) = -4(\zeta_{2^5}^{-1} + \zeta_{2^5}^7). \quad 5^0 \equiv 5 \pmod{2^2}, \quad \text{при } k=5,$$

$$t_5=0, \quad \tau(\lambda_{2^3}^5) = 4(\zeta_{2^5} + \zeta_{2^5}^{-7}), \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^3}^5) = 4(\zeta_{2^5} + \zeta_{2^5}^{-7}). \quad -5^0 \equiv 7 \pmod{2^2}, \quad \text{при}$$

$$k=7, \quad t_7=0, \quad \tau(\lambda_{2^3}^7) = 4(\zeta_{2^5}^{-1} + \zeta_{2^5}^{-9}), \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^3}^7) = -4(\zeta_{2^5}^{-1} + \zeta_{2^5}^{-9}),$$

$$2 \cos \frac{2\pi}{2^5} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad 2 \sin \frac{2\pi}{2^5} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

4. По модулю $f = 64$, $U(2^6) = (-\bar{1})(\bar{5})$, $X(2^6) = (\lambda_{-1})(\lambda_{2^4})$, $\lambda_{2^4}(5) = \zeta_{2^4}$, с точностью до эквивалентности существует в точности два примитивных характера: $\lambda_{2^4}, \lambda_{-1}\lambda_{2^4}$ порядка $|\lambda_{2^4}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^4}| = 2^4$, и существует в точности два циклических поля с ведущим дивизором $f = 64$:

$$K_1 = Q(\theta(\lambda_{2^4})) = Q(2 \cos \frac{\pi}{32}) = Q(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}) \quad \text{и}$$

$$K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^4})) = Q(2i \sin \frac{\pi}{32}) = Q(i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}), \quad \text{с дискриминантом}$$

$D_1 = D_2 = 2^{79} \cdot 1, \theta(\lambda_{2^4}), \theta(\lambda_{2^4})^2, \dots, \theta(\lambda_{2^4})^{15}$ и $1, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}), \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^4})^2, \dots, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^4})^{15}$

являются целыми базисами циклических полей K_1, K_2 . $5^2 - 1 \equiv 2^3 q \pmod{2^6}$, $q = 3$, и существует

$t \in \mathbb{Z}$, такое что $\pm 5^t \equiv -3^{-1}k \equiv -3k \pmod{2^3}$. При $k=1, t_1=1$, $5^1 \equiv -3 \pmod{2^3}$,

$$\tau(\lambda_{2^4}) = 8\zeta_{2^6}^9, \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}) = 8\zeta_{2^6}^9, \quad \text{при } k=3, \quad t_3=0, \quad -5^0 \equiv -9 \pmod{2^3},$$

$$\tau(\lambda_{2^4}^3) = 2^3 \zeta_{2^6}^{-1}, \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}^3) = -2^3 \zeta_{2^6}^{-1}, \quad \text{при } k=5, \quad t_5=0, \quad 5^0 \equiv -15 \pmod{2^3},$$

$$\tau(\lambda_{2^4}^5) = 2^3 \zeta_{2^6}, \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}^5) = 2^3 \zeta_{2^6}, \quad \text{при } k=7, \quad t_7=1, \quad -5^1 \equiv -21 \pmod{2^3},$$

$$\tau(\lambda_{2^4}^7) = 2^3 \zeta_{2^6}^{28-5} = 8\zeta_{2^6}^{23}, \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}^7) = -8\zeta_{2^6}^{23}, \quad \text{при } k=9, \quad t_9=1,$$

$$5^1 \equiv -27 \pmod{2^3}, \quad \tau(\lambda_{2^4}^9) = 8\zeta_{2^6}^{-23}, \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}^9) = 8\zeta_{2^6}^{-23}, \quad \text{при } k=11, \quad t_{11}=0,$$

$$-5^0 \equiv -33(\text{mod } 2^3), \quad \tau(\lambda_{2^4}^{11}) = 2^3 \zeta_{2^6}^{-1}, \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}^{11}) = -2^3 \zeta_{2^6}^{-1}, \quad k=13, \quad t_{13}=0,$$

$$5^0 \equiv -39(\text{mod } 2^3), \quad \tau(\lambda_{2^4}^{13}) = 2^3 \zeta_{2^6}, \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}^{13}) = 2^3 \zeta_{2^6}, \quad \text{при } k=15, \quad t_{15}=1,$$

$$-5^1 \equiv -45(\text{mod } 2^3), \quad \tau(\lambda_{2^4}^{15}) = 8\zeta_{2^6}^{-9}, \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^4}^{15}) = -8\zeta_{2^6}^{-9}.$$

$$\theta_0 = \theta(\lambda_{16}) = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{15} \tau(\lambda_{16}^i) = \zeta_{64} + \zeta_{64}^{-1} = 2 \cos \frac{\pi}{32} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}},$$

$$\theta_j = 5^j(\theta(\lambda_{16})) = \zeta_{64}^{5^j} + \zeta_{64}^{-5^j} = 2 \cos \frac{5^j \pi}{32},$$

$$\theta'_0 = 5^j(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{16})) = \zeta_{64} - \zeta_{64}^{-1} = 2i \sin \frac{\pi}{32} = i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}},$$

$$\theta'_j = 5^j(\theta'(\lambda_{-1}\lambda_{16})) = \zeta_{64}^{5^j} - \zeta_{64}^{-5^j} = 2i \sin \frac{5^j \pi}{32}.$$

5. По модулю $f=128$, с точностью до эквивалентности существует два примитивных характера: $\lambda_{2^5}, \lambda_{-1}\lambda_{2^5}$, порядка $|\lambda_{2^5}| = |\lambda_{-1}\lambda_{2^5}| = 2^5$ и существует в точности два циклических поля с

ведущим дивизором $f=128$: $K_1 = Q(\theta(\lambda_{2^5})) = Q(2 \cos \frac{\pi}{64}) = Q(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}})$

и $K_2 = Q(\theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^5})) = Q(2i \sin \frac{\pi}{64}) = Q(i\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}})$, с дискриминантом

$D_1 = D_2 = 2^{191}$. $1, \theta(\lambda_{2^5}), \dots, \theta(\lambda_{2^5})^{31}$ и $1, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}), \dots, \theta(\lambda_{-1}\lambda_{2^5})^{31}$ являются целыми

базисами циклических полей K_1, K_2 . $5^4 - 1 \equiv 2^4(-1)(\text{mod } 2^{5+2})$, $q = -1$,

$\pm 5^{t_k} \equiv -(-1)^{-1}k \equiv k(\text{mod } 2^3)$. При $k=1, t_1=0, 5^0 \equiv 1(\text{mod } 2^3)$,

$\tau(\lambda_{2^5}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}^{33}); \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}^{33})$. При $k=3, t_3=1$,

$-5^1 \equiv 3(\text{mod } 2^3), \quad \tau(\lambda_{2^5}^3) = 2^3(\zeta_{2^7}^7 + \zeta_{2^7}^{39}); \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^3) = -2^3(\zeta_{2^7}^7 + \zeta_{2^7}^{39})$. При

$k=5, t_5=1, 5^1 \equiv 5(\text{mod } 2^3), \quad \tau(\lambda_{2^5}^5) = 2^3(\zeta_{2^7}^{4 \cdot 5 + 5^1} + \zeta_{2^7}^{20 \cdot 3 + 5^3}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{25} + \zeta_{2^7}^{57});$

$\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^5) = 2^3(\zeta_{2^7}^{25} + \zeta_{2^7}^{57})$. При $k=7, t_7=0, -5^0 \equiv -1(\text{mod } 8)$,

$\tau(\lambda_{2^5}^7) = 2^3(\zeta_{2^7}^{-1} + \zeta_{2^7}^{31}); \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^7) = -2^3(\zeta_{2^7}^{-1} + \zeta_{2^7}^{31})$. При $k=9, t_9=0$,

$5^0 \equiv 1(\text{mod } 8), \quad \tau(\lambda_{2^5}^9) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}^{-31}); \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^9) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}^{-31})$. При $k=11$,

$t_{11}=1, -5^1 \equiv 3(\text{mod } 2^3), \quad \tau(\lambda_{2^5}^{11}) = 2^3(\zeta_{2^7}^7 + \zeta_{2^7}^{39}); \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^{11}) = -2^3(\zeta_{2^7}^7 + \zeta_{2^7}^{39})$.

При $k=13, t_{13}=1, 5^1 \equiv 5(\text{mod } 2^3), \quad \tau(\lambda_{2^5}^{13}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{25} + \zeta_{2^7}^{57});$

$\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^{13}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{25} + \zeta_{2^7}^{57})$. При $k=15, \tau(\lambda_{2^5}^{15}) = -2^3(\zeta_{2^7}^{-1} + \zeta_{2^7}^{-33}), t_{15}=0$,

$-5^0 \equiv -1(\text{mod } 8), \tau(\lambda_{2^5}^{15}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{-1} + \zeta_{2^7}^{-33})$. При $k=17, \tau(\lambda_{2^5}^{17}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}^{33});$

$t_{17}=0, 5^0 \equiv 1(\text{mod } 8), \quad \tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^{17}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}^{33})$. При $k=19, t_{19}=1$,

$-5^1 \equiv 3 \pmod{2^3}$, $\tau(\lambda_{2^5}^{19}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{-25} + \zeta_{2^7}^{-57})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^{19}) = -2^3(\zeta_{2^7}^{-25} + \zeta_{2^7}^{-57})$.
 При $k=21$, $t_{21}=1$, $5^1 \equiv 5 \pmod{2^3}$, $\tau(\lambda_{2^5}^{21}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{-39} + \zeta_{2^7}^{-7})$.
 $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^{21}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{-39} + \zeta_{2^7}^{-7})$. При $k=23$, $t_{23}=0$, $-5^0 \equiv -1 \pmod{8}$,
 $\tau(\lambda_{2^5}^{23}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{-1} + \zeta_{2^7}^{31})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^{23}) = -2^3(\zeta_{2^7}^{-1} + \zeta_{2^7}^{31})$. При $k=25$, $t_{25}=0$,
 $5^0 \equiv 1 \pmod{8}$, $\tau(\lambda_{2^5}^{25}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}^{-31})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^{25}) = 2^3(\zeta_{2^7} + \zeta_{2^7}^{-31})$. При $k=27$,
 $t_{27}=1$, $-5^1 \equiv 3 \pmod{8}$, $\tau(\lambda_{2^5}^{27}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{-25} + \zeta_{2^7}^{-57})$, При $k=29$, $t_{29}=1$,
 $5^1 \equiv 5 \pmod{2^3}$, $\tau(\lambda_{2^5}^{29}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{-7} + \zeta_{2^7}^{-39})$; $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^{29}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{-7} + \zeta_{2^7}^{-39})$. При
 $k=31$, $t_{31}=0$, $\tau(\lambda_{2^5}^{31}) = 2^3(\zeta_{2^7}^{-1} + \zeta_{2^7}^{-33})$, $\tau(\lambda_{-1}\lambda_{2^5}^{31}) = -2^3(\zeta_{2^7}^{-1} + \zeta_{2^7}^{-33})$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Болен А. Конструктивное описание абсолютно примарных циклических полей // Материалы 10-ой межвузовской конфер. по математике и механике. Т. 1. – Алматы: Эверо, 2005.
 2 Болен А. Классификация примитивных характеров Дирихле и их приложения // Математический журнал. – 2014. – Т. 14, № 1(51).

REFERENCES

- 1 Bolen A. Konstruktivnoe opisaniye absoljutno primarnykh ciklicheskih polej Materialy 10-oj mezhvuzovskoj konfer. po matematike i mehanike. T. 1. Almaty: Jevero, 2005.
 2 Bolen A. Klassifikacija primitivnykh harakterov Dirihle i ih prilozhenija. Matematicheskij zhurnal. 2014. T. 14, № 1(51).

Резюме

А. Болен

(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан)

2^l МОДУЛІ БОЙЫНША ДИРИХЛЕ ХАРАКТЕРІМЕН ГАУСС ҚОСЫНДЫЛАРЫ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ ҚОЛДАНУЛАРЫ

Жұмыста 2^l модулі бойынша Дирихле характерімен Гаусс қосындылары есептелінді және олардың 2^l примар дәрежелі абсолют абелдік өрістердің универсаль конструктивтік сипаттамаларына қолданулары берілді. Универсаль конструктивтік сипаттамалардағы тудырушы элементтердің минималь көпмүшелері есептелінді. Жетекші дивизоры 2^{l+2} болатын 2^l дәрежелі барлық циклдық абсолют өрістердің саны есептелінді.

Тірек сөздер: қосындылар, характерлер, өрістер, көпмүше, дивизор.

Summary

A. Bolen

(Kazach national pedagogical university named after Abai, Almaty, Kazakhstan).

GAUSSIAN SUMS FOR CHARACTERS OF DIRICHLET ON THE MODULE 2^l, AND THEIR APPENDIX

This article gives calculations of the Gaussian sums for characters of Dirichlet on the module 2^l, and their appendix to universal structural description of the absolutely Abelian cyclic fields of примарной degree 2^l, with a leading divisor 2^{l+2}. The minimum polynomials of originative elements are calculated in universal structural description. Made calculation number of all absolutely cyclic fields of degree 2^l, with a leading divisor 2^{l+2}.

Keywords: sums, characters, fields, polynom, divisor.

Поступила 05.05.2014 г.

А. Х. АРГЫНОВА, А. Ш. ГАЙТИНОВ, И. А. ЛЕБЕДЕВ, А. А. ЛОКТИОНОВ, П. Б. ХАРЧЕВНИКОВ

(Физико-технический институт, Алматы, Казахстан)

ОБРАЗОВАНИЕ МНОГОЗАРЯДНЫХ ФРАГМЕНТОВ ЯДЕР *Au* (10 А·ГэВ) И *Pb* (158 А·ГэВ) ВО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ С ЯДРАМИ ФОТОЭМУЛЬСИИ

Аннотация. Целью работы является изучение образования многозарядных фрагментов ядер *Au* (10,7А·ГэВ) и *Pb* (158 А·ГэВ), взаимодействующих с ядрами фотоэмульсии. При этом используется метод толстослойной фотоэмульсии. Анализ полученных экспериментальных данных позволил выявить следующие особенности: вероятность наблюдения событий с одним многозарядным фрагментом для ядер *Pb* оказалась существенно меньше (полтора раза), чем для ядер *Au*, что, по-видимому связано с особой устойчивостью ядра *Pb* (дважды магическое); доля событий, в которых процесс фрагментации взрывного типа, оказалась практически одинаковой для обоих ядер; среднее число фрагментов с зарядами 1 и 2 для ядер *Pb*, оказалось систематически меньше, чем для ядер *Au*. Сравнительный анализ результатов является весьма полезным для понимания процесса фрагментации релятивистских ядер в целом.

Ключевые слова: ядро, взаимодействие, фрагментация, заряд, устойчивость ядра.

Тірек сөздер: ядро, әрекеттестік, фрагментация, заряд, ядро тұрақтылығы.

Key words: nucleus, interaction, fragmentation, charge, stability of a nucleus.

Введение. Во взаимодействиях ядер с ядрами в фотоэмульсии наряду с фрагментами с зарядом один и два образуются многозарядные фрагменты (МЗ) с зарядами $Z \geq 3$.

События с одним многозарядным фрагментом нами изучались ранее [1-3]. Были найдены критерии выделения событий, в которых реализуется фрагментация испарительного типа (при малых передачах энергии происходит последовательное испускание фрагментов с зарядами $Z=1$ и $Z=2$) и взрывного типа, когда все фрагменты образуются одновременно с любым зарядом).

Здесь также используется фотоэмульсионный метод, который обладает рядом преимуществ: возможность изучать процессы в условиях 4π-геометрии, идентифицировать образованные частицы, производить измерения с микронной точностью, на основе измерения плотности δ-электронов на следах фрагментов и числа разрывов на них определять их заряд.

Настоящая работа является продолжением исследований фрагментации ядер – выявление закономерностей, связанные с образованием любого числа многозарядных фрагментов ($n_{M3} \geq 1$). Слои фотоэмульсии облучались ядрами *Au* на ускорителе в Брукхейвене (США) и ядрами *Pb* – в ЦЕРНе (Женева).

Результаты и их обсуждение

В таблицах 1 и 2 представлены для ядер ${}_{79}\text{Au}^{197}$ (10,7 А·ГэВ) и ${}_{82}\text{Pb}^{208}$ (158 А·ГэВ) процентное содержание событий (вероятность) с различным числом многозарядных фрагментов (n_{M3}).

Таблица 1 – Вероятность (%) образования событий с различным числом многозарядных фрагментов (n_{M3}) и средние числа однозарядных ($\langle n_{Z=1} \rangle$), двухзарядных ($\langle n_{Z=2} \rangle$) и всех фрагментов ($\langle n_f \rangle$) для ядер *Au*

$\langle n \rangle$ n_{M3}	$\frac{1}{N_c} \frac{dN_c}{dn_{M3}} (\%)$	$\langle n_{Z=1} \rangle$	$\langle n_{Z=2} \rangle$	$\langle n_f \rangle$
1	38,2±2,1	6,2±0,2	3,1±0,1	10,3±0,3
2	25,3±1,7	9,7±0,3	5,1±0,2	15,8±0,4
3	15,4±1,3	10,9±0,3	5,4±0,2	19,3±1,3
4	8,6±0,7	10,8±0,4	5,9±0,3	20,8±0,5
5	3,1±0,5	12,1±0,6	6,2±0,4	23,3±0,7
6	1,3±0,2	11,1±1,0	5,7±0,5	24±1,4

Таблица 2 – Вероятность (%) образования событий с различным числом многозарядных фрагментов (n_{M3}) и средние числа однозарядных ($\langle n_{z=1} \rangle$), двухзарядных ($\langle n_{z=2} \rangle$) и всех фрагментов ($\langle n_f \rangle$) для ядер *Pb*

$\langle n \rangle$ n_{M3}	$\frac{1}{N_c} \frac{dN_c}{dn_{M3}}$ (%)	$\langle n_{z=1} \rangle$	$\langle n_{z=2} \rangle$	$\langle n_f \rangle$
1	58,1±4,8	2,5±0,3	1,5±0,1	5,0±0,4
2	17,6±2,3	6,6±0,8	3,3±0,3	11,9±1,0
3	8,8±1,6	7,3±1,0	4,3±0,4	14,7±1,2
4	4,2±1,0	10,3±1,2	5,0±0,5	19,4±1,5
5	2,5±0,8	9,5±1,1	5,5±0,7	20,9±1,5
6	0,35±0,3	10,5±4,0	4,5±2,5	21,0±5,7

Для сравнения результатов, относящихся к ядрам, близкими по массе, но значительно отличающимися по первичной энергии, имеет смысл привести и соответствующие рисунки.

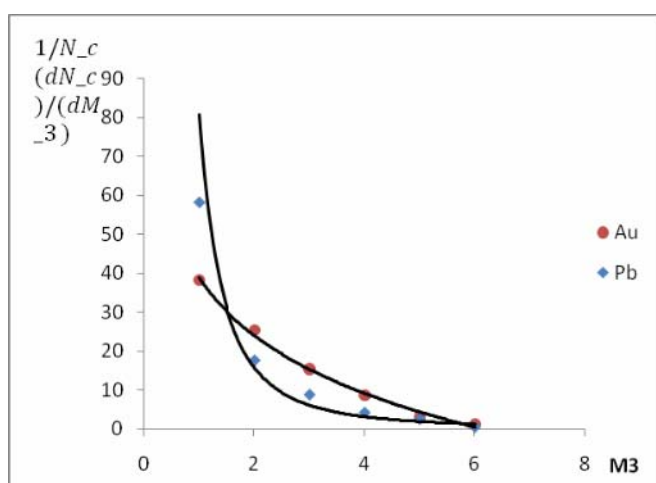


Рисунок 1 – Зависимость вероятности (доли %) образования событий от числа многозарядных фрагментов (n_{M3})

Из табличных данных и рисунка 1 видно, что вероятность наблюдения событий с одним многозарядным фрагментом ($n_{M3}=1$) для ядер *Pb* существенно отличается, чем для *Au* - в полтора раза больше. А если еще учесть, что эти события (для обоих ядер) подавляющем большинстве относятся к событиям, в которых процесс фрагментации происходит испарительного типа: (90,1% - *Pb* и 73,3% - *Au*), то ядро *Pb* как бы сдерживает образование событий взрывного типа, что, по-видимому, связано с особой устойчивостью этого ядра, как ядра дважды магического, содержащего 82 протона и 126 нейтрона.

Что же касается событий с числом многозарядных фрагментов $n_{M3} \geq 2$, то как видно из таблицы 1 и рисунка 1, вероятность наблюдения этих событий для *Pb* систематически меньше, чем для *Au*. Здесь сказывается значительное превышение событий с $n_{M3}=1$ для ядер *Pb*, чем -*Au*.

Если же рассмотреть события с процессом фрагментации только взрывного типа [1], то из данных таблицы 3 видно, что доля событий с одинаковым числом многозарядных фрагментов (n_{M3}) для обоих ядер в пределах ошибок совпадают. Совпадают также их средние числа: $\langle n_{M3} \rangle = 2,58 \pm 0,11$ (*Au*) и $\langle n_{M3} \rangle = 2,53 \pm 0,24$ (*Pb*)

Таблица 3 – Доля событий (%) с процессом фрагментации взрывного типа при $n_{M3} \geq 1$

n_{M3}	Доля событий (%)	
	<i>Au</i>	<i>Pb</i>
1	15,9±1,6	13,5±3,1
2	39,6±2,8	44,9±6,5
3	24,1±2,0	22,4±4,2
4	13,5±1,5	10,9±2,8
5	4,9±0,8	6,4±3,3
6	2,1±0,5	1,2±0,7

Рассмотрим теперь поведение средних значений фрагментов с зарядами 1 и 2 ($\langle n_{z=1} \rangle$, $\langle n_{z=2} \rangle$) в событиях с различным числом многозарядных фрагментов ($n_{M3} \geq 1$).

В таблицах 1 и 2 и на рисунках 2 и 3 представлены полученные значения этих величин.

Рисунок 2 – Зависимость $\langle n_{z=1} \rangle$ от числа многозарядных фрагментов (n_{M3})

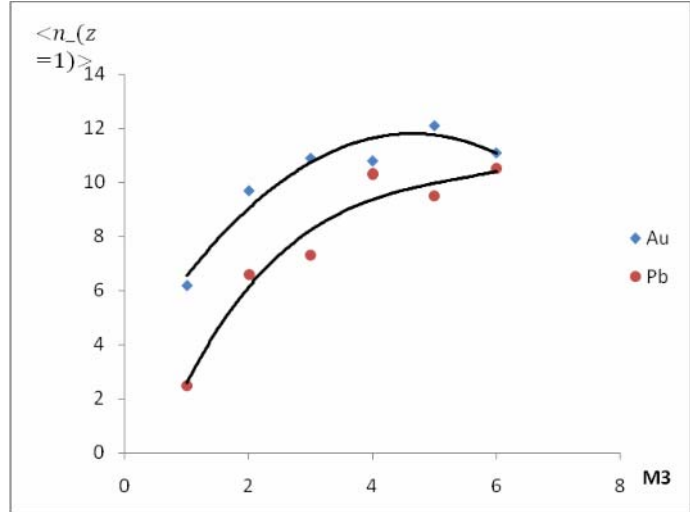


Рисунок 3 – Зависимость $\langle n_{z=2} \rangle$ от числа многозарядных фрагментов (n_{M3})

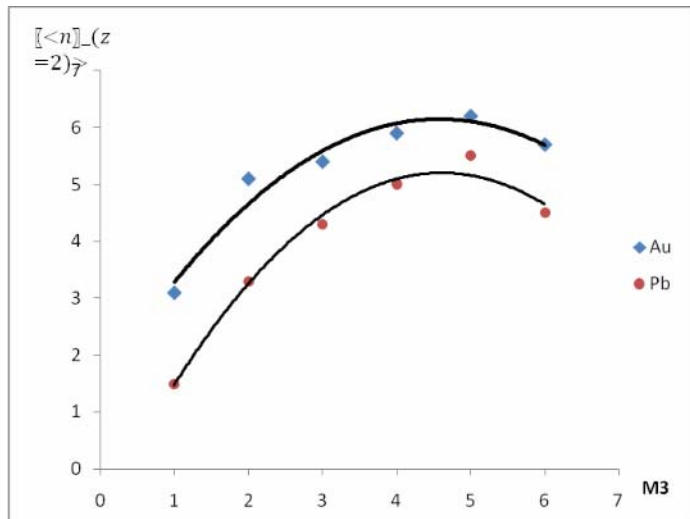
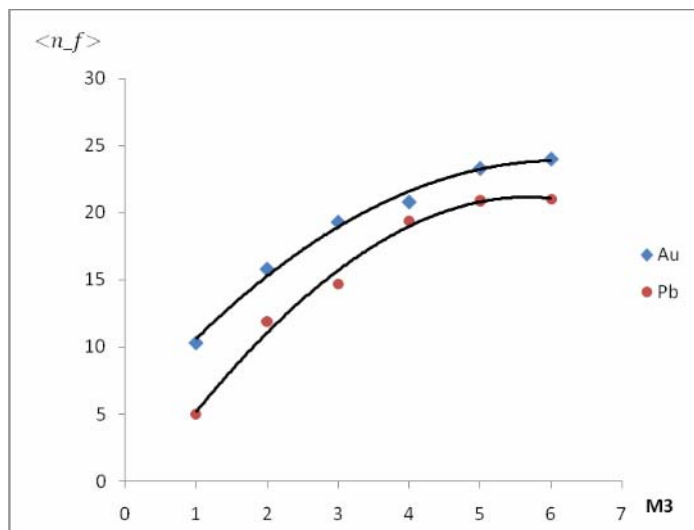


Рисунок 4 – Зависимость среднего числа всех фрагментов ($\langle n_f \rangle$) от числа многозарядных фрагментов (n_{M3})



Для обоих ядер *Au* и *Pb* значения $\langle n_{z=1} \rangle$ и $\langle n_{z=2} \rangle$ с увеличением n_{m3} возрастает до $n_{m3}=4$, а затем выравнивается. Следует отметить, что значения $\langle n_{z=1} \rangle$ и $\langle n_{z=2} \rangle$ в событиях для ядер *Pb* меньше, чем для ядер *Au*, причем наиболее заметно (~ 2 раза), в событиях с $n_{m3}=1$. Здесь опять же сказывается то обстоятельство, что в событиях с $n_{m3}=1$ для ядер *Pb* в основном происходит процесс фрагментации испарительного типа, а следовательно, малая передача энергии остаточному ядру, что ведет к меньшему числу фрагментов с $Z=1$ и $Z=2$. Что касается для событий с $n_{m3} \geq 2$, в которых $\langle n_{z=1} \rangle$ и $\langle n_{z=2} \rangle$ для *Pb* систематически меньше, чем для ядер *Au*, по-видимому связано с особой устойчивостью ядер *Pb*.

Рассмотрим теперь поведение среднего значения полного числа фрагментов, образованных в каждом событии: $n_f = n_{z=1} + n_{z=2} + n_{m3}$.

В таблице 1 и на рисунке 4, где представлены полученные результаты, видно, что $\langle n_f \rangle$ с увеличением n_{m3} заметно возрастает. Это не удивительно: во-первых, с увеличением n_{m3} возрастает число многозарядных фрагментов в событиях и, во-вторых, возрастает, как было указано выше, значение $\langle n_{z=1} \rangle$ и $\langle n_{z=2} \rangle$. Здесь также сохраняется закономерность, как и для фрагментов с зарядами 1 и 2, то есть $\langle n_f \rangle$ систематически меньше в событиях для ядер *Pb*, чем для ядер *Au*. Причина последнего была отмечена выше.

В таблице 4, где представлены средние значения множественностей s-, g- и b- частиц в событиях с различным числом многозарядных фрагментов, следует:

- как и следовало ожидать, для ядер *Pb* со значительно большей энергией значения $\langle n_s \rangle$ заметно выше, чем для ядер *Au*, причем для событий с $n_{m3} \geq 2$ оказались в пределах ошибок одинаковыми и больше, чем для событий с $n_{m3}=1$ (более периферическое взаимодействие);
- во всех событиях ($n_{m3} \geq 1$) для обоих ядер значение $\langle n_g \rangle$, отражающее число провзаимодействовавших протонов ядра-снаряда, оказались одинаковыми в пределах ошибок, что не удивительно, так как массы этих ядер близки по величине и ядра-мишени одинаковы;
- во всех событиях ($n_{m3} \geq 1$) для обоих ядер значение $\langle n_b \rangle$ (фрагменты ядер-мишеней) практически оказались одинаковыми по той же причине, что указано в предыдущем пункте.

Таблица 4 – Среднее число s-, g- и b- частиц, образованных во взаимодействиях ядер *Au* и *Pb* с ядрами фотоэмульсии с различным числом n_{m3}

$\langle n \rangle$ n_{m3}	<i>Au</i>			<i>Pb</i>		
	$\langle n_s \rangle$	$\langle n_g \rangle$	$\langle n_b \rangle$	$\langle n_s \rangle$	$\langle n_g \rangle$	$\langle n_b \rangle$
1	46±4	4,5±0,4	3,4±0,2	83±12	3,4±0,4	4,2±0,4
2	60±5	5,3±0,5	3,6±0,3	172±31	3,8±0,8	3,2±0,4
3	68±6	5,4±0,7	4,2±0,5	160±36	4,0±1,2	3,9±0,9
4	58±7	5,1±0,8	3,3±0,5	180±58	5,1±1,8	3,2±1,1
5	51±9	6,3±1,5	4,5±1,1	158±61	5,3±2,5	4,3±2,6
6	64±14	5,3±3,0	4,5±2,1	149±56	5,0±2,6	4,5±2,4

Заключение. Анализ характеристик многозарядных фрагментов, образованных во взаимодействиях двух близких по массе ${}_{79}\text{Au}^{197}$ (10,7 А·ГэВ) и ${}_{82}\text{Pb}^{208}$ (158 А·ГэВ и существенно разных по энергии с ядрами фотоэмульсии позволил выявить следующее:

- события с одним многозарядным фрагментом ($n_{m3}=1$) для ядер *Pb* в полтора раза превосходит, чем для ядер *Au*, что, по-видимому, связано особой устойчивостью для этого ядра;
- доля событий, в которых происходит процесс фрагментации взрывного типа, и с равным числом многозарядных фрагментов (n_{m3}), оказалась одинаковой в пределах ошибок;
- среднее число фрагментов с зарядами 1 и 2 ($\langle n_{z=1} \rangle$ и $\langle n_{z=2} \rangle$) и всех фрагментов в событии $\langle n_f \rangle$ для ядра *Pb* при всех $n_{m3} \geq 1$, особенно при $n_{m3}=1$, систематически меньше, чем для ядра *Au*;
- средние значения множественностей частиц ядра-мишени g- и b-частиц оказались практически одинаковыми, за исключением генерированной s-частицы – для ядра *Pb* существенно больше, чем для *Au*, что связано значительным превышением его первичной энергии (158 А·ГэВ).

ЛИТЕРАТУРА

1 Аргынова А.Х., Гайтинов А.Ш., Лебедев И.А., Локтионов А.А., Скоробогатова В.И., Харчевников П.Б. Механизмы фрагментации тяжелых ядер Au (10,7 А·ГэВ) и Pb (158 А·ГэВ) во взаимодействиях с ядрами фотоэмульсии // Вестник КазНАЕН. – 2011. – № 4. – С. 26-30.

2 Аргынова А.Х., Гайтинов А.Ш., Лебедева А.И., Лебедев И.А., Локтионов А.А., Харчевников П.Б. Особенности характеристик фрагментации легких ядер (${}_{14}Si^{28}$ – 14 А·ГэВ, ${}_{16}S^{32}$ – 200 А·ГэВ) и тяжелых (${}_{79}Au^{197}$ – 10,7 А·ГэВ, ${}_{82}Pb^{208}$ – 158 А·ГэВ) во взаимодействиях с ядрами фотоэмульсии // Вестник КазНАЕН. – 2013. – № 1. – С. 68-72.

3 Аргынова А.Х., Гайтинов А.Ш., Локтионов А.А., Харчевников П.Б. Многочарядные фрагменты ядер Au (10,7 А·ГэВ), образованные во взаимодействиях с ядрами фотоэмульсии // Доклады 9-ой межд. конф. ICNRP'13 "Nuclear and Radiation Physics" 24-27 сентября 2013. – С. 231-233.

REFERENCES

1 Argynova A.H., Gajtinov A.Sh., Lebedev I.A., Loktionov A.A., Skorobogatova V.I., Harchevnikov P.B. Mechanizmy fragmentacii tzhzhelyh jader Au (10,7 A·GjeV) i Pb (158 A·GjeV) vo vzaimodejstvijah s jadrami fotojemul'sii. Vestnik KazNAEN. 2011. № 4. S. 26-30.

2 Argynova A.H., Gajtinov A.Sh., Lebedeva A.I., Lebedev I.A., Loktionov A.A., Harchevnikov P.B. Osobennosti harakteristik fragmentacii legkih jader (${}_{14}Si^{28}$ – 14 A·GjeV, ${}_{16}S^{32}$ – 200 A·GjeV) i tzhzhelyh (${}_{79}Au^{197}$ – 10,7 A·GjeV, ${}_{82}Pb^{208}$ – 158 A·GjeV) vo vzaimodejstvijah s jadrami fotojemul'sii. Vestnik KazNAEN. 2013. № 1. S. 68-72.

3 Argynova A.H., Gajtinov A.Sh., Loktionov A.A., Harchevnikov P.B. Mnogozarjadnye fragmenty jader Au (10,7 A·GjeV), obrazovannye vo vzaimodejstvijah s jadrami fotojemul'sii. Doklady 9-oy mezhd. konf. ICNRP'13 "Nuclear and Radiation Physics" 24-27 sentjabrja 2013. S. 231-233.

Резюме

А. Х. Аргынова, А. Ш. Гайтинов, И. А. Лебедев, А. А. Локтионов, П. Б. Харчевников

(Физика-техникалық институты, Алматы, Қазақстан)

ФОТОЭМУЛЬСИЯ ЯДРОЛАРЫМЕН ӘРЕКЕТТЕСУІНДЕГІ Au (10 А·ГэВ)
ЖӘНЕ Pb (158 А·ГэВ) КӨП ЗАРЯДТЫ БӨЛІКТЕР ЯДРОЛАРЫНЫҢ ТҮЗІЛУІ

Жұмыстың мақсаты Au (10,7 А·ГэВ) және Pb (158 А·ГэВ) көп зарядты бөліктер ядроларының, фотоэмульсия ядроларымен әрекеттесуіндегі түзілуін зерттеу. Бұл ретте қалыңқабатты фотоэмульсияның әдісі пайдаланылады. Алынған эксперименталды деректердің талдауы келесі ерекшеліктерді анықтауға мүмкіндік берді: Pb ядролары үшін, бір көп зарядты фрагменттік оқиғаларды бақылаудың ықтималдығы Au ядроларына қарағанда айтарлықтай аз болып шықты (бір жарым рет), бұл Pb ядроларының ерекше тұрақтылығымен байланған (екі ретті тылсымды); жарылу түрдегі фрагментация процесстердегі оқиғалардың сыбағасы іс жүзінде бірдей болып шықты; Pb ядролары үшін, 1 және 2 зарядты фрагменттердің орташа саны, Au ядроларына қарағанда жүйелі түрде аз болып шықты. Массасы бойынша жақын және энергиясы бойынша айтарлықтай айырмашылығы бар екі нәтиженің салыстырмалы талдауы, бүтін релятивисті ядролардың фрагментация процесін түсіну үшін әбден пайдалы болып табылады.

Тірек сөздер: ядро, әрекеттестік, фрагментация, заряд, ядро тұрақтылығы.

Summary

A. Kh. Argynova, A. Sh. Gaitinov, I. A. Lebedev, A. A. Loctionov, P. B. Kharchevnikov

(Institute of Physics and technology, Almaty, Kazakhstan)

FORMATION OF MULTICHARGING FRAGMENTS OF NUCLEUS (10A GeV) AND
(158A GeV) IN INTERACTIONS WITH PHOTOEMULSION NUCLEUS

The purpose of the work is studying of formation of multicharging fragments of nucleus of Au (10,7 A·GeV) and Pb (158 A·GeV), interacting with photoemulsion nucleus. The method of a thick-layer photoemulsion is used. The analysis of the obtained experimental data allowed to reveal the following features: the probability of supervision of events with one multicharging fragment for nucleus of Pb appeared significantly less (one and a half times), than for Au nucleus that, it is connected with special stability of a nucleus of Pb (twice magic); share of events in which process of fragmentation of belong to explosive type, almost identical to both nucleus; the average of fragments with charges 1 and 2 for Pb nucleus, appeared systematically less, than for Au nucleus. The comparative analysis of results of two relatives is very useful for understanding of process of fragmentation of relativistic nucleus as a whole.

Keywords: nucleus, interaction, fragmentation, charge, stability of a nucleus.

Поступила 05.05.2014 г.

М. Е. ЕСКАЛИЕВ, Ж. Ж. КОЖАМКУЛОВА

(Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан)

К РАСЧЕТУ РАЗВИТИЯ ОБЛАСТИ НЕУПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ГРУНТОВОМ МАССИВЕ СЛОЖНОГО СТРОЕНИЯ

Аннотация. В статье рассматриваются проблемы теоретического обоснования развития неупругих зон в пластически неоднородной среде вокруг выработки различного назначения. Для ортотропного тела привлекается обобщенный условие текучести Мизеса на анизотропные тела. Даны соответствующие характеристики параметрам анизотропии и пределам текучести при сдвиге по отношению к главным осям изотропии. Построены круги напряжений Мора для нахождения значений критических сил и коэффициента внутренних трений.

Ключевые слова: нагрузка, оболочка, алгоритм, параметр, перемещение, вязкость.

Тірек сөздер: жүктеме, қабыршақ, алгоритм, параметр, жылжу, тұтқырлық.

Keywords: loading, cover, algorithm, parameters, moving, viscous.

Проектирование и строительство подземных сооружений требует обоснованного подхода к оценке воздействия статических и сейсмических нагрузок на различные типы конструктивных элементов сооружений, определения их напряженного и деформированного состояний на основе совершенствования упругопластических моделей толщи пород и самих методов расчета.

Определение области возможной упругопластической деформаций в массиве сложного слоистого строения вблизи выработки конечно-элементной дискретизацией реального объекта с использованием табулированной акселерограмма сильных землетрясений различной балльности. Модель массива как изотропного тела далеко не полностью описывает наблюдаемые в природе особенности проявления горного давления. Попытка решить задачу в такой постановке для транстропного массива была предпринята в работах Ж. К. Масанова и М. Е. Ескалиева [1-3] на основе применения полуобратного метода Перлина [4, 5] для выработки находящегося в бесконечной среде. Вопрос исследования закономерности возникновения пластических зон вокруг выработки находящегося в тяжелой полуплоскости, материал, который состоит из горной породы, имеющее наклоннослоистое строение пока еще не изучен. Задача еще более осложниться тем что, если горная выработка находится в массиве неоднородно анизотропного строения. Прежде чем решить задачу в упругопластической постановке, немаловажно знать закономерности перехода массива вокруг выработки в пластическое состояние в направлениях вдоль и вкрест слоев плоскости изотропии, а также в направлениях между ними, т.е. на главных площадках. Неизвестно также, на какой глубине начинается появления пластических зон в тяжелом наклоннослоистом транстропном массиве вокруг горной выработки в зависимости от воздействия геостатических и тектонических сил. Естественно, такую задачу необходимо решить сначала методом предельного перехода. Для решения задач механики деформируемого твердого тела предельным переходом в качестве условия пластичности часто применяется соотношения Кулона-Мора, которая удобна тем, что позволяет одновременно определить возникновения зон пластичности от растягивающих и сжимающих напряжений.

Условие пластичности Мизеса с экспериментальными данными дает достаточно близкие результаты (энергетическое условие пластичности)

$$f(\sigma) = \sqrt{I_2} = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}, \quad (1)$$

здесь I_2 – второй инвариант девиатора напряжений, S_{ij} – компоненты девиатора напряжений $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$; $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Условие Мизеса приблизительно описывает течение изотропного материала. Поэтому простейшим условием текучести для анизотропного материала является то, которое сводится к закону Мизеса, когда анизотропия исчезающее мала.

Для ортотропного тела Хиллом было предложено условие пластичности, которое является обобщением условия Мизеса на анизотропные тела. Если x, y, z являются главными осями анизотропии, условие пластичности Хилла имеет вид

$$2f(\sigma_{ij}) \equiv F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1, \quad (2)$$

где F, G, H, L, M, N – параметры анизотропии. Постоянные в этом условии текучести можно определить, для частных случаев одноосных растяжений в направлениях осей x, y, z и сдвигов между этими осями. Если $\sigma_{xT}, \sigma_{yT}, \sigma_{zT}$ – пределы текучести при растяжении в главных направлениях анизотропии, тогда

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{yT}^2} + \frac{1}{\sigma_{zT}^2} - \frac{1}{\sigma_{xT}^2} \right), \quad \frac{1}{\sigma_{xT}^2} = G + H, \\ G &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{zT}^2} + \frac{1}{\sigma_{xT}^2} - \frac{1}{\sigma_{yT}^2} \right), \quad \frac{1}{\sigma_{yT}^2} = H + F, \\ H &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{xT}^2} + \frac{1}{\sigma_{yT}^2} - \frac{1}{\sigma_{zT}^2} \right), \quad \frac{1}{\sigma_{zT}^2} = F + G, \end{aligned} \quad (3)$$

Если L, M, N – пределы текучести при сдвиге по отношению к главным осям изотропии, то в этом случае

$$L = \frac{1}{2\tau_{yzT}^2}, \quad M = \frac{1}{2\tau_{xzT}^2}, \quad N = \frac{1}{2\tau_{xyT}^2}. \quad (4)$$

$\sigma_{xT}, \sigma_{yT}, \sigma_{zT}, \tau_{xyT}, \tau_{xzT}, \tau_{yzT}$ – ординаты диаграмм растяжений и сдвигов в различных направлениях.

Для применения условия пластичности Хилла необходимы экспериментальные данные для определения шести параметров F, G, H, L, M, N из выражений (3) и (4) для трансформного горного массива. Этими вопросами также занимались зарубежные ученые из Бельгии – В. Хейгеман, К. Пириякул, из Японии – Ф. Татсуоко, Т. Сато и другие, из Ирана – А. Ахмади, А. Галандарзадех и другие. Но все экспериментальные данные в их работах относятся к грунтам и преимущественно для нахождения упругих свойств грунтов анизотропного строения.

Для нахождения пластических зон вдоль и вкrest слоев плоскости изотропии мы можем определить неизвестные параметры $c_{\perp}, c_{\parallel}, \varphi_{\perp}, \varphi_{\parallel}$ используя круги Мора (рисунок 1). Смысл этих рисунков сводится к следующим. Из экспериментальных данных снимаются критические значения максимальных $\sigma_1 = \sigma_{\max} = \sigma_{1C}$ и минимальных $\sigma_3 = \sigma_{\min} = \sigma_{3C}$ и по ним раздельно строятся круги Мора. Значения $\sigma_1 = \sigma_{1C}$ наносится на положительное направление оси напряжений, а минимальное напряжение наносится на отрицательное направление со знаком минус:

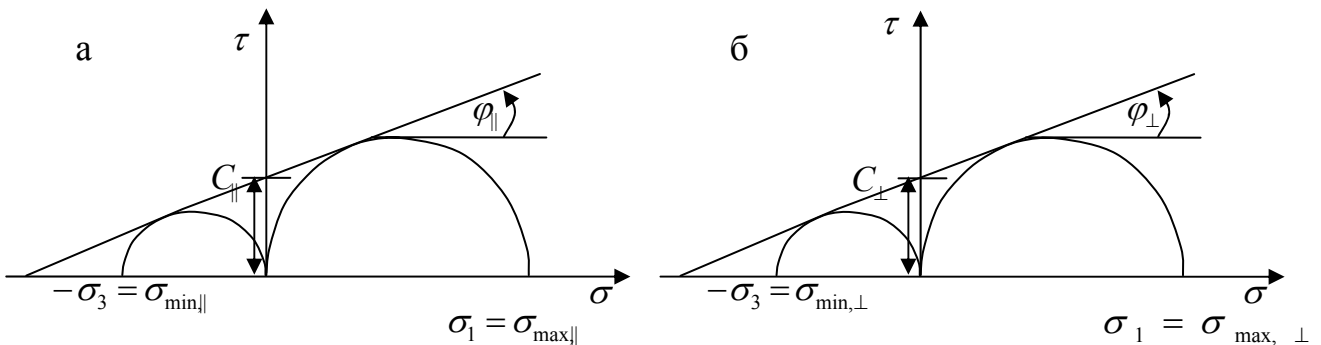


Рисунок 1 – Построение кругов напряжений Мора для нахождения значений критических сил сцеплений и внутренних трений вдоль (а) и вкrest (б) слоев плоскости изотропии – $C_{\parallel}, C_{\perp}, \varphi_{\parallel}, \varphi_{\perp}$

– $\sigma_3 = \sigma_{3C}$. На полученные круги проводим касательные. Точки пересечения по оси τ , нам дадут значения сил сцепления вдоль слоев C_{\parallel} (рисунок 1а) и перпендикулярно слоям C_{\perp} (рисунок 1б). Измеряем углов внутренних трений вдоль слоев φ_{\parallel} и перпендикулярно слоям φ_{\perp} .

Теперь мы можем записать новое обобщенное условие пластичности Кулона-Мора для трансропного массива в следующем виде

$$\tau_{\perp C} = \sigma_{\perp C} \operatorname{tg} \varphi_{\perp} + C_{\perp} \quad (5)$$

$$\tau_{\parallel C} = \sigma_{\parallel C} \operatorname{tg} \varphi_{\parallel} + C_{\parallel} \quad (6)$$

С использованием МКЭ определяются напряжений σ_x, σ_z и τ_{xz} в элементах и значения главных напряжений в направлений главных площадок α – вычисляется с помощью формул теории упругости:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xz}^2}, \\ \sigma_{\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xz}^2}, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_z - \sigma_x}, \\ \tau_{\max} &= \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме максимальных и минимальных компонент напряжений Значений нормальных компонент напряжений $\sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}$ вкрест и вдоль слоев плоскостей изотропии, вычисляем с помощью следующих соотношений, после применения формул преобразования

$$\begin{aligned} \sigma_{n, \bar{\varphi}} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\bar{\varphi} + \tau_{xy} \sin 2\bar{\varphi}, \\ \sigma_{t, \bar{\varphi}} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\bar{\varphi} - \tau_{xy} \sin 2\bar{\varphi}, \\ \tau_{nt, \bar{\varphi}} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\bar{\varphi} + \tau_{xy} \cos 2\bar{\varphi}. \end{aligned} \quad (8)$$

Но, направления главных площадок α вычисляемый из (7), может не всегда совпадает с углом плоскости изотропии $\bar{\varphi}$. Поэтому нормальных компонент напряжений на главных площадках вычисляется с помощью угла α следующими выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_{n, \alpha} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \sigma_{t, \alpha} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \\ \tau_{nt, \alpha} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

Смыслов сказанных раскрывает рисунок 2.

Теперь, можно сформулировать условий возникновения неупругих зон в направлениях вдоль и вкрест слоев плоскости изотропии наклоннослоистого трансропного массива.

Если максимальное значение касательных напряжений τ_{\max} вычисляемый по выражению (7) из МКЭ:

$$\tau_{\max} \geq \tau_{\parallel, c} \quad (10)$$

то пластическая зона развивается вдоль слоев плоскости изотропии.

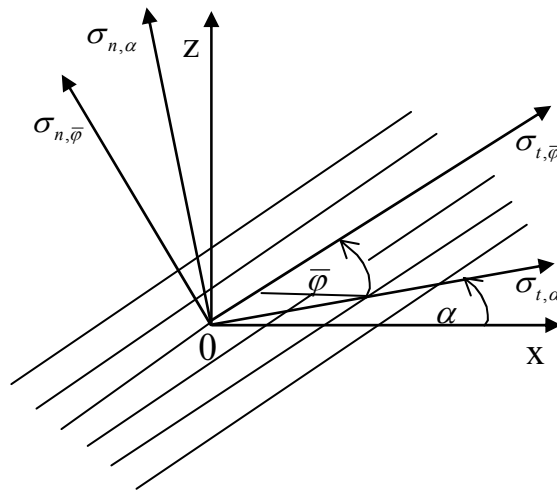


Рисунок 2 – Ориентации главных площадок α главных напряжений и угла наклона плоскости изотропии $\bar{\varphi}$ относительно горизонтальной оси Ox декартовой системы координат xOz

Если

$$\tau_{\max} \geq \tau_{\perp, c} \quad (11)$$

то пластическая зона развивается перпендикулярно слоям плоскости изотропии.

Пластическая зона для заданного $\bar{\varphi}$, может развиваться между направлениями вдоль и вкрест, т.е. в направлений $\perp \leq \alpha \leq \parallel$, а также главных площадок α . Для этих направлений условию пластичности мы можем записать с помощью выражений типа Казагранде–Коррилло в виде

$$\tau_{\alpha} = \tau_{\max, \perp} + (\tau_{\max, \parallel} - \tau_{\max, \perp}) \cos^2 \alpha, \quad (12)$$

где $\tau_{\max, \parallel}$, $\tau_{\max, \perp}$ экспериментально определяемые критические значения горных пород слоистого строения для случаев $\alpha = 0$ и $\alpha = 90^\circ$ т.е. вдоль и вкрест слоев плоскости изотропии. Сравнивая, вычисленные величины максимальных касательных напряжений τ_{\max} по (7) с их критическими величинами по (12) определяется направление и зоны распространения пластичности для любого α .

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ескалиев М.Е., Масанов Ж.К. К приближенному расчету упругопластических напряжений и перемещений в транстропном теле с отверстием, при экспоненциальном условий пластичности // Изв. АН КазССР. Серия физ.-мат. – 1983. – № 5. – С. 69-75.
- 2 Ескалиев М.Е. Влияние дилатансии пород на упругопластическое состояние выработки в анизотропном массиве // Изв. МН-АН РК. Серия физ.-мат. – 1996. – № 3. – С. 72-78.
- 3 Масанов Ж.К., Ескалиев М.Е., Аубакиров С.Б., Баймаханов И.Б. Упругое, вязкое и пластическое состояние анизотропного массива вблизи полости при статических и сейсмических воздействиях // В кн.: Математика и механика. Ч. 3. Теоретическая и прикладная механика. – Изд. КазГУ, 1984.
- 4 Перлин П.И. Приближенный метод решения упругопластических задач // Инженерный журнал. – 1960. – Вып. 28. – С. 145-150.
- 5 Перлин П.И. Упругопластическое распределение напряжений вокруг отверстий // Труды Моск. физ.-техн. ин-та. – 1960. – № 5. – С. 31-39.

REFERENCES

- 1 Eskaliev M.E., Masanov Zh.K. K priblizhennomu raschetu uprugoplasticheskikh naprjazhenij i peremeshhenij v transtropnom tele s otverstiem, pri jeksponencial'nom uslovij plastichnosti. Izv. AN KazSSR. Serija fiz.-mat. 1983. № 5. S. 69-75.
- 2 Eskaliev M.E. Vlijanie dilatansii porod na uprugoplasticheskoe sostojanie vyrabotki v anizotropnom massive. Izv. MN-AN RK. Serija fiz.-mat. 1996. № 3. S. 72-78.
- 3 Masanov Zh.K., Eskaliev M.E., Aubakirov S.B., Bajmahanov I.B. Uprugoe, vjazkoe i plasticheskoe sostojanie anizotropnogo massiva vblizi polosti pri sticheskikh i sejsmicheskikh vozdejstvijah. V kn.: Matematika i mehanika. Ch. 3. Teoreticheskaja i prikladnaja mehanika. Izd. KazGU, 1984.
- 4 Perlin P.I. Priblizhennyj metod reshenija uprugoplasticheskikh zadach. Inzhenernyj zhurnal. 1960. Vyp. 28. S. 145-150.
- 5 Perlin P.I. Uprugoplasticheskoe raspredelenie naprjazhenij vokrug otverstij. Trudy Mosk. fiz.-tehn. in-ta. 1960. № 5. S. 31-39.

Резюме

М. Е. Есқалиев, Ж. Ж. Қожамқұлова

(Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан)

КҮРДЕЛІ ҚҰРЫЛЫМДЫ ЖЕР СІЛЕМДЕРІНДЕГІ СЕРПІМДІ ЕМЕС ӨЗГЕРІСТЕР АЙМАҚТАРЫН ЕСЕПТЕП ШЫҒАРУ

Мақалада құрылымы бір текті емес пластикалық облыстағы қазба маңайында серпімді емес аймақтардың дамуының теориялық негіздеме мәселелері қарастырылған. Ортотропты дене үшін Мизестің жалпыланған шарттары анизатропты дене үшін алынды. Негізгі изотропиялық осьтер үшін анизатроптың параметрлері келтірілген. Шекті жағдайдағы күштің және ішкі үйкеліс коэффициентін анықтау үшін кернеудің Мор шеңбері тұрғызылды.

Тірек сөздер: жүктеме, қабыршақ, алгоритм, параметр, жылжу, тұтқырлық.

Summary

M. E. Yeskaliyev, Zh. Zh. Kozhamkulova

(Kazakh state women's pedagogical university, Almaty, Kazakhstan)

TO THE CALCULATION OF THE DEVELOPMENT OF THE FIELD OF INELASTIC DEFORMATION IN THE EARTHEN ARRAY OF COMPLEX STRUCTURE

The article deals with the problem of development of theoretical justification inelastic zones in plastically inhomogeneous medium around developing various applications. For orthotropic massif involved generalized von Mises yield criterion for anisotropic massif. Listed the appropriate characteristics of the anisotropy parameters and shear yield stress with respect to the principal axes of isotropy. Mohr voltage circles built for finding the values of the critical forces and the coefficient of internal friction.

Keywords: loading, cover, algorithm, parameters, moving, viscous.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 519.72

А. А. САДЫҚОВ, Е. Б. ЖАЙЛАУБАЕВ, К. Н. ТАЙСАРИЕВА

(Л. Н. Гумилев атындағы Еуразиялық ұлттық университеті, Астана, Қазақстан)

БЛОКТЫҚ КОДТАРДЫ АЛГЕБРАЛЫҚ ЖӘНЕ АЛГЕБРАЛЫҚ ЕМЕС ӘДІСТЕРІМЕН САЛЫСТЫРУ

Аннотация. Қазіргі күнде кодтау теориясында бір бірінен құрылымымен, қызметтік тағайындалуымен, энергетикалық тиімділігімен, қайта кодтау алгоритмімен және басқа да көптеген параметрлерімен ерекшеленетін кедергіге тұрақты кодтардың көптеген түрлі сыныптары белгілі. Олардың арасында ең көп тәжірибеде қолданылғаны сызықты блоктық және оралған (сверточный) кодтар. Сонымен қатар блоктық және оралған (сверточный) кодтарда құрастырылған каскадтық, яғни құрамдас кодтар кең көлемде қолданылады. Бұл мақалада блоктық кодтардың алгебралық және алгебралық емес әдістерімен салыстыру және оларды қайта кодтау алгоритмдері келтірілген.

Тірек сөздер: блоктық код, көпдеңгейлі декодер.

Ключевые слова: блоковой код, многопороговый декодер.

Keywords: block code, decoder multithreshold.

1. Кіріспе. Өткен мың жылдықтың соңында басталған сандық үлгідегі ақпаратты өңдеу және беру жүйелеріне қарқынды ауысу қазіргі күнде аса ауқымды болып табылуда және сандық деректердің дұрыстығына деген талаптардың өте жылдам әрі едәуір жоғарылағанын сипаттауда.

Әлбетте дискретті ақпаратты беру сенімділігінің және сапасының жоғары деңгейін қамтамасыз етудегі маңызды рөлді кедергіге тұрақты кодтаудың заманауи әдістері атқарады.

2. Зерттеу. Каскадтық емес кодтарды кодтаудың әдістерін және оларды қайта кодтау үшін пайдаланылатын алгоритмдерді жан-жақты қарастырайық.

Блоктық кодтарды қайта кодтаудың негізгі алгоритмдерін атап өтейік.

Блоктық кодтарды және оларды қайта кодтау алгоритмдерін қарастырайық. Бұл кодтарды қайта кодтау әдістерін үлкен екі топқа бөлуге болады: алгебралық және алгебралық емес. Алгебралық әдістердің негізінде [4], дискреттік өрістерде қатенің орналасуы мен мағынасын беретін теңдеулер жүйесін шешу жатыр. Бұл топқа Хэмминг кодтары, Боуз-Чоудхури-Хоквингем кодтары және Боуз-Чоудхури-Хоквингем кодтарының төменгі тармағы болып табылатын Рид-Соломон кодтары жатады.

Ең қарапайымдардың бірі, алғашқы рет 1950 ж. жазылған Хэмминг кодтары [1] болып табылады. Бұл кодтар, $p=n-k$ – кодты тексеру символдарының саны болатын $(2^p - 1, 2^p - 1 - p)$ түріндегі (n, k) параметрлі блоктық сызықты кодтардың топтамасын сипаттайды (бұл жердегі k – хабарламаның ақпараттық бөлігінің ұзындығы, n – кодталған хабарламаның ұзындығы).

Хэмминг кодтары $d = 3$ ең аз кодтық арақашықтыққа ие. Қарапайым Хэмминг кодтарынан басқа қысқартылған және кеңейтілген деп аталатын Хэмминг кодтары бар. Қысқартылған Хэмминг кодтары қандай да бір тексеруді шығару барысында (яғни, тексеру матрицасының бір қатарын өшіруден) алынады. Кеңейтілген Хэмминг кодтары кодты сөздің барлық символдарының жұптылығына қосымша тексеру жүргізу жолымен алынады [6]. Соңғы жағдайда ең аз кодтық арақашықтық $d = 4$ дейін артады. Бұл кодтардың топтамасы өте әлсіз түзету мүмкіндігіне ие және тәжірибе жүзінде жеке қолданылмайды. Бірақ каскадтық кодтау сызбасының құрамында Хэмминг кодтарын пайдалану (мысалы, Turbo Product Codes) жақсы нәтижелер алуға мүмкіндік береді.

Боуз-Чоудхури-Хоквингем кодтары [2] өзімен бірге жинақталған Хэмминг кодтарын ұсынады. Бұл еселенген қателерді түзетуге мүмкіндік беретін кодтардың сыныбы. Боуз-Чоудхури-Хоквингем кодтары Хэмминг кодтарымен салыстырғанда айтарлықтай жақсы тиімділікке ие, бірақ олардың сипаттамалары тиімділіктің соңғы мағыналарынан әлі күнге алыс. Одан басқа, n блоктың ұзындығының мағынасы үлкен болған жағдайда және кодтық жылдамдықтың бірқалыпты мағынасында бұл кодтарды қайта кодтау күрделілігі өте жоғары, сондықтан ұзындығы үлкен емес Боуз-Чоудхури-Хоквингем кодтары, Хэмминг кодтары сияқты, негізінде аса тиімді каскадты кодтардың құрамдас элементтері ретінде қолданылады.

Боуз-Чоудхури-Хоквингем кодтарының маңызды сыныбын Рид-Соломон кодтары деп аталатын кодтар құрайды. Бұл кодтардың құндылығы, t қатені түзету үшін тек қана $2t$ тексеру символдарының қажет болуы болып табылады. Бұл ерекшелік каскадты кодтау әдістерінде аталған кодтарға айтарлықтай кең көлемде қолдануға мүмкіндік берді. Одан басқа, Рид-Соломон кодтарын қайта кодтау үшін қайта кодтаудың жеткілікті тиімді алгоритмдері бар, ол көптеген тәжірибелік қосымшаларда [3], әсіресе q -лік модуляциялық жүйелерде біршама ұзын кодтарды пайдалануға мүмкіндік береді. Рид-Соломон кодтары екілік емес кодтар болып табылады.

Алгебралық әдістердің маңызды кемшіліктерінің бірі, олар тікелей жиынтықтарды жеңіл шешімдерге өткізбейтіндігінде болып табылады және бұдан басқа $d/2$ көп қателерді түзетуге мүмкіндік бермейді, бұл оларды көп деңгейлі шу болған жағдайда пайдалануға мүмкіндік бермейді.

Блоктық кодтарды қайта кодтау алгоритмінің екінші тобын қарастырайық. Алгебралық емес әдістерде қатенің орналасуын және мағынасын табудағы мақсатта, аса тура жолмен қателердің әрекеттерін табуға мүмкіндік беретін кодтау теориясының қарапайым құрылымдық ұғымдарының көмегімен қол жеткізіледі. Алгебралық емес алгоритмдердің мысалы – қателердің топтамасын түзетуге арналған Меггитт декодері, деңгейлі декодер, ұсынылған Месси және оның түрлендіруі – көпдеңгейлі декодер.

Меггиттің қайта кодтау алгоритмі 1961 ж. ұсынылды [6]. Бұл әдіс жүйелік кезеңдік кодтарды қайта кодтаудың қарапайым алгебралық емес алгоритмі болып табылады. Осы декодер ең көп шындыққа жақын декодер болып табылады. Тәжірибеде оның күрделілігі қателерді түзету санының артуымен экспоненциалды түрде өсуде. Сондықтан Меггитт декодері әдетте Хэмминг кодтары, Боуз-Чоудхури-Хоквингем кодтары сияқты үлкен емес ең аз d кодтық арақашықтықпен кодтарды қайта кодтау үшін пайдаланылады. Аталған әдістің тағы бір кемшілігі, оны алгебралық

әдістер секілді жеңіл шешімдерді қолданған жағдайда жинақтау өте қиын болып табылатындығында.

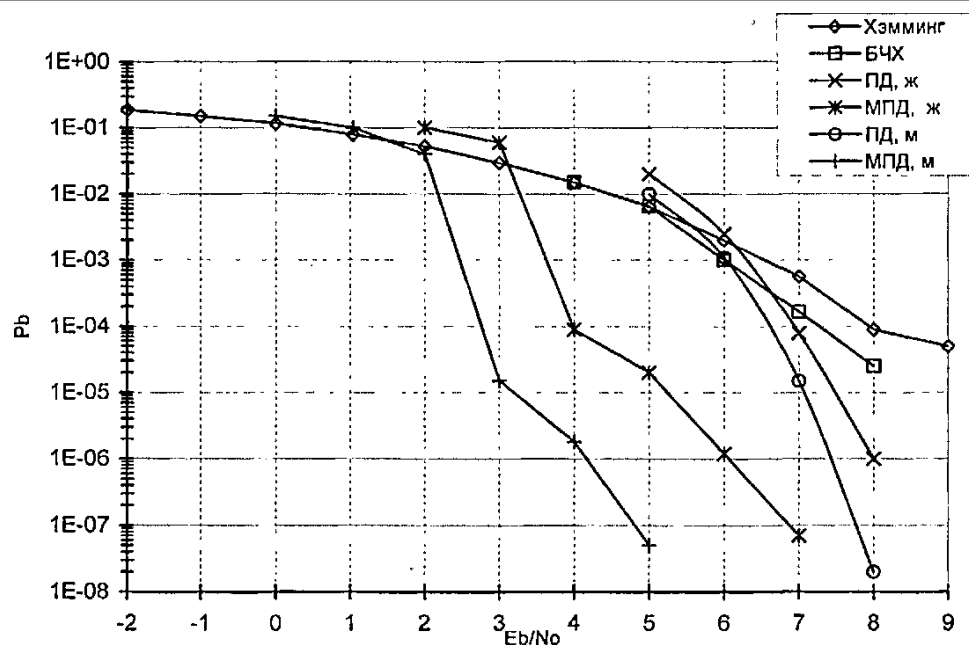
Месси деңгейлік қайта кодтау алгоритмі [7] әрбір ақпараттық символ туралы мажоритарлық шешім шығару, яғни «көпшілік бойынша дауыс беру» қағидасын пайдалануға негізделген. Бұл декодер қолайлы декодер, яғни қабылданған реттілікпен қайта кодтау қатесінің пайда болу ықтималдығын азайтатын, сол арқылы тапсыру ықтималдығы ең жоғарғы кодтық сөзді таңдаумен, ең жоғарғы шындыққа жақын декодер болып табылмайды. Оның негізгі құндылығы жүзеге асыру қарапайымдылығында болып табылады. Бұған дейін қарастырылған қайта кодтау әдістерінен айырмашылығы, деңгейлік қайта кодтау демодулятордың жеңіл шешімдерімен жұмыс жасау үшін оңай жинақтауға болады. Бұл алгоритм жоғары емес сипаттамаларға ие. Алайда түзетулерді қалыптастыруға өте қарапайым амалда және «дауыс беру» негізінде қателердің мағынасы туралы кейінгі қабылданған шешімдерде бұл әдіс орта есеппен d ең аз кодтық арақашықтықтың жартысына қарағанда қателердің көп мөлшерін айтарлықтай түзетуге мүмкіндік береді. Бұл қасиет көпдеңгейлі декодердің құрамында деңгейлік қайта кодтау сипаттамасын едәуір жақсартуға мүмкіндік береді.

Көпдеңгейлі декодер қарапайым Месси деңгейлі декодерін [3] дамыту болып табылады және кодтың ұзындығынан жүзеге асырудың сызықтық күрделілігімен өте ұзын кодтарды қайта кодтауға мүмкіндік береді. Көпдеңгейлі декодер жұмысының негізінде кең диапазонда кодтық жылдамдықтың және арнада шу деңгейінің қолайлы декодерінің шешіміне жақындауға мүмкіндік беретін қайталама қайта кодтау жатыр. Сонымен бірге қайта кодтаудың бұл алгоритмі әдеттегі деңгейлі декодердің қарапайымдылығын және жылдам әрекет етуін сақтайды, ол өз кезегінде қолданыстағы және қайта құрылатын байланыс жүйелерінде қолдану барысында талассыз артықшылық болып табылады. Одан басқа көпдеңгейлі декодер, кәдімгі деңгейлік қайта кодтау сияқты жеңіл шешімдермен жұмыс жасау үшін оңай өзгертіледі. Көпдеңгейлі декодердің маңызды ерекшеліктері ретінде бұл алгоритмнің жұмыс жасау процесінде қолайлы декодердің шешіміне жетпестен ақпараттық символдарды өзгертуді тоқтатуы мүмкін екендігін көрсетуге болады. Бұның негізгі себептерінің бірі қателердің көбею әсеріне көпдеңгейлі декодер құрамдас бөлігі болып табылатын деңгейлі декодердің маңызды зақымдануы болып табылады. Нәтижесінде қайта кодтаудың екінші және кейінгі қайталамалары негізінен бұған дейінгі қайталама декодерлерінен болған қателер топтамасының ағынымен жұмыс жасауға мәжбүр, ол барлық декодердің тиімділігін елеулі түрде төмендетеді. Бұдан шығатыны, қателердің көбею әсерінің төмендеуі көпдеңгейлі декодер жұмысын жақсартудың негізгі әдісі, яғни қайта кодтау қатесі ықтималдығының қолайлы декодердің қайта кодтау қатесінің ықтималдығына жақындауы болып табылады.

Көрсетілген ерекшелікті жою үшін әртүрлі ақпараттық символдарға қатысты тексеруге кіретін көптеген қателерді аз деңгейде қиып өтуді сипаттайтын кодтарды мұқият таңдау, сондай-ақ декодердің параметрлерін (мысалы, түрлі қайталаудағы деңгейлердің көлемі және тексеру салмағы сияқты) қалыпқа келтіру қажет.

3. Нәтижелерді талқылау. Суретте байланыс арнасында E_b/N_0 сигнал/шу қатынасынан $R \approx 1/2$ кодтық жылдамдықпен блокты кодтарды қайта кодтауға арналған аса қарапайым әдістердің P_b битке қатенің ықтималдық байланыстары ұсынылған.

Екілік симметриялық канал жұмыс жасағаннан кейін $m = 3$ -ті Хэмминг коды Меггитт декодерімен қайта кодталды. Боуз-Чоудхури-Хоквингем кодтары Хэмминг кодтарына қарағанда жақсы сипаттамаларға ие. Қарастырып отырған суретте Боуз-Чоудхури-Хоквингем коды көрсетілген. 1-ші суретте Рид-Соломон кодтары ұсынылмаған, өйткені олар екілік болып табылмайды. Қатты және жұмсақ деңгейлік декодер үшін $R = 1/2$, $d = 13$ код алынды. Жұмсақ деңгейлі декодердің нәтижесі кіріс сигналын 16 деңгейге кванттау барысында арнада Аддитивтік ақ гаустық шуммен жұмыс жасау кезінде алынды. Екілік симметриялық каналда және аддитивтік ақ гаустық шуда көпдеңгейлі декодермен жұмыс жасау кестесі $R=1/2$, $d=9$ ұзын ортогональдық код үшін келтірілген.

Блоктық кодтарды қайта кодтау сипаттамалары, $R = 1/2$

Қорытынды. Суреттен және жоғарыда келтірілген алгебралық және алгебралық емес әдістерді салыстырудан шығатыны, барлық келтірілген кодтардан және оларды қайта кодтау алгоритмдерінен блоктық кодтарды қайта кодтауға ең жақсы сипаттамаларға көпдеңгейлі декодер ие екендігі. Оның күмәнсіз құндылықтары келесілер болып табылады: ол кодтық ұзындығынан сызықты тәуелді болатын қайта кодтауды жүзеге асырудың азғантай қиындығына ие. Одан басқа, алгоритм жеңіл шешімдермен жұмыс жасау үшін оңай өзгертіледі. Бұл әдістің қажетсіз ерекшелігін, яғни кателердің көбею әсеріне зақымдануын қолданылатын кодтарды және декодердің өзінің параметрлерін қалпына келтіру арқылы жоюға болады.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Hamming R.W. Error detecting and error correcting codes // Bell Syst. Tech. J. 29, April 1960.
- 2 Боуз Р.К., Рой-Чоудхури Д.К. Об одном классе двоичных групповых кодов с исправлением ошибок // Кибернетический сборник. – 1961. – Вып. 2.
- 3 Золотарёв В.В., Овечкин Г.В. Многопороговые декодеры для каналов с предельно высоким уровнем шума // Телекоммуникации. – М., 2005. – № 9.
- 4 Форми Д. Каскадные коды / Пер. с англ. В. В. Зяблова и О. В. Попова; под ред. С. И. Самойленко. – М.: Мир, 1970.
- 5 Шеннон К.Э. Математическая теория связи // В сб. «Работы по теории информации и кибернетике». – М.: Иностранная литература, 1963.
- 6 Meggitt J.E. Error correcting codes and their implementation for data transmission systems // IRE Trans. Inf. Theory IT-7, 234-244, October 1961.
- 7 Месси Дж. Пороговое декодирование / Пер. с англ. Ю. Л. Сагаловича, под ред. Э. Л. Блоха. – М.: Мир, 1966.
- 8 Самойленко С.И., Давыдов А.А., Золотарев В.В., Третьякова Е.И. Вычислительные сети. – М.: Наука, 1981. – 277 с.

REFERENCES

- 1 Hamming R.W. Error detecting and error correcting codes. Bell Syst. Tech. J. 29, April 1960.
- 2 Bouz R.K., Roj-Choudhuri D.K. Ob odnom klasse dvoichnyh gruppovykh kodov s ispravleniem oshibok. Kiberneticheskij sbornik. 1961. Vyp. 2.
- 3 Zolotarjov V.V., Ovechkin G.V. Mnogoporogovye dekodery dlja kanalov s predel'no vysokim urovnem shuma. Telekomunikacii. M., 2005. № 9.
- 4 Forni D. Kaskadnye kody. Per. s angl. V. V. Zjablova i O. V. Popova; pod red. S. I. Samojlenko. M.: Mir, 1970.
- 5 Shannon K.E. Matematicheskaja teorija svjazi. V sb. «Raboty po teorii informacii i kibernetike». M.: Inostrannaja literatura, 1963.
- 6 Meggitt J.E. Error correcting codes and their implementation for data transmission systems. IRE Trans. Inf. Theory IT-7, 234-244, October 1961.
- 7 Messi Dzh. Porogovoe dekodirovanie. Per. s angl. Ju. L. Sagalovicha, pod red. Je. L. Bloha. M.: Mir, 1966.
- 8 Samojlenko S.I., Davydov A.A., Zolotarev V.V., Tret'jakova E.I. Vychislitel'nye seti. M.: Nauka, 1981. 277 s.

Резюме

А. А. Садыков, Е. Б. Жайлаубаев, К. Н. Тайсариева

(Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан)

СРАВНЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ МЕТОДОВ БЛОКОВЫХ КОДОВ

На сегодняшний день в теории кодирования известно много различных классов помехоустойчивых кодов, отличающихся друг от друга структурой, функциональным назначением, энергетической эффективностью, алгоритмами декодирования и многими другими параметрами. Среди них наибольшее практическое применение нашли линейные блочные и сверточные коды. Также широко применяются каскадные, то есть составные коды, построенные на блочных и/или сверточных кодах. В данной статье приведены сравнение алгебраических и неалгебраических методов блочных кодов и алгоритмы их декодирования.

Ключевые слова: блочной код, многопороговый декодер.

Summary

A. A. Sadykov, E. B. Zhajlaubaev, K. N. Tajsarieva

(Eurasian national university named after L. N. Gumilev, Astana, Kazakhstan)

COMPARISON OF METHODS ALGEBRAIC AND NON-ALGEBRAIC BLOCK CODES

Today in coding theory known many different classes of error-correcting codes, which differ from other structure, functionality, energy efficiency decoding algorithms and many other parameters. Among them, the most practical application found linear block and convolutional codes. Also widely used cascade, composite codes, built on the block and convolutional codes. In this paper presents a comparison of algebraic and nonalgebraic methods of block codes and their decoding algorithms.

Keywords: block code, decoder multithreshold.

Поступила 05.05.2014 г.

UDK 512.55

N. A. ISMAILOV

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan,
S. Demirel university, Kaskelen, Kazakhstan)

S_n -SUBMODULES OF FREE NOVIKOV ALGEBRAS

Annotation. Algebra with identities, $a \circ (b \circ c) - (a \circ b) \circ c = a \circ (c \circ b) - (a \circ c) \circ b$ $a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c)$ is called Novikov. Studied two S_n -submodules of free Novikov algebra and decomposition of them into Specht modules.

Keywords: Novikov algebras, Specht modules.

Ключевые слова: алгебра Новикова, модуль Шпехта.

Тірек сөздер: Новиков алгебрасы, Шпехт модулі.

1. Introduction. In 1950, A.I. Malcev [9] and W. Specht [11] independently used the representation theory of symmetric group to classify polynomial identities of algebraic structures. These module structures are known for many classes of algebras and well used in classifying varieties of algebras. S_n -module structure of free associative algebras, Leibniz, Zinbiel and Poisson algebras is regular module. S_n -module structure of Lie algebras is studied by Klyachko [8], Kraskiewicz and Weynman [7]. In [1] studied varieties of anti-commutative algebras. S_n -module structure of bicommutative algebras is studied in [4]. In our paper we are introduced in decomposition of some S_{n+1} -submodules of free Novikov algebras into irreducible modules (Specht modules).

Let us introduce non-associative non-commutative polynomials of degree three *rsym* (right-symmetric polynomial) and *lcom* (left-commutative polynomial) by

$$rsym = t_1(t_2t_3) - t_1(t_3t_2) - (t_1t_2)t_3 + (t_1t_3)t_2,$$

$$lcom = t_1(t_2t_3) - t_2(t_1t_3).$$

An algebra with identities $rsym = 0$ and $lcom = 0$ is called *right-Novikov*. Since we consider in our paper only right-Novikov algebras the word "right" will be omitted. So, if $A = (A, \circ)$ is a Novikov algebra with multiplication $a \circ b$, then

$$(a, b, c) = (a.c.b),$$

$$a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c)$$

for any $a, b, c \in A$. Here

$$(a, b, c) = a \circ (b \circ c) - (a \circ b) \circ c$$

is associator.

Example 1.1. Let $A = C[x]$ and $a \circ b = \frac{\partial}{\partial x}(a)b$, where $\frac{\partial}{\partial x}$ be partial derivation. Then (A, \circ) is Novikov algebra.

2. Partition and base of free Novikov algebra. In [2], [3] there was constructed base of free Novikov algebras in terms of rooted trees and so-called *r*-elements and in terms of partitions. For our future consideration, we use base in terms of partitions.

Let $n \in \mathbb{N}$ natural number and $P(n)$ is a set of partitions of n such that

$$P(n) = \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_k = n, \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 1, 1 \leq k \leq n \}$$

Shortly, we write $\alpha \vdash n$. Let Y_α is a Young diagram of a form α , i.e. a diagram with α_i boxes in

the *i*-th row. There is a one-to-one correspondence between partitions of n and Young diagrams of order n .

For a partition $\alpha \vdash n$ denote by $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_k)$ a partition of n such that

„ $\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 + 1$, „ $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i$ $i > 1$. $Y_{\tilde{\alpha}}$ is called a Novikov diagram. There is one-to-one correspondence between Young diagrams of order n and Novikov diagrams of order $n+1$



So, a Novikov diagram is obtained by Young diagram by adding to the first row one box. Call this box "nose". Present $Y_{\tilde{\alpha}}$ as disjoint union of two parts,

$$Y_{\tilde{\alpha}} = Y_{\tilde{\alpha}l} \cup Y_{\tilde{\alpha}r},$$

where $Y_{\tilde{\alpha}l}$, call it *left* part of $Y_{\tilde{\alpha}}$, is left column of $Y_{\tilde{\alpha}}$, and, $Y_{\tilde{\alpha}r}$, call it *right* part of $Y_{\tilde{\alpha}}$, is a complement of $Y_{\tilde{\alpha}l}$ in $Y_{\tilde{\alpha}}$.

$$\begin{array}{|c|} \hline Y_{\tilde{\alpha}} \\ \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \vdots \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array}
 \quad
 \begin{array}{|c|} \hline Y_{\tilde{\alpha}'} \\ \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \circ \\ \hline \bullet \\ \hline \vdots \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array}$$

Now we have to fill Novikov diagram $Y_{\tilde{\alpha}}$ by elements of Ω . Filling of boxes by elements of alphabet depends whether this box is on the left part or on the right part. Denote by $f_{i,j}$ an element of Ω in the box (i,j) that is a cross of i -th row by j -th column. The filling rule is the following

- $f_{i,1} \geq f_{i,i+1}$, if $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, $i=1,2,\dots,k-1$.
- the sequence $f_{k,2} \cdots f_{k,\alpha_k} f_{k-1,2} \cdots f_{k-1,\alpha_{k-1}} \cdots f_{1,2} \cdots f_{1,\alpha_1}, f_{1,\alpha_1+1}$ is non-decreasing.

Such filling of Novikov diagram we call *Novikov filling*. Call obtained tableaux as Novikov tableau with shape and (Novikov) filling f . Denote it by $Y_{\tilde{\alpha}f}$.

Let us given Novikov tableau $Y_{\tilde{\alpha}f}$,

$$\begin{array}{c}
 f_{1,1} f_{1,2} \cdots f_{1,\alpha_1} f_{1,\alpha_1+1} \\
 f_{2,1} f_{2,2} \cdots f_{2,\alpha_2} \\
 \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\
 f_{k,1} f_{k,2} \cdots f_{k,\alpha_k}
 \end{array}$$

Then base element of free Novikov algebra constructed by $Y_{\tilde{\alpha},f}$, is

$$e_{\alpha,f} = X_{k,f} \circ (\dots (X_{2,f} \circ X_{1,f}) \dots),$$

where

$$\begin{aligned}
 X_{i,f} &= (\dots (f_{i,1} \circ f_{i,2}) \dots) \circ f_{i,\alpha_i}, k \geq i > 1, \\
 X_{1,f} &= ((\dots (f_{1,1} \circ f_{1,2}) \dots) \circ f_{1,\alpha_1}) \circ f_{1,\alpha_1+1}.
 \end{aligned}$$

So, any base element $e_{\alpha,f}$ of free Novikov algebra of degree $n + 1$ can be characterized by a partition

$\alpha \vdash n$ and by a filling f . For partitions $\alpha = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \} \vdash n$ and $\beta = \{ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l \} \vdash n$ we say that α

dominates β , and write $\alpha \triangleright \beta$, if

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i \geq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_i$$

for all $i \geq 1$. If $i > k$ (respectively, $i > l$), then we take α_i (respectively, β_i) to be zero. Recall that

for $\alpha, \beta \vdash n$, the Kostka number $K_{\alpha\beta}$ is equal to the number of semistandard Young tableaux of shape α

and content β . Specht modules corresponding to a partition α denote S^α . For more details see [5], [6].

3. Permutation modules and free Novikov algebras. Let $F^{(n+1)}$ be multilinear part of free Novikov algebra generated by $n+1$ elements a_1, \dots, a_{n+1} . Consider $F^{(n+1)}$ as S_{n+1} -modules with a natural action

$$\sigma X(a_1, \dots, a_{n+1}) = X(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n+1)}).$$

Let $X = \sum_{\vartheta \in \text{Base}_{n+1}} \lambda_\vartheta \vartheta$ be an element of $F_{(n+1)}$, where $\lambda_\vartheta \in K$. Say that X has *degree* α and write

$\deg(X) = \alpha$, if $\lambda_u = 0$ as soon as $\deg u > \alpha$ and $\lambda_\vartheta \neq 0$, for some $\vartheta \in \text{Base}_{n+1}$ with $\deg(\vartheta) = \alpha$.

Note that

$$\deg X < \deg Y \rightarrow X < Y.$$

Proposition 3.1. For any $X, Y \in F^{(n+1)}$

$$\deg(X + Y) < \max(\deg X, \deg Y),$$

$$\deg(\lambda X) < \deg X, \lambda \in K.$$

Proof. Let

$$X = \sum_{f_1} \lambda_{f_1} e_{\gamma_1}, f_1 + \sum_{f_2} \lambda_{f_2} e_{\gamma_2}, f_2 + \dots + \sum_{f_l} \lambda_{f_l} e_{\gamma_l}, f_l$$

and

$$Y = \sum_{g_1} \lambda_{g_1} e_{\delta_1, g_1} + \sum_{g_2} \lambda_{g_2} e_{\delta_2, g_2} + \dots + \sum_{g_m} \lambda_{g_m} e_{\delta_m, g_m},$$

such that $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_l$, $\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_m$ and $\lambda_{f_1} \neq 0$, $\lambda_{g_1} \neq 0$

for some f_1 and g_1 . Then

$$\deg X = \gamma_1; \quad \deg Y = \delta_1$$

if $\deg X < \deg Y$, then

$$\max(\deg X, \deg Y) = \delta_1 = \deg(X + Y).$$

Similarly, if $\deg Y < \deg X$, then

$$\max(\deg X, \deg Y) = \gamma_1 = \deg(X + Y).$$

If $\deg X = \deg Y$ and $X \neq -Y$, then

$$\max(\deg X, \deg Y) = \delta_1 \geq \deg(X + Y).$$

If $X = -Y$, then

$$\deg(X + Y) = \deg 0 < \delta_1 = \max(\deg X, \deg Y).$$

So, for any X and Y ,

$$\deg(X + Y) \leq \max(\deg X, \deg Y).$$

It is easy to see that if $\lambda \neq 0$, then $\deg(\lambda X) = \deg X$, if $\theta = 0$ then $\deg(\theta X) \leq \deg X$.

Now we are able to construct filtration on $F^{(n+1)}$. By Proposition 3.1 for any α - n set of elements of

degree no more than α forms linear subspace. Let F_α subspace of $F^{(n+1)}$ generated by all base elements of a form $e_{\beta, f}$ such that $\alpha \geq \beta$. One can easily show that $F_{(1^n)}$ is a S_{n+1}

Theorem 3.2. $F_{(2, 1^{n-2})}$ and $F_{(1^n)}$ are S_{n+1} -modules.

Proof. To prove that F_α is a S_{n+1} module for any $\alpha \vdash n$, it is enough to show that for any

transposition $\sigma \in S_{n+1}$ we have $\sigma e_{\alpha, f} \in F_\alpha$. Then it follows $F_{(1^n)}$ is an S_{n+1} -module.

Suppose that $e_{(2, 1^{n-2}), f} = c_1 \sigma \left(\dots \left(c_{n-2} \sigma \left((a_1 \sigma b_1) \sigma b_1 \right) \right) \dots \right)$ and σ is a transposition.

If σ acts on c_1, \dots, c_{n-2} , then by left-commutativity rule, we obtain again $e_{(2, 1^{n-2}), f}$.

If σ acts on b_1, b_2 then

$$\begin{aligned} \sigma e_{(2, 1^{n-2}), f} &= c_1 \circ (\dots (a_{n-2} \circ ((a_1 \circ b_2) \circ b_1)) \dots) = \\ &\quad \text{(by right-symmetric rule)} \\ &= c_1 \sigma \left(\dots \left(c_{n-2} \sigma (a_1 \sigma (b_2 \sigma b_1)) \right) \dots \right) - c_1 \sigma \left(\dots \left(c_{n-2} \sigma (a_1 \sigma (b_1 \sigma b_2)) \right) \dots \right) \\ &\quad + c_1 \sigma \left(\dots \left(c_{n-2} \sigma ((a_1 \sigma b_1) \sigma b_2) \right) \dots \right) \end{aligned}$$

By using left-commutativity rule we obtain element of $F_{(2,1^{n-2})}$. Any other actions of o on $e_{(2,1^{n-2}),f}$ gives element of $F_{(2,1^{n-2})}$.

Theorem 3.3. *There hold following S_{n+1} - modules isomorphisms*

- a. $F_{(1^n)} \cong S^{(n+1)} \oplus S^{(n,1)}$
if $n > 3$, then $F_{(2,1^{n-2})} \cong$
- b. $2S^{(n+1)} \oplus 3S^{(n,1)} \oplus S^{(n-1,1^2)} \oplus 2S^{(n-1,2)} \oplus S^{(n,1)} \oplus S^{(n-2,3)} \oplus S^{(n-2,2,1)}$.

Proof. We decompose $F_{(1^n)}$ and $F_{(2,1^{n-2})}$ into Specht modules, first we show that $F_{(1^n)}$ is isomorphic to permutation module $M^{(n,1)}$ and $F_{(2,1^{n-2})}/F_{(1^n)}$ is isomorphic to $M^{(n-2,2,1)}$ as S_{n+1} - modules. See [10] more details about permutations modules. Let us express elements of $F_{(1^n)}$ as Novikov tableau:

$$e_{(1^n),f} = \begin{array}{c} a_n \quad a_{n+1} \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{array} = a_1 \circ (\dots (a_{n-1} \circ (a_n \circ a_{n+1})) \dots)$$

and we have

$$\begin{array}{c} a_{\sigma(n)} \quad a_{n+1} \\ a_{\sigma(n-1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(1)} \end{array} = \begin{array}{c} a_n \quad a_{n+1} \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{array}$$

for any $\sigma \in S_{n+1}$. If we consider elements $e_{(1^n),f}$ in the following form

$$\begin{array}{c} a_1 \dots a_{n-1} \quad a_n \\ a_{n+1} \end{array}$$

then we obtain an S_{n+1} -module structure which is isomorphic to per-mutation module $M^{(n,1)}$ corresponding to partition $(n,1)$. Then by using we obtain Young's $F_{(1^n)} \cong S^{n+1} \oplus S^{(n,1)}$. Now, express elements of $F_{(2,1^{n-2})}$ as Novikov tableau

$$e_{(2,1^{n-2}),f} = \begin{array}{c} a_{n-1} \quad a_n \quad a_{n+1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 \end{array} = a_1 o (\dots (a_{n-2} o (a_{n-1} o a_n) o a_{n+1})) \dots$$

and we have showed

$$\begin{array}{c} a_{n-1} \quad a_{\tau(n)} \quad a_{\tau(n+1)} \\ a_{o(n-2)} \\ \vdots \\ a_{o(1)} \end{array} = \begin{array}{c} a_{n-1} \quad a_n \quad a_{n+1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_1 \end{array}$$

for any $o, \tau \in S_{n+1}$, If we consider elements $e_{(2,1^{n-2}),f}$ in the following form

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_n & & & a_{n+1} & \\ a_{n-2} & & & & \end{matrix}$$

then we obtain an S_{n+1} -module structure which is isomorphic to permutation module $M^{(n-2,2,1)}$ corresponding to partition $(n-2,2,1)$. By Young's rule

$$M^{(n-2,2,1)} \cong \bigoplus_{\lambda \triangleright (n-2,2,1)} K_{\lambda(n-2,2,1)} S^\lambda.$$

By using the definition of Kostka numbers, we get

$$\begin{aligned} K_{(n-2,2,1)(n-2,2,1)} &= K_{(n-2,3)(n-2,2,1)} = K_{(n-1,1,1)} = K_{(n+1)} = 1, \\ K_{(n-1,2)(n-2,2,1)} &= K_{(n,1)(n-2,2,1)} = 2 \end{aligned}$$

$$\frac{F_{(2,1^{n-2})}}{F_{(1^n)}} \cong S^{n+1} \oplus 2S^{(n,1)} \oplus S^{(n-1,1^2)} \oplus 2S^{(n-1,2)} \oplus S^{(n-2,3)} \oplus S^{(n-2,2,1)}$$

Since $F_{(2,1^{n-2})} = \frac{F_{(2,1^{n-2})}}{F_{(1^n)}} \oplus F_{(1^n)}$,

$$F_{(2,1^{n-2})} \cong 2S^{(n+1)} \oplus 2S^{(n-1,2)} \oplus S^{(n-1,1^2)} \oplus 2S^{(n-1,2)} \oplus S^{(n-2,3)} \oplus S^{(n-2,2,1)}$$

REFERENCES

- 1 Bremner M. Classifying varieties of anti-commutative algebras, Nova Journal of Math., Game Theory and Algebra 4 (1996), no. 2, 119-127.
- 2 Dzhumadil'daev A.S. Lofwall C. Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities, Homology, Homotopy and Appl., 4 (2002), No.2(1), pp.165-190.
- 3 Dzhumadil'daev A.S. Codimension growth and non-Koszulity of Novikov op-eradL, Comm. Algebra., 39 (2011), no. 8, pp.2943-2952.
- 4 Dzhumadil'daev A.S., Ismailov N.A., Tulenbaev K.M. Free bicommutative algebras, Serdica Math. J., 37 (2011), No. 1, pp.25-44.
- 5 Pulton W., Harris J. Representation Theory. New York: Springer 1991 (GTM 129).
- 6 Pulton W. Young tableaux with applications to representation theory and geometry. Cambridge University Press, 1997.
- 7 Kraskiewicz W., Weyman L. Algebra of coinvariants and the action of a Coxeter element, Bayreuth Math. Schr. 63 (2001), 265-284, preprint, 1987.
- 8 Klyachko A.A. Lie elements in a tensor algebra, Sibirsk. Mat. Zh., 15 (1974), no. 6, 1296-1304.
- 9 Malcev A.I. On algebras defined by identities. Mat. Sbornik N.S. 26.(1950) 19-33
- 10 Sagan B.E. Symmetric groups: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions. New York: Springer 2001 (GTM 203)
- 11 Specht Gezetsein Ringen W. Math Z. (1950) 557-589.

Резюме

Н. А. Исмаилов

(Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
Сулеймен Демирель атындағы университеті, Қаскелең, Қазақстан)

ЕРКІН НОВИКОВ АЛГЕБРАСЫНЫҢ ІШКІ S_n -МОДУЛДЕРІ

н бүтін санының жіктелуімен анықталатын еркін Новиков алгебрасының кейбір ішкі кеңістіктері зерттелген. Олардың ішкі S_n -модулдері болатындығы дәлелденген және осы модулдерде әрбір Шпехт модулдерінің еселіктері есептелген.

Тірек сөздер: Новиков алгебрасы, Шпехт модулі.

Резюме

Н. А. Исмаилов

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
Университет им. Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан)

Sn-ПОДМОДУЛИ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ НОВИКОВА

Изучаются некоторые подпространства свободной алгебры Новикова, которые определяются разбиением числа n . Доказывается, что они являются Sn -подмодулями и вычисляется кратности каждой Шпехт модули в этих подмодулях.

Ключевые слова: алгебра Новикова, модуль Шпехта.

Поступила 05.05.2014 г.

ӘӘЖ 004:001

А. Ж. ҚАИРБАЕВА, А. М. ЖҰМАШ

(Алматы технологиялық университеті, Алматы, Қазақстан)

**ИНФОРМАТИКА МАМАНДАРЫН КӘСІБИ ДАЯРЛАУДАҒЫ
ИННОВАЦИЯЛЫҚ ТЕХНОЛОГИЯЛАР**

Аннотация. Мақалада болашақ информатика мамандарын кәсіби дайындауда ақпараттық-компьютерлік және математикалық модельдеу технологиясын қолдану арқылы олардың кәсіби қызметінде ақпараттық-компьютерлік біліктіліктер жүйесін қалыптастыру мәселесі қарастырылған.

Тірек сөздер: ақпараттық-компьютерлік, ақпараттық-компьютерлік және математикалық модельдеу технологиясы, жаңа технология.

Ключевые слова: информационно-компьютерный, технология математического и информационно-компьютерного моделирования, инновационные технологии.

Keywords: information and computer, technology and mathematical information and computer modeling, innovative technology.

XXI ғасырда болып жатқан білім мен ғылым саласындағы түбегейлі өзгерістер болашақ мұғалімдерді даярлауда, білім беру жүйесінің алдына жаңа міндеттер мен талаптар қойылып отырғаны белгілі. Елбасымыз Н. Ә. Назарбаевтың 2012 жылғы 27 қаңтардағы «Әлеуметтік-экономикалық жаңғырту – Қазақстан дамуының басты бағыты» атты жолдауындағы: Білім беру жүйесін жаңғырту барысында біз үшін келесі іс-шараларды жүзеге асырудың маңызы зор. Біріншіден, оқыту үдерісіне қазіргі заманғы әдістемелер мен технологияларды енгізу. Екіншіден, педагогтар құрамының сапасын арттырудың маңызы зор. Үшіншіден, біліктілікті бекітудің тәуелсіз жүйесін құру қажет, XXI ғасырда білім беру ісін дамыта білмеген мемлекет құрдымға кетері хақ. Сондықтан біз болашақта жоғары технологиялық және біліктілікті өнеркәсіп мамандарының шоғырын қалыптастыруымыз қажет. Бұл орайда, Қазақстандағы жоғары оқу орындарының міндеті – әлемдік стандартқа сай білім беру, ал олардан алынған дипломдар дүние жүзі мойындайтындай болуы қажет. Біз әрбір Қазақстан азаматтарының дұрыс мүмкіндіктермен жоғары білім алуына кепілдік беруіміз қажет», – деген болатын. Жоғары білім алу, ол тек қана маманға білім, іскерлік және дағды ғана емес, сонымен қатар индивид қалыптастыру болып табылады. Яғни, болашақ маман жеке тұлға ретінде өзін-өзі дамыту керек [1].

Информатика мамандарын иновациялық технология негізінде даярлау үшін оларда ең алдымен практикалық іс-әрекет барысында пайда болатын мәселелерді формальды сипаттау дағдыларын, яғни ақпараттық-модульдік әдістер туралы кәсіби білім, білік және дағдылар жүйесін қалыптастыруды қажет етеді. Ақпараттық проблеманың пайда болуы, ең алдымен, әлеуметтік-

экономикалық факторларға байланысты және бұл проблемаларды техникалық құралдармен де, жеке адамның, топтасқан қауымның қоршаған ортаға көзқарасын, қатынасын қайта бағдарлау жолымен де шешуге болады. Осы тұрғыда болашақ мұғалімдердің ақпараттық ой-өрісін, мәдениетін дамыту және олардың ақпараттық технологияларды меңгерумен қатар оларды жасау іскерлігін, дағдыларын қалыптастыру проблемасының көкейкестілігі күннен-күнге арта түсуде. Болашақ маман ақыл-ойын, ұлттық таным-сенімін және бойындағы шығармашылықты дамытып, жеке тұлғаны қалыптастыруда жаңа технологиялық іс-әрекеттердің алатын орны ерекше болады.

Инновация ұғымы орыс ғалымдары В. И. Загвязинский, Лазерова, Днепрованың еңбектерінде 90-жылдардың бас кезінде пайда бола бастады. «Инновация» термині латын тілінен алынған, ол «жаңару, өзгеру» дегенді білдіреді. Бұл түсінік ХІХ ғасырдағы зерттеулерде пайда болып, белгілі бір мәдениеттің кейбір элементтердің бірінен екіншісіне енгізу дегенді білдіреді. «Инновациялық технологиялар» тіркесі бүгінгі күні педагогикада, оқу-тәрбие үрдісінде ең жиі қолданылатын ұғым болып отыр [2].

Жаңа технологияларды меңгеру болашақ мұғалімнің зияткерлік, кәсіптік, адамгершілік, рухани, азаматтық және басқа да көптеген адами келбетінің қалыптасуына игі әсерін тигізеді, өзін-өзі дамытып, оқу үрдісін ұйымдастыруына көмектеседі. Жаңа технология ұғымы қолданымда құлағымызға жиі естіліп жүргенімен, оның іс-әрекеттегі әдіснамасы бұлдырлау. Аталған бұлдырлықтың басты себеп-салдары төмендегідей:

- бір технологияны меңгеру үдерісінде қабылдаушы тұлғаның психологиялық жадынамасының мүмкіндігі ескерілмей келеді;
- технологияға жетілу үшін классикалық және инновацияға қызмет етер деген әдістерді саналы меңгеру парқын елемей кездеседі;
- технологияның бір ғана нұсқасын меңгерушілікпен шектелуінің себептерін ашуға мән бермеудің байқалуы;
- меңгерген технологияны сыни пайыммен зерделеп, іс-әрекет үдерісінде өнімді нәтижеге апару-апармау барысын бағамдаудың жетімсіздігі.

Қазіргі таңда инновациялық технологиялардың әдістемелік негіздері жеткілікті әзірленген. Оларды пайдалану барысында Республикамызда адам, оның өмірі, құқығы мен бостандығы – жоғары құндылық болып саналады. Қазақстан Республикасының негізгі заңы – Қазақстан Республикасының Конституциясын басшылыққа алу [3].

Болашақ информатика мамандарын кәсіби даярлаудағы инновациялық технологияның түрлі әдіс-тәсілдері кеңінен қолданылып келеді. Болашақ мамандарға қойылатын негізгі талаптардың бірі – олардың кез келген жағдайда әртүрлі ақпараттармен жұмыс істей білу іскерліктерінің болуы. Бұл орайда білім алушы өзінің практикалық әрекетінде алдына қойып отырған мәселенің шешімін анықтап, оның нәтижесін көруі үшін ізденеді, игерген теориялық білімінің маңызын байқайды, оны есіне түсіреді. Себебі жаңа педагогикалық технологиялар болашақ информатика мамандарын әлеуметтік немесе кәсіби мамандығына байланысты маңызды проблемалардың туындап отыруын талап етеді. Осындай мәселелер болашақ маманның танымдық, рухани ой-өрісін дамытуға, өмірдің түрлі жағдайына икемделуіне мүмкіндік жасау қажет. Яғни мәселе мен оның практикалық тұрғыдан іске асуының қарым-қатынасы болашақ мұғалімдердің кәсіби білімін жетілдіруде жаңа педагогикалық технологиялардың білім беру жүйесіндегі басты ерекшелігін көрсетеді.

Қазіргі таңда болашақ мамандардың кәсіби білімін жетілдіруде маманның әлеуметтік және кәсіби құзыреттілігін қалыптастыру өте маңызды. Себебі жоғары оқу орнын бітірген жас маман бірден кездескен қиыншылықтар мен проблемаларды тәжірибесі аз болғандықтан шеше алмайды. Сонымен қатар болашақ маманның сыни ойлау қабілеттері де қалыптаса қоймайды. Шынында да, болашақ маманның кәсіби құзыреттілігі бәсекеге қабілеттілігімен айқындалады. Бәсекеге түскен маман, қандай жағдай болмасын, соған бейімделіп, өзінің мәселені шеше алатындай қабілетін, мүмкіндігін, икемділігін көрсете алу қажет. Сондықтан да қазіргі кезде болашақ мұғалім, болашақ маман дайындау, бұл қоғам үшін, еліміз үшін үлкен жауапкершілік әкеліп отыр. Болашақ информатика мамандарын инновациялық, яғни жаңа технология арқылы оқытуға байланысты, маман деңгейі соған сай болуы керек:

- 1) Мұғалім педагогикалық этикаға сай болуға;
- 2) Мұғалім мемлекеттік стандартты білуге;
- 3) Мұғалім әдістемелік сабақ талдауды меңгеру керек;

- 4) Мұғалім педагогикалық озық тәжірибесімен танысуы;
- 5) Оқытудың тиімді жолдарын қолдану;
- 6) Педагогикалық жөні жайлы хабардар болу керек [4].

Қорыта айтқанда, білім беру жүйесіндегі инновацияны енгізу, қабылдау мен жетілдірудегі тоқтаусыз үрдіс ретінде, күнделікті білім беру қызметінің бөлігі ретінде қарауды талап етеді. Білім беру жүйесі құрылымының өзі қоғам үшін, өмір сүріп жатқан біз үшін екенін түсіну керек. Сондықтан да қоғамда болып жатқан өзгерістер, білім беру жүйесінде жаңалыққа тартады. Болашақ маман дайындау, бұл әрине мұғалімге байланысты. Мұғалім ол тек мектепте ғана емес, ол бүкіл елдің ұстазы болып табылады. Оқушыларды оқытуда мұғалімнің негізгі міндеті – ол сапалы да білікті маман дайындау. Әрбір оқушы өзінің жинақтаған білімі мен біліктілігін болашақта іске асыруы қажет.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Қазақстан Республикасының Президентінің Жолдауы 2012 жыл «Әлеуметтік-экономикалық жаңғырту – Қазақстан дамуының басты бағыты».
- 2 <http://kk.wikipedia.org/>
- 3 Қазақстан Республикасының білім беру жүйесін дамытудың 2015 жылға дейінгі білім беруді дамыту тұжырымдамасы. – Алматы: Ғылым, 1990.
- 4 Қазақстан Республикасының «Білім туралы» Заңы. – Астана, 2004.

REFERENCES

- 1 Poslanie Prezidenta Respubliki Kazakhstan 2012 god «Social'no ekonomicheskaya modernizaciya – glavnyj vector razvitiya Kazakhstan» (in Russ).
- 2 <http://kk.wikipedia.org>
- 3 Konceptsiya razvitiya obrazovaniya Respubliki Kazakhstan do 2015 goda. – Almaty: Nauka, 1990 (in Russ).
- 4 Zakon Respubliki Kazakhstan «Ob obrazovanii». – Astana, 2004 (in Russ).

Резюме

А. Ж. Каирбаева, А. М. Жумаиш

(Алматынський технологический университет, Алматы, Қазақстан)

ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРИ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКЕ СПЕЦИАЛИСТОВ ИНФОРМАТИКИ

В статье был рассмотрен вопрос формирования в профессиональной деятельности будущих преподавателей системы информационно-компьютерных квалификационныхностей, при использовании технологий математического и информационно-компьютерного моделирования в их профессиональной подготовке.

Ключевые слова: информационно-компьютерный, технология математического и информационно-компьютерного моделирования, инновационные технологии.

Summary

A. Zh. Kairbaeva, A. M. Zhumash

(Almaty technological university, Almaty, Kazakhstan)

INNOVATIVE TECHNOLOGY IN VOCATIONAL TRAINING INFORMATION

This article was considered in the formation of future professional activity of our faculty information and computer-qualification, with the use of technology and information and mathematical simulation in their training. And also, forming important social and professional competence of the expert at improving vocational education of future specialists. The learning process is based on the methodology of innovative technologies in the professional preparation of specialists Informatics.

Keywords: information and computer, technology and mathematical information and computer modeling, innovative technology.

Поступила 27.03.2014 г.

Ж. Ж. ҚОЖАМҚҰЛОВА, А. Н. НҮСІПБЕКОВА

(Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан)

ИНТЕРБЕЛСЕНДІ ӘДІСТЕР АРҚЫЛЫ ЖОҒАРЫ ОҚУ ОРНЫНДА ОҚЫТУ

Аннотация. Мақалада жоғары оқу орнында оқытудың интербелсенді әдістері мен формалары қарастырылған. Сонымен бірге мақалада заманауи технологиялардың дамуы негізінде әртүрлі интербелсенді әдістерді енгізу арқылы оқытушылардың рөлін түбегейлі өзгерту аспектілері келтірілген. Оқытушыларды тек ақыл-ойды дамытушы ғана емес студенттердің жеке шығармашылық жұмыстарының жетекшісі ретінде көрсету жолдары қарастырылған.

Тірек сөздер: интерактивті оқыту түрлері, интерактивті оқыту әдістері, оқытушы рөлі, жаңа оқыту технологиялары.

Ключевые слова: формы интерактивного обучения, методы интерактивного обучения, роль преподавателей, современные технологии.

Keywords: methods, interactive the forms, the role of teachers, modern technology.

Қазіргі таңдағы технологиялардың дамыған кезеңінде инновациялық әдістермен оқытудың ақпараттық технологияларын қолдану арқылы студенттердің ойлау қабілетін арттырып, ізденушілігін дамыту өзекті мәселелердің бірі болып табылады. Бұл ауқымды мәселер жөнінде Қазақстан Республикасының Президенті Н. Ә. Назарбаев 2012 жылғы Қазақстан халқына «Әлеуметтік-экономикалық жаңғырту – Қазақстан дамуының басты бағыты» атты Жолдауында «оқыту жүйесіне заманауи әдістемелер мен технологияларды ендіру керек» деп бекер айтпаған болар [1]. Нәтижеге бағытталған білім оқу процесінде студентті бірінші орынға шығаруды талап етеді. Ал бұл ұстаным әрбір оқытушыға студенттерді белсендіретін оқу/оқыту әдістемелерін қолдануды міндеттейді, өйткені бүгінгі күні оқу процесі бұрынғыдай «үйрету», «оқыту», «беру» емес, оның орнына «ұйымдастыру», «жағдай жасау», «бағыт-бағдар беру», «басқару» сияқты ұғымдардан тұрады. Осы себептерге байланысты жоғары оқу орнында оқу процесінің негізін интербелсенді әдістемелер құрауы керек, әрбір оқытушы интербелсенді құралдар мен тәсілдерді өзінің әдістемесінің төрінен көруі қажет.

Интербелсенді оқу/оқыту бірінші мезетте білім игеру процесіне қатысушылардың тиімді қарым-қатынасына негізделеді. Ағылшын тілінен келген «интерактив» сөзі де осы ұғымды білдіреді: «inter» дегеніміз «өзара» мағынасында, ал «akt» – «әрекет жасау» дегенді білдіреді. Басқаша айтқанда, «интербелсенді» дегеніміз біреумен қоян-қолтық қарым-қатынаста болу, онымен бірлесіп әрекет жасау, диалог құру. «Интербелсенді» дегеніміз – диалог арқылы үйрену/үйрету, яғни «үйретуші-үйренуші», «үйренуші-үйренуші», «үйренуші-өзімен өзі» форматтарында жасаған қарым-қатынас («әңгіме», «сұхбат», «бірлескен әрекеттер»).

Интербелсенді оқыту білім игеру процесін келесідей ұйымдастыруға ынталы:

- барлық үйренушілерге бірлескен таным процесіне белсенді араласуға мүмкіндік жасау;
- әрбір үйренушінің өзінің үйренгені мен өз білімі туралы түсініктерін ортаға салып, бірлесіп талқылап, олар туралы ой толғануына мүмкіндік жасау;
- үйренушілер білімді өздігімен құрастыратын орта құру;
- терең ойлану, жеке рефлексиялық қабілеттерді дамыту;
- өз идеялары мен әрекеттерін талдау және оларға баға беру;
- оқу барысында жеке басының құндылықтары мен сенімдерін (қалыптастырып, белсенді өмірлік бағытын (көзқарас, дүниетаным) ұстану);
- пікірталастарға қатысып, өз ойы мен пікірін дәлелдеу.

Бұл тұлғаның тұрақты қасиеттеріне айналып, тек студенттердің аудиториясында ғана орын алып қана қоймай, сонымен бірге өмірдің басқа да жақтарынан тиянақты түрде көрінеді [2, 33-34-б.]. Бұдан жасайтын қорытынды жоғары оқу орындарында интербелсенді оқу/оқыту білім игеру процесін ұйымдастыруда студенттердің барлығын дәріс, семинар және өзіндік жұмыс сабақтарында бірлескен таным процесіне белсенді араласуға, жеке студенттің өзінің үйренгені мен білімін ортаға

салып талқылау, өз ойларын талдауға, пікірталас, өз пікірін дәлелдеу және т.б. негізде ұйымдас-тыруға болады.

Интербелсенді оқу/оқыту-әрекет көмегімен және әрекет арқылы үйрену/үйрету, ал мұндай ұстаным қомақты нәтижелерге жеткізетін ең тиімді жүйе деп есептелінеді, өйткені адамның жадында бірінші мезетте тек өзінің әрекеттері мен өз қолымен жасағаны ғана қалады. Кезінде көне қытай ғұламасы Конфуций былай деген екен: «Маған айтып берсең – ұмытып қаламын, көрсетсең – есте сақтармын, ал өзіме жасатсаң – үйренемін!». Сол себепті де интербелсенді оқу/оқыту студенттердің оқу процесіндегі белсенді әрекеттерін үйренудің негізгі құралдары мен тәсілдері ретінде таниды. Сондықтан да интербелсенді оқу/оқыту оқу процесінің тиімділігі мен нәтижелілігін студенттердің есте сақтау дәрежесімен өлшенбей, олардың әрекеттерімен бағалайды, тек әрекет арқылы ғана үйрену ықтимал деген қағида ұстанады.

Үйрену/үйрету тәсілдері көп-ақ. Алайда олардың қайсысы тиімділігі тұрғысынан жоғары деңгейде? Төменде берілген Н. Сандерстің кестесінде оқу/оқытудың ең тиімді әдіс-тәсілдері келтірілген.

Оқу/оқытудың кейбір тәсілдерін қолданғанда мәліметтің 24 сағат ішінде есте сақталуы (Н. Сандерстің кестесі)

Тәсілдер	Есте сақтау мөлшері, %
Лекция	5
Оқу (мәтін, кітап оқу)	10
Аудио, видео құралдарын қолдану	15
Көрсету (жобалар, кестелер, басқа да көрнекіліктер)	30
Пікірталас	50
Практикалық іс-әрекеттер	75
Үйренген білімді дереу қолдану, басқаларды үйрету	90

Назар аударғандай, монологқа құрылған немесе диктант ретінде түсінілетін лекцияның тиімділігі өте төмен болады. Бұған қоса «диагональ» бойынша немесе еш белсенді әрекетсіз мәтін оқу да кереметтей нәтиже бермейді. Алайда оқу-белсенді әрі әлеуметтік әрекет. Студент тек ақпарат иемдену үшін ғана оқымай, берілген мағлұматтарды түсініп, талдап, олардың негізінде жаңа ой, идея құрастырып оларды бағалау қажет. Ол өз ұстанымдарын әр уақытта басқалармен бөлісуге мүдделі, өйткені білім игеру бірлескен әрекеттерден толығы түседі.

Интерактивті әдістерді қолдану арқылы интербелсенді дәріс, семинар сабақтарында студенттердің белсенділігін арттыру тиімді екендігі бәрімізге белгілі. Қазіргі кезеңдегі технологиялардың дамуы барысында ұстаздардың рөлін түбегейлі өзгерту мүмкіндігі туды, ұстаз тек қана білімді алып, жүруші ғана емес, сонымен қатар студенттердің өзіндік шығармашылық жұмысының жетекшісі.

Интерактивті әдістерге: топпен жұмыс, пікір-таластар, проблемалық шығарма әдістері, презентациялар, рөлдік ойындар, блиц-сұрақтар әдісі, кейс-стадийлер, миға шабуыл әдісі, викториналар, мини зерттеулер, іскерлік ойындар, инсерт әдісі, анкета алу әдісі және т.б. жатады.

Көрсетілген интербелсенді әдістерді қолдану арқылы жоғары оқу орындарындағы дәріс, семинар (практикалық), студенттің өзіндік жұмыстар (СӨЖ) сабағын жаңаша ұйымдастыру, оқытушының рөлі мен қызметінің артуына жағдай жасау, ғылыми-теориялық, педагогикалық және психологиялық зерттеулерге сүйене отырып, студенттерді елжандылыққа, саналылыққа, адамгершілікке, еңбексүйгіштікке тәрбиелеу.

Енді, біз ЖОО интербелсенді сабақтарын өту жолдарына тоқталмас бұрын дәріс сабағына тоқталсақ, дәріс (лекция) сабағы дегеніміз – жаңа материалдағы негізгі теориялық мәселелердің мазмұны терең, жүйелі, бірізділікпен ашып көрсетіледі. Сондай-ақ дәрісте тың, маңызды жаңалықтар, түрлі көзқарастар мен даулы мәселелер нанымды түрде баяндалады. Дәріс тақырыбы неғұрлым айқын, проблемалы, пікірсайыс түрінде өтілсе, қойылған сұрақтарға дайын жауап болмай, оны студент өзінен ізденіп тапса, сабақтың тиімділігі жоғары болады [3, 10 б.].

Заманауи талаптарға сай соңғы жылдары ақпараттық технологиялардың білім беру үрдісінде кең құлаш жаюы мен жаһандану заманында оқыту әдісі мен тәсілдері едәуір өзгерістерге ұшырап,

жаңашыл әдістер көптеп қолданылуда. Алайда білімді игеру процесін белсендіруде, студенттердің қызығушылығы мен көтеріңкі мотивациясын тудыруда, кері байланысты қолдануда, эмоционалды қарым-қатынас құруда монологқа негізделген дәстүрлі дәрістің мүмкіншіліктері шектеулі. Дәстүрлі «білім беру» өз мақсаты мен мағынасын нақты белгіленген білім жиынтығын игерумен шектейді. Дәстүрлі дәрісте оқытушы ақпараттың негізгі көзі болғандықтан студенттер көбінесе оның айтқанын көшірумен болады. Мұндай әрекеттер студенттердің дәріс материалын терең меңгеруіне жол бермейді: студенттер көп жағдайда өздерінің үйренуін дәріс мәліметтерін есте сақтау, қайталау мен жаттығу әрекеттерімен ғана шектейді. Ал инновациялық көзқарас оқу (үйренудің) негізін тек пәндер ғана емес, ойлау мен рефлексияға негізделген интербелсенді әдістер құрауы керек деп түсінеді. Интербелсенді әдістер педагогикалық тәсілдердің өзгеруіне алып келіп, білім алушылардың өздік және өзіндік дамуына, олардың өз мүмкіншіліктері мен ұстанған құндылықтарын түсінуге және бағалауға жетелейді. Интербелсенді әдістер мен тәсілдерді қолдану дәстүрлі дәрісті студенттердің белсенді әрекеттерінен құралған қызықты әрі тартымды танымдық процеске айналдырады. Интербелсенді әдіс бойынша дәрісте ақпарат дайын күйінде берілмейді. Интербелсенді әдіс студенттерге қандай да бір тақырып немесе мәлімет бойынша бірлескен әрекеттер негізінде өзіндік пікір мен көзқарас қалыптастыруға бағытталады.

Дәріс сабағын оқытуда қолданылатын әдістерге әңгімелеу әдісі, түсіндіру әдісі, баяндау әдісі, әңгімелесу әдісі, проблемалық баяндау әдісі және тағы басқалар жатады. Жалпы жоғары оқу орындарында «Универ жүйесіндегі» алдын ала оқу жүктемесі негізінде бөлінген пән бойынша ОӘК-ні, яғни сол пәнінің дәріс, семинар, студенттің өзіндік жұмыс, тест тапсырмалары, емтихан, реферат тақырыптары, пәнге байланысты барлық материалдары сайтқа салынып, онымен топ студенттерінің әрбірі пайдалана алады. Барлық материалдармен таныс студент дәріс сабағында, оқытушының баяндау, әңгімелеу әдістері арқылы олардың пәнге деген қызығушылығын тудырмауы мүмкін, сондықтан оны белсенді, қызықты өту үшін оқытушы дәстүрлі емес әдістерді: топқа бөлу, тақырыпқа байланысты өзекті сұрақтар қою, пікірталас әдістерін қоса қолданса аудиторияның барлығы толық қамтылып, оқытушы мен студент, студент пен студент арасында қатынас болып, әрбір студент өз ойын толық жеткізе алады, бір-бірімен пікір таластыра алады. Сонда ғана дәріс сабағы қарым-қатынас үрдісіне негізделген оқыту – интерактивті әдістер арқылы студенттің белсенділігін арттырып, сабаққа қызығушылығы мен өз бетінше ізденушілігі арқасында жаңа дерек көздерімен жұмыс жасауға және оның белгілі бір тақырыпқа байланысты шығармашылық жұмыс жасауына жол ашады. Ал проблемалық баяндауда аудиторияға проблемалық ситуация жасау арқылы, проблемалық сұрақтар мен тапсырмалар қою, танымдық тапсырмалар беру және оған студенттің жауап беруге немесе шешуге (әрекет жасауы) тырысуы жатады. Бұл арқылы студенттердің танымдық-шығармашылық қабілеттерінің дамуына ықпал жасап, проблемалық ситуацияда игерген білімі мен біліктің нәтижесінде ол жаңа әдістерді немесе жаңаны іздеуге, талпыныс жасайды.

Дәріс сабағында оқыту үрдісі тиімді болу үшін 3 жақты қарым-қатынас болуы керек, олар: ақпараттық (ақпараттың берілу және сақталуы), интерактивті (біріккен іс-әрекетте өзара әсердің ұйымдастырылуы), перцентивті оқыту (адамның басқа адамды қабылдауы және түсінуі).

Интербелсенді дәріс сабағында оқытудың интерактивтік тәсілдеріне: ашық сұрақтарды қою іскерлігі (біріккен дұрыс жауапқа алдын ала бағытталған жауапта емес, мәселе бойынша әртүрлі көзқарастарды айтуы); оқытушы дәріс беріп қана қоймай сонымен бірге студенттерге сабақ барысында «дұрыс» және «дұрыс емес» көзқарастарын батыл, қорқынышсыз айтуларына мүмкіндік беретін байтарап ретінде анықтауы, сабақтың қалай және неге жүзеге асатының түсінуге көмек беретін сабақты өзіндік талдауға дайындық, қай жерде өзара әрекеттесу «тоқырап» қалды, бұл қандай жағдаймен байланысты болады; сабақтың өту жағдайын, оның нәтижелігін қадағалауға мүмкіндік беретін ескертулерді тіркеу болып табылады. Дәріс сабағында теориялық білімді игерту мен жаңғырту және жаңа жағдайға іс жүзінде лайықтап қолдануға үйреткенде ғана студенттердің алған білімі мен біліктілігі шынайы да нақтылы қалыптасады. Осындай жолмен қалыптасқан білім мен біліктіліктің танымдық маңызы да зор деген ойдамыз.

Жоғары оқу орындарында интербелсенді семинар (практикалық) сабағын өтуде оқыту әдістерінің интерактивті түрлерін пайдалануға болады. Интерактивті оқыту әдістерінің түрлері: топтармен жұмыс, пікірталас, оқу пікірсайысы; «Сократтық ойындар», ойындық жобалау; ми шабуылы, дөңгелек үстел, конференция сабақ және тағы басқалар жатады [1, 163 б.]. Көрсетілген интерак-

тивті әдістердің кейбірінің семинар (практикалық) сабақта қолданылуына тоқталып өтсек. Интербелсенді семинар сабағында интерактивті оқыту әдістерін қолданудың негізгі мақсаты оқытылып отырған курстағы мәселелерді студенттердің меңгеру деңгейін, олардың ұстанымдары қаншалықты нық екендігін анықтау және бүгінгі күндегі күрделі, өзекті мәселелерді талдауға, өзіндік пікір айтуға, іздене білу қабілеттерін шыңдау болып табылады.

Белсенді әдістердің семинар сабақтарында пайдаланылатын тиімді түрлеріне: пікірсайыс семинар, семинар пресс-конференция болып табылады. Пікірсайыс семинардың бірнеше түрі бар, олар: құрылымдық немесе регламенттік пікірсайыс, ойындық модельдеу элементтермен сипатталатын пікірсайыс, жобалық мәселені талқылау болып бөлінеді. Жобалық мәселені талқылау пікірсайыс семинарға қатысатын әрбір студент үшін, топтың алдын ала және тиянақты дайындығын қажет етеді. Сабақтың нәтижелі, әрі қызықты болып өтуі үшін оқытушы семинардың мәселелері бойынша алдын ала оппоненттерді дайындап қояды. Пікірсайыс барысында оппонент студенттердің дайындалған мәселелерді шешу үшін студенттердің тақырыптың мәселелері бойынша толық дайындалуларына тура келеді.

Пікірсайыс семинарында тақырыптың көтеріп отырған мәселелері бойынша алдын ала дайындалған тезистер ұсынуға болады. Сондықтан студенттердің семинарда жұмыс жасауының белсенділігін арттыру үшін дискуссиялық мәселе бойынша екі түрлі пікірлерді ұсынатын баяндамалар, яғни біріне-бірі қарама қарсы баяндама жасауы туралы тапсырма берілуі қажет. Пікірсайыс семинарына дайындықтың негізгі кезеңі, басқа да семинар түрлеріне дайындық секілді студенттердің өз бетінше алғашқы дерек көздерімен және семинарға ұсынылатын әдебиеттермен тыңғылықты жұмыс жасауы болып табылады. Пікірсайыс семинар сабағында жоспар бойынша қаралатын сұрақтардан да басқа жақсы құрастырылған және нақты шиеленіс тудыратын мәселеге байланысты қосымша сұрақтар бойынша студенттің ізденуі мен дайындалуына жол салады. Пікірсайыс семинар сабағының өту барысына тоқталсақ, ол алдымен диспут арқылы, яғни диспут – дегеніміз ол ойлардың қақтығысы, яғни белгілі тақырып бойынша топтарға бөлінген студенттер өз көзқарасын қорғап шығу болып табылады. Пікірсайыстың қызықты өтуі баяндамашыға байланысты, егер ол нақты мәселені дәл айтып, қажетті аргументтермен дәлелдей алса, аудиторияда көтеріліп отырған мәселені шешуге байланысты қызығушылықтарын танытады. Ал студент пікірсайыстың барысын бақылап, егер теориялық тұрғыдан қателіктер болса бірден жөндеп отыруға міндетті. Көңіл аударатын мәселе пікірлердің қысқалығына, мазмұндылығына және образдығына мән берілуі керек. Пікірсайыстың дұрыс бағытталуына нақты және уақытында қойылатын қосымша сұрақтарға да байланысты. Пікірсайыс семинар сабағына байланысты оқытушының сұрақтары: нақтылық, мағыналық және сұрақтың мәселеге байланыстылығы сияқты ережелерді ұстануы керек. Оқытушы пікірсайыс семинар кезінде айтылған дәлелдерге және идеяларға қайта орала отырып, қорытынды жасап, балдық жүйемен бағалайды.

Сонымен интербелсенді семинар сабағында оқытушы интерактивті әдістерді қолдану арқылы студенттің еркін ойлануына, ақыл-ойын дамытуға, шығармашылық белсенділігін арттыруға, ұжымдық іс-әрекетке, тіл байлығын жетілдіруге, жан-жақты ізденушілігін арттыруға жағдай жасайды. Ал оқытушы үшін тиімділігі, ол түрлі әдістерді пайдалану арқылы сабақтың мәнін терең ашуға, аудиторияны толық қамтуға, әр студенттің білім деңгейін анықтауға, оларды ізденіске, шығармашылыққа, өз бетінше жұмыс істеуге және барлығын бағалауға болады. Интербелсенді әдістер білім алушылардың өздік және өзіндік дамуына, олардың өз мүмкіншіліктері мен ұстанған құндылықтарын түсінуге және бағалауға жетелейді.

Елбасы Н. Ә. Назарбаев: «...Адамзат үшін ХХІ ғасыр жаңа технологиялардың ғасыры болмақ, ал осы жаңа технологияларды жүзеге асырып, өмірге енгізу, игеру және жетілдіру – бүгінгі жас ұрпақ, сіздердің еншілеріңіз... Ал жас ұрпақтың тағдыры – ұстаздардың қолында» деп атап көрсеткендей, бүгінгі ұстаздар қауымы алдында үлкен міндет жүктелгенін байқаймыз. Егер өткен уақыттарда таным процесін біз «білім беру», «оқыту», «үйрету» деп түсінсек, бүгінгі уақытта бұл түсініктерді «білім алу/игеру», «оқу», «үйрену» деп өзгерту керек. Мұндай ұстаным бүгінгі күні әлемде жүріп жатқан жоғары оқу жүйесінде Балонья үдерісінің идеяларын толық қамтып, өзінің мазмұнын осы үдеріспен байланыстыруы ЖОО-ның жұмыстарына елеулі өзгерістер енгізуді талап етеді.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Назарбаев Н.Ә. Әлеуметтік-экономикалық жаңғырту – Қазақстан дамуының басты бағыты. Қазақстан халқына Жолдау // Егемен Қазақстан, 27 қаңтар 2012 жыл.
- 2 Әлімов А.Қ. Интербелсенді әдістемені ЖОО-да қолдану мәселелері. – Алматы, 2013. – 448 б.
- 3 Аймухамбетова С.А. Интерактивные методы учебной деятельности // Қазақстан жоғарғы мектебі. – 2010. – № 1(83).

REFERENCES

- 1 Nazarbaev N.Ә. Әлеуметтік-экономикалық жаңғырту – Қазақстан дамуының басты бағыты. Қазақстан халқына Жолдау. Егемен Қазақстан, 27 қаңтар 2012 жыл.
- 2 Әлімов А.Қ. Interbelsendi әдістемені zhoo-da қолдану мәселелері. Almaty, 2013. 448 b.
- 3 Ajmuhambetova S.A. Interaktivnye metody uchebnoj dejatel'nosti. Қазақстан жоғарғы мектебі. 2010. № 1(83).

Резюме

Ж. Ж. Қожамқұлова, А. Н. Нусипбекова

(Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан)

ОБУЧЕНИЕ В ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРАКТИВНЫХ МЕТОДОВ

В статье рассматриваются формы и методы интерактивного обучения, которые применяются на занятиях со студентами. Раскрываются такие аспекты, как появление возможности основательно изменить роль преподавателей с помощью внедрения в систему ведения курса различных интерактивных методов, которые возникли в силу развития современных технологий, так и предствление преподавателей не только в качестве кладеза ума, но и как руководителя самостоятельных творческих работ студентов.

Ключевые слова: формы интерактивного обучения, методы интерактивного обучения, роль преподавателей, современные технологии.

Summary

Zh. Zh. Kozhamkulova, A. N. Nusipbekova

(Kazakh state women's pedagogical university, Almaty, Kazakhstan)

TRAINING IN INSTITUTIONS OF HIGHER EDUCATION USING INTERACTIVE METHODS

This article is devoted to interactive the forms and methods of online learning, which apply in the classroom. Reveails aspects such as the possibility of the emergence of fundamentally change the role of teachers through the introduction of the system of course a variety of interactive methods that have emerged due to the development of modem technology, and the idea of teachers not only as a treasure trove of mind, but also as a leader of indepent creative work stydents.

Keywords: methods, interactive the forms, the role of teachers, modern technology.

Поступила 05.05.2014 г.

Д. Н. НУРГАБЫЛ

(Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан)

ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аннотация. Рассматривается краевая задача для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с малым параметром при старших производных. Определены граничные и начальные функции, доказаны их существования и единственность. На основе построенных граничных и начальных функций найдено аналитическое представление решения краевой задачи.

Ключевые слова: асимптотика, начальная функция, граничные функции, краевая задача, дополнительное характеристическое уравнение, возмущенные и невозмущенные задачи.

Тірек сөздер: асимптотика, бастапқы функция, шекаралық функция, шекаралық есеп, қосымша характеристикалық теңдеу, ауытқыған және ауытқымаған есептер.

Keywords: asymptotic, initial function, boundary function, boundary value problem, additional characteristic equation, perturbed and no perturbed problems.

1. Постановка задачи. Вопрос о структуре фундаментальной системы решений однородного уравнения, отвечающего неоднородному уравнению с малым параметром при старшей производной, при малых ε , были рассмотрены Биркгофом [1] и Нуайоном в работе [2]. Отсюда возникает вопрос: можно ли, пользуясь результатами работ [1, 2], построить решение сингулярно возмущенной начальной или краевой задачи. Наиболее общие результаты в этом направлении, для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной были получены М. И. Вишиком, Л. А. Люстерником в [3], К. А. Касымовым и Д. Н. Нургабыл в [4-7]. Применительно к сингулярно возмущенным интегро-дифференциальным уравнениям алгоритм построения решения изложен в работах К. А. Касымова, М. К. Дауылбаева в [8, 9]. Однако вопросы построения решений сингулярно возмущенных краевых задач для дифференциальных уравнений высшего порядка с малым параметром при производных были малы исследованы.

В [10] было исследовано асимптотическое поведение решения сингулярно возмущенной краевой задачи с начальными скачками в случае, когда дополнительное характеристическое уравнение имели корни с отрицательными вещественными частями. Этот случай называется устойчивым. Случай, когда дополнительное характеристическое уравнение наряду с $\mu = 0$ имеет корни $\operatorname{Re} \mu < 0$, $\operatorname{Re} \mu > 0$, называется условно устойчивым [11].

В статье предложен алгоритм построения решения краевой задачи для дифференциальных уравнений условно устойчивого типа с малым параметром при старших производных. Такое исследование не было проведено.

Рассмотрим краевую задачу для обыкновенного линейного дифференциального уравнения высшего порядка с малым параметром при производных

$$L_{\varepsilon} y_{\varepsilon} \equiv \sum_{r=1}^m \varepsilon^r A_{n+r}(t) \frac{d^{n+r} y}{dt^{n+r}} + \sum_{k=0}^n A_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = h(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

$$\left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=0} = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, l-1, \quad \left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=1} = \beta_i, \quad i = 0, 1, \dots, p-1, \quad (2)$$

где $\varepsilon < 0$ – малый параметр, α_i, β_i – известные постоянные, $A_{n+m}(t) = 1$, $m + n = l + p$.

Потребуем выполнения следующих условий:

1⁰. Коэффициенты $A_i(t), i = 0, 1, \dots, n + m$ и правая часть $h(t)$ уравнения (1) достаточное число раз дифференцируемы на отрезке $0 \leq t \leq 1$.

2⁰. $A_n(t) \neq 0$ при $0 \leq t \leq 1$.

3⁰. Дополнительное характеристическое уравнение

$$\mu^m + A_{n+m-1}(t) \cdot \mu^{m-1} + \dots + A_{n+1}(t) \cdot \mu + A_n(t) = 0$$

имеет m корней, различных между собой на отрезке $0 \leq t \leq 1$. Пусть среди этих корней имеется m_1 корней μ_1, \dots, μ_{m_1} с отрицательными вещественными частями, и $m_2 = m - m_1$ корней $\mu_{m_1+1}, \dots, \mu_{m_1+m_2}$ с положительными вещественными частями, причем $m_1 < l, m_2 < p$. Пусть: $l - m_1 = n_1; p - m_2 = n_2$.

4⁰. Справедливо $\bar{J}_0 = \det \|\sigma_{ij}\| \neq 0$, где элементы $\sigma_{ij} = u_{i0}^{(j-1)}(0), j = \overline{1, n_1}, i = \overline{1, n}$, $\sigma_{l+i, j} = u_{i0}^{(j-1)}(1), j = \overline{1, n_2}, i = \overline{1, n}$ составлены на основе фундаментальной системы решений $u_{10}(t), u_{20}(t), \dots, u_{n0}(t)$ уравнения

$$L_0 \bar{y} = \sum_{k=0}^n A_k(t) \frac{d^k \bar{y}}{dt^k} = 0. \quad (3)$$

Пусть $\bar{W}(t)$ – вронскиан фундаментальной системы решений $u_{10}(t), u_{20}(t), \dots, u_{n0}(t)$ уравнения (3), тогда

$$\bar{W}(t) \neq 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (4)$$

Для построения аналитического представления решения задачи (1), (2) предварительно построим вспомогательные функции: начальные и граничные функции.

2. Функция Коши, начальные функции. Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$L_\varepsilon y = 0. \quad (5)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1⁰ – 3⁰. Тогда для фундаментальной системы решений $\tilde{y}_i(t, \varepsilon), i = \overline{1, n+m}$ возмущенного однородного уравнения (5) справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ представления:

$$\tilde{y}_i^{(q)}(t, \varepsilon) = u_{i0}^{(q)}(t) + O(\varepsilon), \quad r = \overline{1, n}, \quad q = \overline{0, n+m-1}, \quad (6)$$

$$\tilde{y}_{n+r}^{(q)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_r(x) dx\right) \left(u_{n+r}(t) \mu_r^q(t) + O(\varepsilon)\right), \quad r = \overline{1, m}, \quad q = \overline{0, n+m-1},$$

где $u_{n+r}(t) \neq 0, t \in [0, 1], u_{10}(t), u_{20}(t), \dots, u_{n0}(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (3).

Доказательство леммы непосредственно следует из известной теоремы Шлезингера–Биркгофа–Нуайона (см., напр., [6, 12, 12: с. 29-34]).

Теперь в качестве фундаментальной системы решений однородного дифференциального уравнения (5) возьмем

$$y_i(t, \varepsilon) = \tilde{y}_i(t, \varepsilon), \quad i = \overline{1, n}; \quad y_{n+r}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{n_1} \tilde{y}_{n+r}(t, \varepsilon), \quad r = \overline{1, m_1}, \quad (7)$$

$$y_{n+m_1+j}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{n_2} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \mu_{m_1+j}(x) dx\right) \tilde{y}_{n+m_1+j}(t, \varepsilon), \quad j = \overline{1, m_2},$$

где $n_1 = l - m_1, n_2 = p - m_2, n_1 + n_2 = n, m_1 + m_2 = m$. Составим определитель Вронского

$W(t, \varepsilon)$ и, используя (6), (7) вынесем функции $\varepsilon^{n_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_i(x) dx\right), i = \overline{1, \dots, m_1},$

$\varepsilon^{n_2} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_1^t \mu_{m_1+i}(x) dx\right), i = \overline{1, \dots, m_2}$ за знак определителя $W(t, \varepsilon)$. Тогда получим

$$W(t, \varepsilon) = \varepsilon^\chi \cdot \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \bar{\mu}(x) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_1^t \bar{\bar{\mu}}(x) dx\right) \cdot \rho(t, \varepsilon), \quad (8)$$

где $\chi = n_1 m_1 + n_2 m_2$, $\bar{\mu} = \mu_1 + \dots + \mu_{m_1}$, $\bar{\bar{\mu}} = \mu_{m_1+1} + \dots + \mu_{m_2}$, $\rho(t, \varepsilon) = \det \|\rho_{ij}(t, \varepsilon)\|$ – определитель $n + m$ -го порядка, элементы которого представимы в виде

$$\rho_{ij}(t, \varepsilon) = \begin{cases} u_j^{(i-1)}(t) + O(\varepsilon), & j = 1, \dots, n, \\ \frac{1}{\varepsilon^{i-1}} \cdot (u_j(t) \cdot \mu_{j-n}^{i-1} + O(\varepsilon)), & j = \overline{n+1, n+m}, \quad i = 1, \dots, n+m. \end{cases}$$

Алгебраическое дополнение главного минора n -го порядка $w_\varepsilon(t)$, расположенного в левом верхнем углу определителя $\rho(t, \varepsilon)$, имеет наименьший порядок по ε . Поэтому доминирующий член определителя $\rho(t, \varepsilon)$ получается от перемножения минора $w_\varepsilon(t)$ на его алгебраическое дополнение $D(t, \varepsilon)$.

Определитель $w_\varepsilon(t)$ и алгебраическое дополнение $D(t, \varepsilon)$ в первом приближении, при достаточно малых ε , представимы в виде

$$w_\varepsilon(t) = \bar{W}(t) + O(\varepsilon), \quad D(t, \varepsilon) = (-1)^{n(n+1)} \frac{1}{\varepsilon^\lambda} \pi(t) \cdot \omega(t) \cdot (1 + O(\varepsilon)), \quad (9)$$

где $u_{n+r}(t) \neq 0$, $r = \overline{1, m}$, $t \in [0, 1]$, $\pi(t) = \prod_{k=1}^m u_{n+k}(t) \mu_k^n(t)$, – четное число,

$\lambda = \frac{(2n + m - 1)m}{2}$, $\omega(t)$ – определитель Вандермонда для корней μ_1, \dots, μ_m , который отличен от нуля на $0 \leq t \leq 1$, так как эти корни попарно различны и отличны от нуля.

Тогда, пользуясь выше сказанным и представлениями (9) и (4), для $\rho(t, \varepsilon)$ получим

$$\rho(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\lambda} \bar{W}(t) \pi(t) \omega(t) (1 + O(\varepsilon)) \neq 0. \quad (10)$$

Тогда используя (10) из (8) при достаточно малых ε получаем

$$W(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^\chi}{\varepsilon^\lambda} \bar{W}(t) \pi(t) \omega(t) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \bar{\mu}(x) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_1^t \bar{\bar{\mu}}(x) dx\right) (1 + O(\varepsilon)) \neq 0. \quad (11)$$

Теперь, следуя работам [5,6], введем функцию Коши.

Теорема 1. Пусть выполнены условия I^0-3^0 . Тогда при достаточно малых ε функция Коши $K(t, s, \varepsilon)$ при $0 \leq t, s \leq 1$ существует, единственно и выражается формулой

$$K(t, s, \varepsilon) = W(t, s, \varepsilon) / W(s, \varepsilon), \quad (12)$$

где $W(t, s, \varepsilon)$ – определитель $n + m$ -го порядка, получаемый из вронскиана $W(s, \varepsilon)$ заменой $n + m$ -ой строки фундаментальной системой решений $y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), \dots, y_{n+m}(t, \varepsilon)$ уравнения (5).

Заметим, что функция $K(t, s, \varepsilon)$ не зависит от выбора фундаментальной системы решений $y_1(t, \varepsilon), \dots, y_{n+m}(t, \varepsilon)$ уравнения (5).

Разложим определитель $W(t, s, \varepsilon)$ в виде суммы

$$W(t, s, \varepsilon) = W_0(t, s, \varepsilon) + W_1(t, s, \varepsilon),$$

где $W_0(t, s, \varepsilon)$ и $W_1(t, s, \varepsilon)$ – определители $n + m$ -го порядка, которые получаются из $W(s, \varepsilon)$ заменой $n + m$ -ой строки соответственно строками

$$y_1(t, \varepsilon), \dots, y_{n_1}(t, \varepsilon), \underbrace{0, \dots, 0}_{n_2}, y_{n+1}(t, \varepsilon), \dots, y_{n+m_1}(t, \varepsilon), \underbrace{0, \dots, 0}_{m_2},$$

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{n_1}, y_{n_1+1}(t, \varepsilon), \dots, y_{n_1+n_2}(t, \varepsilon), \underbrace{0, \dots, 0}_{m_1}, y_{n+m_1+1}(t, \varepsilon), \dots, y_{n+m}(t, \varepsilon).$$

Теперь введем функции:

$$K_0(t, s, \varepsilon) = \frac{W_0(t, s, \varepsilon)}{W(s, \varepsilon)}, \quad K_1(t, s, \varepsilon) = \frac{W_1(t, s, \varepsilon)}{W(s, \varepsilon)}. \quad (13)$$

Тогда из (12), (13) получаем $K(t, s, \varepsilon) = K_0(t, s, \varepsilon) + K_1(t, s, \varepsilon)$. Очевидно, что $K_0(t, s, \varepsilon)$, $K_1(t, s, \varepsilon)$ являются непрерывными функциями t и s вместе с производными до $n + m$ -го порядка включительно, и как функция переменной t удовлетворяют однородному уравнению (5):

$$L_\varepsilon K_0 = 0, \quad L_\varepsilon K_1 = 0 \quad \text{при } t \neq s,$$

а при $t = s$ удовлетворяют условиям

$$K_{0t}^{(j)}(s, s, \varepsilon) + K_{1t}^{(j)}(s, s, \varepsilon) = 0, \quad j = \overline{0, n+m-2}, \quad K_{0t}^{(n+m-1)}(s, s, \varepsilon) + K_{1t}^{(n+m-1)}(s, s, \varepsilon) = 1.$$

Функции $K_0(t, s, \varepsilon)$, $K_1(t, s, \varepsilon)$ назовем *начальными функциями* уравнения (5).

3. Построение граничных функций. Введем в рассмотрение граничные функции. Функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$ называются *граничными функциями* краевой задачи (1), (2), если они удовлетворяют однородному уравнению (5) и граничным условиям

$$\Phi_i^{(j)}(0, \varepsilon) = 1, \quad j = i-1, \quad i = \overline{1, l}, \quad \Phi_{l+i}^{(j)}(1, \varepsilon) = 1, \quad j = i-1, \quad i = \overline{1, p},$$

$$\Phi_i^{(j)}(0, \varepsilon) = 0, \quad j \neq i-1, \quad i = \overline{1, l+p}, \quad j = \overline{0, l-1}, \quad (14)$$

$$\Phi_i^{(j)}(1, \varepsilon) = 0, \quad j \neq i-1, \quad i = \overline{1, l+p}, \quad j = \overline{0, p-1}.$$

Введем в рассмотрение определитель $J(\varepsilon) = \det \|\delta_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n+m}$, элементы которого составлены на основе фундаментальной системы решений (7) и имеют вид

$$\delta_{ij} = \begin{cases} y_j^{(i-1)}(0, \varepsilon), & j = \overline{1, n+m}; \quad i = \overline{1, l}, \\ y_j^{(i-l-1)}(1, \varepsilon), & j = \overline{1, n+m}; \quad i = \overline{l+1, l+p}. \end{cases}$$

В силу (6) и (7) нетрудно убедиться, что для определителя $J(\varepsilon)$ при достаточно малых ε на отрезке $0 \leq t \leq 1$ справедливо следующее представление

$$J(\varepsilon) = (-1)^{m_1 n_2} \frac{\bar{J}_0}{\varepsilon^{\bar{\lambda}}} \cdot \pi_0 \cdot \pi_1 \cdot \omega^0 \cdot \omega^1 \cdot (1 + O(\varepsilon)) \neq 0. \quad (15)$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 = \frac{m_1(m_1-1)}{2}$, $\lambda_2 = \frac{m_2(m_2-1)}{2}$, $\pi_0 = \prod_{s=1}^{m_1} u_{n+s}(0) \mu_s^{n_1}(0)$,

$\pi_1 = \prod_{s=1}^{m_2} u_{n+m_1+s}(1) \mu_{m_1+s}^{n_2}(1)$, $\omega^0 = \omega(\mu_1(0), \dots, \mu_{m_1}(0))$, $\omega^1 = \omega(\mu_{m_1+1}(1), \dots, \mu_{m_1+m_2}(1))$ –

определители Вандермонда.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия $I^0 - I^0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ граничные функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$ на отрезке $[0, 1]$ существуют, единственны и выражаются формулой

$$\Phi_i(t, \varepsilon) = J_i(t, \varepsilon) / J(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n+m}, \quad (16)$$

где $J_i(t, \varepsilon)$ – определитель, полученный из $J(\varepsilon)$ заменой i строки фундаментальной системы решений $y_k(t, \varepsilon)$, $k = \overline{1, n+m}$ уравнения (5).

Отметим, что граничные функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$ не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения (5).

4. Построение и оценка решения сингулярно возмущенной краевой задачи.

Теорема 3. Пусть выполнены условия I^0 - I^0 . Тогда неоднородная краевая задача (1), (2) имеет единственное решение, задаваемое формулой

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^l \alpha_{i-1} \Phi_i(t, \varepsilon) + \sum_{i=1}^p \beta_{i-1} \Phi_{l+i}(t, \varepsilon) + \sum_{j=1}^l \Phi_j(t, \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^1 K_1^{(j-1)}(0, s, \varepsilon) h(s) ds - \sum_{j=1}^p \Phi_{l+j}(t, \varepsilon) \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^1 K_0^{(j-1)}(1, s, \varepsilon) h(s) ds + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K_0(t, s, \varepsilon) h(s) ds - \frac{1}{\varepsilon^m} \int_t^1 K_1(t, s, \varepsilon) h(s) ds. \quad (17)$$

Доказательство. Решение $y(t, \varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+m} c_i \Phi_i(t, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K_0(t, s, \varepsilon) h(s) ds - \frac{1}{\varepsilon^m} \int_t^1 K_1(t, s, \varepsilon) h(s) ds, \quad (18)$$

где c_i – неизвестные постоянные. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $y(t, \varepsilon)$, заданная по формуле (17) является решением уравнения (1). Для определения c_i подставим (18) в краевые условия (2). Тогда с учетом краевых условий (14) однозначно получим

$$c_j = \alpha_{j-1} + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^1 K_1^{(j-1)}(0, s, \varepsilon) h(s) ds, \quad j = \overline{1, l},$$

$$c_{l+j} = \beta_{j-1} - \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^1 K_0^{(j-1)}(1, s, \varepsilon) h(s) ds, \quad j = \overline{1, p}.$$

Подставляя их в (18), получим (17). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- Schlesinger L. Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differential systemeabe Funktionen eines Parameters // Math. Ann. – N 63 (1907). – P. 207-300.
- Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – 9. – 219-231.
- Вишик М.И., Люстерник Л.А. О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // ДАН СССР. – 1960. – Т. 132, № 6. – С. 1242-1245.
- Касымов К.А. Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // УМН. – 1962. – Т. 17, № 5. – С. 187-188.
- Kasymov K.A., Nurgabyly D.N. Asymptotic Behavior of Solutions of Linear Singularly Perturbed General Separated Boundary-Value Problems with Initial Jump // Ukrainian Mathematical Journal. – 2003. – Vol. 55, N 11. – P. 1777-1792.
- Kasymov K.A., Nurgabyly D.N. Asymptotic estimates of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with initial jump for linear differential equations // Differential equations. – 2004. – Vol. 40, N 4. P. 597-607.
- Нургабыл Д.Н. Построение решения сингулярно возмущенной краевой задачи имеющего начальный скачок // Вестник Кыргызского государственного национального университета. – 2001. – Т. 3, № 6. – С. 173-177.
- Дауылбаев М.К. Асимптотические оценки решений интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром // Математический журнал. Институт математики МОН РК. – 2008. – Т. 8, № 4(30).
- Касымов К.А., Дауылбаев М.К., Атахан Н. Асимптотическая сходимость решения краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. – 2012. – № 3(74). – С. 28-34.
- Kasymov K.A., Nurgabyly D.N., Uaisov A.B. Asymptotic estimates for the solutions of boundary-value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives // Ukrainian Mathematical Journal. – 2013. – Vol. 65, N 5. P. 694-708.

11 Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973.

12 Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М., 1981.

REFERENCES

1 Schlesinger L. Uber asymptotische Darstellungen der Losungen linearer Differential systemeabe Funktionen eines Parametere. Math. Ann. 1907. **63**. S. 207-300.

2 Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. Trans. Amer. Math. Soc. 1908. **9**. 219-231.

3 Vishik M.I., Lyusternik L.A. On initial jump for non-linear differential equations containing a small parameter. RCS USSR. Vol. 132, N 6 (1960). P. 1242-1245.

4 Kasymov K.A. On asymptotic of the solutions of Cauchy problem with boundary conditions for non-linear ordinary differential equations containing a small parameter. UMN. 1962. Vol. 17, N 5. P. 187-188.

5 Kasymov K.A., Nurgabyl D.N. Asymptotic Behavior of Solutions of Linear Singularly Perturbed General Separated Boundary-Value Problems with Initial Jump. Ukrainian Mathematical Journal. 2003. Vol. 55, N 11. P. 1777-1792.

6 Kasymov K.A., Nurgabyl D.N. Asymptotic estimates of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with initial jump for linear differential equations. Differential equations. 2004. Vol. 40, N 4. P. 597-607.

7 Nurgabyl D. N. Construction of solution of the singularly perturbed boundary problem with initial jump. Vestnik of Kirghiz state national university. 2001. Vol. 3, N 6. C. 173-177

8 Dauylbaev M.K. Asymptotic estimates of solutions of the integro-differential equations with small parameter. Mathematical Journal. 2008. Vol. 8, N 4.

9 Kasymov K.A., Dauylbaev M.K., Atahan N. Asymptotic convergence of the solution of a singularly perturbed boundary value problem integro-differential equations. Vestnik KazNU. Ser. math., mech. 2012. N 3. P. 28-34.

10 Kasymov K.A., Nurgabyl D.N., Uaisov A.B. Asymptotic estimates for the solutions of boundary-value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives. Ukrainian Mathematical Journal. 2013. Vol. 65, N 5. P. 694-708.

11 Vasilyeva A.B., Butuzov V.F. Asymptotic decomposition of Solutions it is Singularly Perturbed equations. M.: Nauka, 1973. P. 272.

12 Lomov S.A. Introduction the general theory of singular perturbations. M.: Nauka, 1981. P. 399.

Резюме

Д. Н. Нұрғабұл

(I. Жансүгіров атындағы Жетісу мемлекеттік университеті, Талдықорған, Қазақстан)

ЖОҒАРҒЫ ТУЫНДЫЛАРЫНЫҢ ЖАНЫНДА КІШКЕНЕ ПАРАМЕТРІ БАР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП ШЕШІМІН ҚҰРУ

Жұмыста жоғарғы ретті туындыларының жанында кішкене параметрі бар жай дифференциалдық теңдеу үшін шекаралық есеп қарастырылған. Шекаралық және бастапқы функциялар енгізілген, олардың бар болуы және жалғыздығы дәлелденген. Құрастырылған шекаралық және бастапқы функциялар арқылы шекаралық есеп шешімінің аналитикалық формуласы анықталды.

Тірек сөздер: асимптотика, бастапқы функция, шекаралық функция, шекаралық есеп, косымша характеристикалық теңдеу, ауытқыған және ауытқымаған есептер.

Summary

Duisebek Nurgabyl

(Zhetysu state university named after I. Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan)

A CONSTRUCTION SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL PARAMETER AT HIGHER DERIVATIVES

In this article considered boundary value problem for linear differential equations with small parameter at higher derivatives. Are defined the initial function and boundary functions, their existence and uniqueness are proved. On the basis of the constructed boundary and initial functions analytical representation of the solution of boundary value problem task is found.

Keywords: asymptotic, initial function, boundary function, boundary value problem, additional characteristic equation, perturbed and no perturbed problems.

Поступила 05.05.2014 г.

Ж. О. ТОЛУБАЕВ

(Сулуктинский гуманитарно-экономический институт БатГУ, Сулукта, Кыргызстан, tolubaiev69@mail.ru)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА НА ПОЛУОСИ

Аннотация. В работе на основе понятия производной по возрастающей функции и методом преобразований уравнений установлены достаточные условия принадлежности решений систем линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка Вольтерра-Стилтьеса к пространству $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$.

Ключевые слова: производная по возрастающей функции, непрерывная матричная функция, вектор-функция, пространство непрерывных матричных функций.

Тірек сөздөр: үдемелі функциялар бойынша туынды, үздіксіз матрикалык функция, вектор-функция, үздіксіз матрикалык функциясының кеңістігі.

Keywords: derivative by increasing function, continuous matrix function, vector-function space of continuous matrix functions.

Рассмотрим систему линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра-Стилтьеса

$$x''(t) + A(t)x'(t) + B(t)x(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)x'(\tau)dg(\tau) = f(t), \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

$$x(t_0) = c, \quad x'(t_0) = x_1 \quad (2)$$

где интеграл является интегралом Стилтьеса, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in R^n$, $K(t, \tau)$ – $n \times n$ мерная симметричная непрерывная матричная функция, т.е. $K^T(t, \tau) = K(t, \tau)$, где $G = \{(t, \tau) \in R^2 : t_0 \leq \tau \leq t < \infty\}$, $A(t), B(t)$ – $n \times n$ -мерные симметричные непрерывные матричные функции, $x(\tau)$ – n - мерная векторная функция, $f(t)$ – заданная непрерывная n - мерная векторная функция, $g(t)$ – заданная возрастающая непрерывная функция на $[t_0, \infty)$, $x(t)$ – n -мерная искомая векторная функция.

Здесь $x'(t), x''(t)$ определяются следующими равенствами

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dg(t)} \frac{dg(t)}{dt} = g'(t) \frac{dx(t)}{dg(t)}$$

$$x''(t) = \left[\frac{d^2 x(t)}{dg^2(t)} g'(t) + \frac{dx(t)}{dg(t)} (g'(t))'_{g(t)} \right] g'(t)$$

Все фигурирующие векторные, матричные функции являются непрерывными и соотношения имеют место для всех $t \geq t_0$ и $t \geq \tau \geq t_0$.

Вопросы единственности, ограниченности и принадлежности решений, квадратично-суммируемых вектор-функций для систем линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра методом преобразований уравнений исследованы в работах [1-9].

Введем обозначения: $C_n[t_0, \infty)$ – пространство n -мерных непрерывных вектор функций с элементами из $C[t_0, \infty]$ и $C_m(G)$ – пространство $n \times n$ – мерных непрерывных матричных функций с элементами из $C(G)$. Через $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$ обозначим пространство всех n -мерных вектор-функций $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ удовлетворяющих условию

$$\int_{t_0}^{\infty} \|x(t)\|^2 dg(t) < \infty$$

Для любых $x(\eta) = \{x_1(\eta), x_2(\eta), \dots, x_n(\eta)\}^T$, $y(\xi) = \{y_1(\xi), y_2(\xi), \dots, y_n(\xi)\}^T \in C_n[t_0, \infty)$ скалярные произведения определяется следующим равенством $\langle x(\eta), y(\xi) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i(\eta)y_i(\xi)$, норма $A(t) - n \times n$ мерной симметричной матричной функции определяется следующим равенством $\|A(t)\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t)|$, а норма n -мерных векторных функций $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}^T$ опреде-

ляется следующим равенством $\|x(t)\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

ЗАДАЧА. В данной работе рассматривается и исследуется методом преобразований уравнений достаточные условия принадлежности решений в $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$ систем линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка (1) типа Вольтерра-Стилтьеса.

ТЕОРЕМА. Пусть для систем линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка (1) выполняются следующие условия:

1) $g'(t) \geq 0$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, $(g'(t))'_{g(t)}$, $\|A(t)\|$ и $\|B(t)\|$, $\| [B(t)]'_{g(t)} \|$ – непрерывные функции на $[t_0, \infty)$, $A^*(t) = A(t)$ и $B^*(t) = B(t)$ при всех $t \in [t_0, \infty)$;

2) $\|K'_{g(t)}(t, s)\|$, $\|K'_{g(s)}(t, s)\|$, $\|K''_{g(t)g(s)}(t, s)\| \in C(G)$,

где $K'_{g(t)}(t, s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{K(t+\Delta, s) - K(t, s)}{g(t+\Delta) - g(t)}$, $K'_{g(s)}(t, s) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{K(t, s+\Delta) - K(t, s)}{g(s+\Delta) - g(s)}$;

3) пусть для любых $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ выполняются следующие неравенства:

a) $\langle K(t, t_0)x, x \rangle \geq 0$, $\left\langle \left[A(t) - \frac{1}{2} (g'(t))'_{g(t)} E_n \right] x, x \right\rangle \geq \alpha \|x\|^2$, $\langle B(t)x, x \rangle \geq 0$,

$\left\langle \left[(g'(t))'_{g(t)} B(t) + g'(t) B'_{g(t)}(t) \right] x, x \right\rangle \leq 0$ и $\langle K'_{g(t)}(t, t_0)x, x \rangle \leq 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$, где $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, $E_n - n \times n$ мерная единичная матрица;

b) $\langle K'_{g(\tau)}(t, \tau)x, x \rangle \geq 0$ и $\langle K''_{g(t)g(\tau)}(t, \tau)x, x \rangle \leq 0$ для всех $(t, \tau) \in G = \{(t, \tau) : t_0 \leq \tau \leq t < \infty\}$;

4) $\|f(t)\| \in L^2_{n,g}[t_0, \infty)$

тогда решение системы линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка (1) принадлежит к пространству $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$ и справедлива оценка

$$\int_{t_0}^t \|x'(s)\|^2 dg(s) \leq \frac{1}{\alpha - \varepsilon} \left\{ \int_{t_0}^t \|f(s)\|^2 dg(s) + \frac{1}{2} \langle g'(t_0)x_1, x_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle g'(t_0)B(t_0)c, c \rangle \right\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя метод преобразования уравнений рассмотренных в работе [9] и скалярно умножая уравнения (1) на $x'(t)$ и затем, интегрируя от t_0 до t по Стильтесу получаем:

$$\int_{t_0}^t \langle x''(s), x'(s) \rangle dg(s) + \int_{t_0}^t \langle A(s)x'(s), x'(s) \rangle dg(s) + \int_{t_0}^t \langle B(s)x(s), x'(s) \rangle dg(s) + \\ + \int_{t_0}^s \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)x'(\tau), x'(s) \rangle dg(\tau) dg(s) = \int_{t_0}^t \langle f(s), x'(s) \rangle dg(s) \quad (3)$$

Далее подставляя значение $x'(t), x''(t)$ в соотношения (3) получим

$$\int_{t_0}^t \left\langle \left[\frac{d^2 x(s)}{dg^2(s)} g'(s) + \frac{dx(s)}{dg(s)} [g'(s)]'_{g(s)} \right] g'(s), g'(s) \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \\ + \int_{t_0}^t \left\langle A(s)g'(s) \frac{dx(s)}{dg(s)}, g'(s) \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \int_{t_0}^t \left\langle B(s)x(s), g'(s) \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \\ + \int_{t_0}^s \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)x'(\tau), x'(s) \rangle dg(\tau) dg(s) = \int_{t_0}^t \langle f(s), x'(s) \rangle dg(s)$$

Тогда из последнего соотношения имеем

$$\int_{t_0}^t \left\langle \frac{d^2 x(s)}{dg^2(s)} [g'(s)]^3, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \\ + \int_{t_0}^t \left\langle A(s)[g'(s)]^2 \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \int_{t_0}^t \left\langle g'(s)B(s)x(s), \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \\ + \int_{t_0}^s \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)x'(\tau), x'(s) \rangle dg(\tau) dg(s) = \int_{t_0}^t \langle f(s), x'(s) \rangle dg(s). \quad (4)$$

Для первого интеграла в левой части соотношения (4) применяем следующее тождество

$$\left(\left\langle [g'(s)]^3 \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle \right)'_{g(s)} = \left\langle 3[g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle + \\ + \left\langle [g'(s)]^3 \frac{d^2 x(s)}{dg^2(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle + \left\langle [g'(s)]^3 \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{d^2 x(s)}{dg^2(s)} \right\rangle$$

т.е.

$$\left\langle [g'(s)]^3 \frac{d^2 x(s)}{dg^2(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\left\langle [g'(s)]^3 \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle \right)'_{g(s)} - \frac{3}{2} \left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle$$

Тогда

$$\int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]^3 \frac{d^2 x(s)}{dg^2(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\left\langle [g'(s)]^3 \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle \right)'_{g(s)} dg(s) - \\ - \frac{3}{2} \int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) = \frac{1}{2} \left\langle [g'(s)]^3 \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle \Big|_{s=t_0}^{s=t} - \\ - \frac{3}{2} \int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) = \frac{1}{2} \langle g'(t)x'(t), x'(t) \rangle - \frac{1}{2} \langle g'(t_0)x_1, x_1 \rangle - \\ - \frac{3}{2} \int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s).$$

Из последнего соотношения получим

$$\int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]^3 \frac{d^2 x(s)}{dg^2(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) = \frac{1}{2} \langle g'(t)x'(t), x'(t) \rangle - \frac{1}{2} \langle g'(t_0)x_1, x_1 \rangle - \frac{3}{2} \int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s). \quad (5)$$

Для четвертого интеграла в левой части соотношения (4) применяем следующее тождество

$$\begin{aligned} \left(\langle g'(s)B(s)x(s), x(s) \rangle \right)'_{g(s)} &= \left\langle [g'(s)]'_{g(s)} B(s)x(s), x(s) \right\rangle + \langle g'(s)B'_{g(s)}(s)x(s), x(s) \rangle + \\ &+ \left\langle g'(s)B(s) \frac{dx(s)}{dg(s)}, x(s) \right\rangle + \left\langle g'(s)B(s)x(s), \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} \left\langle g'(s)B(s)x(s), \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle &= \frac{1}{2} \left(\langle g'(s)B(s)x(s), x(s) \rangle \right)'_{g(s)} - \frac{1}{2} \left\langle [g'(s)]'_{g(s)} B(s)x(s), x(s) \right\rangle - \\ &- \frac{1}{2} \langle g'(s)B'_{g(s)}(s)x(s), x(s) \rangle. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left\langle g'(s)B(s)x(s), \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left(\langle g'(s)B(s)x(s), x(s) \rangle \right)'_{g(s)} dg(s) - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]'_{g(s)} B(s)x(s), x(s) \right\rangle dg(s) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle g'(s)B'_{g(s)}(s)x(s), x(s) \rangle dg(s) = \frac{1}{2} \langle g'(s)B(s)x(s), x(s) \rangle \Big|_{s=t_0}^{s=t} - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left\langle \left\{ [g'(s)]'_{g(s)} B(s) + g'(s)B'_{g(s)}(s) \right\} x(s), x(s) \right\rangle dg(s) = \frac{1}{2} \langle g'(t)B(t)x(t), x(t) \rangle - \\ &- \frac{1}{2} \langle g'(t_0)B(t_0)c, c \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left\langle \left\{ [g'(s)]'_{g(s)} B(s) + g'(s)B'_{g(s)}(s) \right\} x(s), x(s) \right\rangle dg(s). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения получим

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left\langle g'(s)B(s)x(s), \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) &= \frac{1}{2} \langle g'(t)B(t)x(t), x(t) \rangle - \frac{1}{2} \langle g'(t_0)B(t_0)c, c \rangle - \\ &- \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left\langle \left\{ [g'(s)]'_{g(s)} B(s) + g'(s)B'_{g(s)}(s) \right\} x(s), x(s) \right\rangle dg(s). \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая (5) и (6) из (4) имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \langle g'(t)x'(t), x'(t) \rangle - \frac{1}{2} \langle g'(t_0)x_1, x_1 \rangle - \frac{3}{2} \int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \\ &+ \int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]^2 [g'(s)]'_{g(s)} \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \int_{t_0}^t \left\langle A(s)[g'(s)]^2 \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \\ &+ \frac{1}{2} \langle g'(t)B(t)x(t), x(t) \rangle - \frac{1}{2} \langle g'(t_0)B(t_0)c, c \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left\langle \left\{ [g'(s)]'_{g(s)} B(s) + g'(s)B'_{g(s)}(s) \right\} x(s), x(s) \right\rangle dg(s) + \\ &+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)x'(\tau), x'(s) \rangle dg(\tau) dg(s) = \int_{t_0}^t \langle f(s), x'(s) \rangle dg(s). \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle g'(t)x'(t), x'(t) \rangle + \int_{t_0}^t \left\langle \left[A(s) - \frac{1}{2} [g'(s)]'_{g(s)} \right] [g'(s)]^2 \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right\rangle dg(s) + \\ & + \frac{1}{2} \langle g'(t)B(t)x(t), x(t) \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]'_{g(s)} B(s) + g'(s)B'_{g(s)}(s) \right\rangle x(s), x(s) \rangle dg(s) - \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)x'(\tau), x'(s) \rangle dg(\tau) dg(s) = \int_{t_0}^t \langle f(s), x'(s) \rangle dg(s) + \frac{1}{2} \langle g'(t_0)x_1, x_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle g'(t_0)B(t_0)c, c \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Для вычисления двойного интеграла в соотношении (7) применяем следующие равенства и формулы нахождения производных скалярного произведения векторных функций

$$\langle u(t), v(t) \rangle'_{g(t)} = \langle u'_{g(t)}(t), v(t) \rangle + \langle u(t), v'_{g(t)}(t) \rangle,$$

$$1. \frac{\partial}{\partial g(\tau)} \langle K(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle = \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle + \langle K(s, \tau)z'_{g(\tau)}(s, \tau), x'(s) \rangle, \quad (s, \tau) \in G,$$

Из последнего тождества следует, что

$$\langle K(s, \tau)z'_{g(\tau)}(s, \tau), x'(s) \rangle = \frac{\partial}{\partial g(\tau)} \langle K(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle - \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle \quad (8)$$

где $z(s, \tau)$ определяется по следующей формуле

$$z(s, \tau) = \int_{\tau}^s x'(t) dg(t) \quad (9)$$

Из (9) и теоремы из [10] следует

$$z'_{g(\tau)}(s, \tau) = -x'(\tau), \quad (10)$$

$$z'_{g(s)}(s, \tau) = x'(s). \quad (11)$$

2. Далее учитывая, $K^T(t, \tau) = K(t, \tau)$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g(s)} \langle K(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial g(s)} [K(s, \tau)z(s, \tau)], z(s, \tau) \right\rangle + \left\langle K(s, \tau)z(s, \tau), \frac{\partial}{\partial g(s)} z(s, \tau) \right\rangle = \\ &= \langle K'_{g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle + \langle K(s, \tau)z'_{g(s)}(s, \tau), z(s, \tau) \rangle + \langle K(s, \tau)z(s, \tau), z'_{g(s)}(s, \tau) \rangle = \\ &= \langle K'_{g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle + 2 \langle K(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle \end{aligned}$$

Отсюда, получим

$$\langle K(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial g(s)} \langle K(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle - \frac{1}{2} \langle K'_{g(s)}(s, \tau)z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle, \quad (s, t) \in G \quad (12)$$

Далее учитывая (10) имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau)z'_{g(\tau)}(s, \tau), x'(s) \rangle dg(\tau) &= \int_{t_0}^s \frac{\partial}{\partial g(\tau)} \langle K(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle dg(\tau) - \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle dg(\tau) = \\ &= \langle K(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=s} - \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle dg(\tau) = -\langle K(s, t_0)z(s, t_0), x'(s) \rangle - \\ & - \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau)z(s, \tau), x'(s) \rangle dg(\tau), \quad s \in [t_0, \infty). \end{aligned}$$

В силу (9) и (10) из последнего равенства следует, что

$$\int_{t_0}^s \langle K(s, \tau) \nu(\tau), x'(s) \rangle dg(\tau) = \langle K(s, t_0) z(s, t_0), x'(s) \rangle + \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau) z(s, \tau), x'(s) \rangle dg(\tau), \quad s \in [t_0, \infty).$$

Отсюда интегрируя от t_0 до t получим

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau) \nu(\tau), x'(s) \rangle dg(\tau) dg(s) = \int_{t_0}^t \langle K(s, t_0) z(s, t_0), x'(s) \rangle dg(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau) z(s, \tau), x'(s) \rangle dg(\tau) dg(s). \quad (13)$$

Применяя формулы (9), (11), (12) и обобщенную формулу Дирихле [10] из (13) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K(s, \tau) x'(\tau), x'(s) \rangle dg(\tau) dg(s) = \int_{t_0}^t \langle K(s, t_0) z(s, t_0), z'_{g(s)}(s, t_0) \rangle dg(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau) z(s, \tau), z'_{g(s)}(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) = \\ & = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{d}{dg(s)} \langle K(s, t_0) z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(s)}(s, t_0) z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau) z(s, \tau), z'_{g(s)}(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) = \\ & = \frac{1}{2} \langle K(t, t_0) z(t, t_0), z(t, t_0) \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(s)}(s, t_0) z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \frac{d}{dg(s)} \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau) z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau) z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) = \\ & = \frac{1}{2} \langle K(t, t_0) z(t, t_0), z(t, t_0) \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(s)}(s, t_0) z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \frac{d}{dg(s)} \langle K'_{g(\tau)}(s, \tau) z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(s) dg(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau) z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) = \\ & = \frac{1}{2} \langle K(t, t_0) z(t, t_0), z(t, t_0) \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(s)}(s, t_0) z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(\tau)}(t, \tau) z(t, \tau), z(t, \tau) \rangle dg(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau) z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая (14) из (7) соотношения получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle g'(t) x'(t), x'(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle g'(t) B(t) x(t), x(t) \rangle + \int_{t_0}^t \left[\left[A(s) - \frac{1}{2} [g'(s)]'_{g(s)} \right] [g'(s)]^2 \frac{dx(s)}{dg(s)}, \frac{dx(s)}{dg(s)} \right] dg(s) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left\langle [g'(s)]'_{g(s)} B(s) + g'(s) B'_{g(s)}(s) \right\rangle x(s), x(s) \rangle dg(s) + \\ & + \frac{1}{2} \langle K(t, t_0) z(t, t_0), z(t, t_0) \rangle - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(s)}(s, t_0) z(s, t_0), z(s, t_0) \rangle dg(s) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \langle K'_{g(\tau)}(t, \tau) z(t, \tau), z(t, \tau) \rangle dg(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \langle K''_{g(\tau)g(s)}(s, \tau) z(s, \tau), z(s, \tau) \rangle dg(\tau) dg(s) = \\ & = \int_{t_0}^t \langle f(s), x'(s) \rangle dg(s) + \frac{1}{2} \langle g'(t_0) x_1, x_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle g'(t_0) B(t_0) c, c \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Для вычисления интеграла в правой части соотношения (15), применяя неравенства Коши-Буняковского для интегралов, получим

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|f(s)\| \sqrt{\varepsilon} \|x'(s)\| dg(s) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s)\|^2 dg(s) + \varepsilon \int_{t_0}^t \|x'(s)\|^2 dg(s)$$

В силу условий теоремы 1), 2), 3), 4) и применяя последнюю неравенство из (15) соотношения имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} g'(t) \|x'(t)\|^2 + \frac{1}{2} g'(t) \langle B(t)x(t), x(t) \rangle + (\alpha - \varepsilon) \int_{t_0}^t \|x'(s)\|^2 dg(s) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^t \|f(s)\|^2 dg(s) + \\ & + \frac{1}{2} \langle g'(t_0)x_1, x_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle g(t_0)B(t_0)c, c \rangle \Rightarrow \\ & \Rightarrow \int_{t_0}^t \|x'(s)\|^2 dg(s) \leq \frac{1}{\alpha - \varepsilon} \left\{ \int_{t_0}^t \|f(s)\|^2 dg(s) + \frac{1}{2} \langle g'(t_0)x_1, x_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle g'(t_0)B(t_0)c, c \rangle \right\} \end{aligned}$$

где $\alpha > 0, 0 < \varepsilon < \alpha$.

Из последнего неравенства вытекает утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим систему линейных интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерра-Стилтьеса (1) при

$$\begin{aligned} n = 2, \quad t_0 = 1, \quad g(t) = t^2 \quad \text{и} \quad K(t, \tau) = \begin{pmatrix} \frac{2\tau^2}{t^2} & \frac{\tau^2}{t^2} \\ \frac{\tau^2}{t^2} & \frac{2\tau^2}{t^2} \end{pmatrix} = \frac{\tau^2}{t^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ A(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2t} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2t} \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

т.е. следующую систему линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра-Стилтьеса

$$\begin{aligned} x''(t) + \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2t} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2t} \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} x(t) + \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \frac{2\tau^2}{t^2} & \frac{\tau^2}{t^2} \\ \frac{\tau^2}{t^2} & \frac{2\tau^2}{t^2} \end{pmatrix} x'(\tau) dg(\tau) = f(t), \quad t \geq 1 \\ x(1) = c, \quad x'(1) = x_1 \end{aligned}$$

Проверим выполнение условий теоремы:

$$g'(t) = 2t, \quad (g'(t))'_{g(t)} = \frac{1}{t};$$

$$1. \quad A(t) - \frac{1}{2} (g'(t))'_{g(t)} E_2 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2t} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2t} \end{pmatrix} - \frac{1}{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, x \right\rangle \geq \alpha \|x\|^2, \quad \text{т.е. } \alpha = 1. \quad \left\langle \left\{ A(t) - \frac{1}{2} [g'(t)]'_{g(t)} E_2 \right\} x, x \right\rangle \geq 1.$$

$$2. \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} x, x \right\rangle \geq 0 \Rightarrow \left\langle \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, x \right\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle B(t)x, x \rangle \geq 0 ;$$

$$3. B'_{g(t)}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t^4} \end{pmatrix}, \quad [g'(t)]'_{g(t)} B(t) + g'(t) B'_{g(t)}(t) = \frac{1}{t} \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2t \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{t^4} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{t^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left\langle -\frac{1}{t^3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x, x \right\rangle \leq 0 \Rightarrow \left\langle \left\{ [g'(t)]'_{g(t)} B(t) + g'(t) B'_{g(t)}(t) \right\} x, x \right\rangle \leq 0 ;$$

$$4.a) K(t,1) = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left\langle \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x, x \right\rangle = \frac{1}{t^2} (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2} (2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) =$$

$$= \frac{2}{t^2} \left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right] \geq 0 \Rightarrow \langle K(t,1)x, x \rangle \geq 0 ;$$

$$b) K_{g(t)}(t,1) = -\frac{1}{t^4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left\langle -\frac{1}{t^4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x, x \right\rangle = -\frac{1}{t^4} (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{t^4} (2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) = -\frac{2}{t^4} \left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right] \leq 0 \Rightarrow \langle K_{g(t)}(t,1)x, x \rangle \leq 0 ;$$

$$c) K_{g(\tau)}(t,\tau) = \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left\langle \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x, x \right\rangle = \frac{1}{t^2} (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2} (2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) =$$

$$= \frac{2}{t^2} \left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right] \geq 0 \Rightarrow \langle K_{g(\tau)}(t,\tau)x, x \rangle \geq 0 ;$$

$$d) K_{g(t)g(\tau)}(t,\tau) = -\frac{1}{t^4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left\langle -\frac{1}{t^4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x, x \right\rangle = -\frac{1}{t^4} (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{t^4} (2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) = -\frac{2}{t^4} \left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right] \leq 0 \Rightarrow \langle K_{g(t)g(\tau)}(t,\tau)x, x \rangle \leq 0 ;$$

Из этого следует что, выполняется все условие теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Levin J.J., Nohel J.A. Perturbations of a Nonlinear Volterra Equations // Mich. math. – 1965. – Vol. 22. – P. 349-367.
- 2 Kiffe T.R. On Nonlinear Volterra Equations of Nonconvolution Type // Different equat. – 1976. – Vol. 12. – P. 431-447.
- 3 Винокуров В.Р. Асимптотические поведение решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3, № 10. – С. 1732-1744.
- 4 Цалюк З.Б. Замечание по поводу метода Ляпунова для интегро-дифференциальных уравнений // Математический анализ. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. – С. 103-107.
- 5 Цалюк З.Б., Шамсутдинов М.М. Об ограниченности решений одного класса нелинейных уравнений Вольтера // Математический анализ. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1971. – С. 63-71.
- 6 Smith M.C. On a Nonlinear Volterra Equations of Nonconvolution Type // J. different equat. – 1979. – Vol. 32. – P. 294-309.

- 7 Олехник С.Н. Об ограниченности и неограниченности решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8, № 9.
- 8 Пахыров З. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегрально-дифференциальных уравнений // Тезис докл. 4-й Казахской межвуз. науч. конф. по матем. и мех. Ч. 1. Математика. – Алма-Ата, 1971. – С. 123-124.
- 9 Ведь Ю.А., Искандаров С. О единственности решения системы линейных интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода на полуоси // Известие АН Киргизской ССР. – Вып. 5. – Фрунзе: Илим, 1986. – С. 14-18.
- 10 Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы. – Кыргызско-турецкий университет Манаса. – Бишкек, 2001. – С. 18-64.
- 11 Асанов А. Система интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса // Табигый илимдер журналы Кыргызско-турецкий университети Манаса. – Бишкек, 2003. – С. 65-78.

REFERENCES

- 1 Levin J.J., Nohel J.A. Perturbations of a Nonlinear Volterra Equations. Mich. math. 1965. Vol. 22. P. 349-367.
- 2 Kiffe T.R. On Nonlinear Volterra Equations of Nonconvolution Type. Different equat. 1976. Vol. 12. P. 431-447.
- 3 Vinokurov V.R. Asimptoticheskie povedenie reshenij odnogo klassa integro-differencial'nyh uravnenij Vol'tera. Differencial'nye uravnenija. 1967. T. 3, № 10. S. 1732-1744.
- 4 Caljuk Z.B. Zamechanie po povodu metoda Ljapunova dlja integro-differencial'nyh uravnenij. Matematicheskij analiz. Kazan': Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1978. S. 103-107.
- 5 Caljuk Z.B., Shamsutdinov M.M. Ob ogranichenosti reshenij odnogo klassa nelinejnyh uravnenij Vol'tera. Matematicheskij analiz. Kazan': Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1971. S. 63-71.
- 6 Smith M.C. On a Nonlinear Volterra Equations of Nonconvolution Type. J. different equat. 1979. Vol. 32. P. 294-309.
- 7 Olehnik S.N. Ob ogranichenosti i neogranichenosti reshenij obyknovennogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka. Differencial'nye uravnenija. 1972. T. 8, № 9.
- 8 Pahyrov Z. Dostatochnye priznaki ogranichenosti reshenij linejnyh integro-differencial'nyh uravnenij. Tезis dokl. 4-j Kazahstanskoy mezhvuz. науч. конф. по матем. i meh. Ch. 1. Matematika. Alma-Ata, 1971. S. 123-124.
- 9 Ved' Ju.A., Iskandarov S. O edinstvennosti reshenija sistemy linejnyh integral'nyh uravnenij tipa Vol'terra pervogo roda na poluosi. Izvestie AN Kirgizskoj SSR. Vyp. 5. Frunze: Ilim, 1986. S. 14-18.
- 10 Asanov A. Proizvodnaja funkicii po vozrastajushhej funkicii. Tabigyj ilimder zhurnaly. Kyrgyzsko-tureckij universitet Manasa. Bishkek, 2001. S. 18-64.
- 11 Asanov A. Sistema integral'nyh uravnenij Vol'tera-Stilt'esa. Tabigyj ilimder zhurnaly Kyrgyzsko-tureckij universiteti Manasa. Bishkek, 2003. S. 65-78.

Резюме

Ж. О. Толубаев

(Сүлікті гуманитарлық-экономикалық институты БатГУ, Сүлікті, Қырғызстан, tolubaiev69@mail.ru)

ЖАРТЫЛАЙ ОСЬТЕГІ ЕКІНШІ РЕТТІ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕС ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУІ СЫЗЫҚТЫ ЖҮЙЕСІ ШЕШУІНІҢ БІР КЛАСЫ ТУРАЛЫ

Жұмыста үдемелі функция туындысы ұғымы және тендеудің түрленуі негізінде екінші ретті Вольтерра-Стилтьес интегралды-дифференциалдық тендеуі сызықты жүйесі шешуінің $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$ кеңістігіне тән болуының жеткілікті шарты орнатылған.

Тірек сөздер: үдемелі функциялар бойынша туынды, үздіксіз матрикалшық функция, вектор-функция, үздіксіз матрикалық функциясының кеңістігі.

Summary

Zh. O. Tolubaev

(SGEI Bathgate, Sulukta, tolubaiev69@mail.ru)

ON A CLASS OF SOLUTIONS OF LINEAR INTEGRAL-EQUATIONS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL-NYH VOLTERRA-STIELTJES ON THE HALF

In this paper, based on the notion of derivative of an increasing function and the method of transformation equations established sufficient conditions for the solution of linear integro-differential equations of second order Volterra-Stieltjes to the space $L^2_{n,g}[t_0, \infty)$.

Keywords: derivative by increasing function, continuous matrix function, vector-function space of continuous matrix functions.

Поступила 05.05.2014 г.

М. Д. ШИНИБАЕВ¹, А. А. БЕКОВ¹, Е. С. АЯШЕВА²,
С. С. ДАИРБЕКОВ², А. С. САНСЫЗБАЕВА², Д. И. УСИПБЕКОВА³

¹Институт космических исследований им. акад. У. М. Султангазина АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан;

²Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан;

³Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан)

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРИРУЕМОМ СЛУЧАЕ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ЦЕНТРАЛЬНОМ НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

Аннотация. Найден новый интегрируемый случай дифференциальных уравнений вращательных движений твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском поле тяготения, когда главные моменты инерции тела связаны между собой $A = B = 4C$.

Полная система дифференциальных уравнений движения тела около центра масс состоит из трех динамических и трех кинематических уравнений Эйлера, а также из девяти уравнений Пуассона. Эти уравнения в случае $A = B = 4C$ допускают четыре независимых первых интегралов, согласно общей теории, этого достаточно для полного интегрирования вышеназванных дифференциальных уравнений вращательных движений твердого тела относительно его центра масс в ньютоновском поле тяготения. Полученные первые интегралы позволяют записать квадратуры для углов Эйлера.

Полученные квадратуры дают основу для разработки способов нахождения орбитальных параметров движения космических объектов в поступательном и вращательном движениях в центральном поле ньютоновского тяготения. Результаты исследований представляют ценность при разработке модельных задач небесной механики и динамики космического полета.

Ключевые слова: динамика, твердое тело, силовое поле, ньютоновское поле тяготения, центр масс, вращательные движения, моменты инерции тела.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон тартылыс өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық күйі.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Пусть твердое тело в центральном ньютоновском поле тяготения совершает движение около центра масс, тогда полная система дифференциальных уравнений в подвижных осях имеет вид*:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr &= \varepsilon(C - B)\gamma'\gamma'', \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)pr &= \varepsilon(A - C)\gamma''\gamma, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= \varepsilon(B - A)\gamma\gamma', \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\dot{\gamma} = r\gamma' - q\gamma'', \quad \dot{\gamma}' = p\gamma'' - r\gamma, \quad \dot{\gamma}'' = q\gamma - p\gamma', \quad (3)$$

$$\gamma = \sin \varphi \sin \theta, \quad \gamma' = \sin \theta \cos \varphi, \quad \gamma'' = \cos \theta, \quad (4)$$

$$\theta = \arccos \gamma'', \quad \varphi = \arctg \left(\frac{\gamma}{\gamma'} \right), \quad \dot{\psi} = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1 - \gamma''^2}, \quad (5)$$

* Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли. – Алматы, 2010. – 132 с.

где (1) – динамические уравнения Эйлера, (2) – кинематические уравнения Эйлера, (3) – соотношения Пуассона, $\varepsilon = \frac{3\mu}{R^3}$, μ – гравитационная постоянная, R – расстояние до центра притяжения, (4) – направляющие косинусы подвижных осей, (5) – соотношения Ю.А.Архангельского, θ, φ, ψ – углы Эйлера, p, q, r – проекции угловой скорости $\overline{\omega}$ на подвижные оси x, y, z , которые направлены по главным центральным осям инерции тела с началом в центре масс, A, B, C – главные моменты инерции тела.

Рассмотрим случай, когда главные центральные моменты инерции тела связаны между собой соотношением

$$A = B = 4C. \quad (6)$$

Перепишем (1) с учетом (6)

$$\left. \begin{aligned} 4 \frac{dp}{dt} - 3qr &= -3\varepsilon\gamma'\gamma'', \\ 4 \frac{dq}{dt} + 3pr &= 3\varepsilon\gamma\gamma'', \\ \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из последнего уравнения системы (7) имеем

$$r = r_0 = const. \quad (8)$$

Подставим (8) в первые два уравнения системы (7)

$$\left. \begin{aligned} 4\dot{p} - 3qr_0 &= -3\varepsilon\gamma'\gamma'', \\ 4\dot{q} + 3pr_0 &= 3\varepsilon\gamma\gamma''. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Найдем интеграл энергии. Для этого первое уравнение из (9) умножим на p , второе на q , затем сложим

$$4 \left(p \frac{dp}{dt} + q \frac{dq}{dt} \right) = 3\varepsilon(q\gamma' - p\gamma'')\gamma'',$$

где в соответствии с (3) имеем $(q\gamma' - p\gamma'') = \frac{d\gamma''}{dt}$, отсюда находим интеграл энергии

$$4(p^2 + q^2) - 3\varepsilon\gamma''^2 = 2C_1, \quad (10)$$

где C_1 – постоянная интеграла энергии.

Найдем интеграл площадей. Для этого умножим первое из (9) на γ , второе на γ' и сложим

$$4 \left(\gamma \frac{dp}{dt} + \gamma' \frac{dq}{dt} \right) + 3r_0(p\gamma' - q\gamma'') = 0, \quad (11)$$

здесь в соответствии с (3)

$$(p\gamma' - q\gamma'') = -\frac{d\gamma''}{dt}. \quad (12)$$

Подставим (12) в (11)

$$\gamma \frac{dp}{dt} + \gamma' \frac{dq}{dt} - \frac{3}{4}r_0 \frac{d\gamma''}{dt} = 0. \quad (13)$$

Предположим, что до дифференцирования по t (13) имел вид

$$\left(\gamma p + \gamma' q - \frac{3}{4}r_0\gamma'' \right) = D = const,$$

тогда

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma p + \gamma' q - \frac{3}{4}r_0\gamma'' \right) = 0,$$

с другой стороны, продифференцировав, имеем

$$\frac{d\gamma}{dt} p + \frac{d\gamma'}{dt} q - \frac{3}{4} r_0 \frac{d\gamma''}{dt} + \gamma \frac{dp}{dt} + \gamma' \frac{dq}{dt} = 0,$$

то есть с учетом (3) имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma p + \gamma' q - \frac{3}{4} r_0 \gamma'' \right) = \frac{d\gamma}{dt} p + \frac{d\gamma'}{dt} q = r_0 \frac{d\gamma''}{dt}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\gamma p + \gamma' q + \frac{1}{4} r_0 \gamma'' \right) = 0,$$

отсюда находим интеграл площадей

$$4(\gamma p + \gamma' q) + r_0 \gamma'' = 4C_2, \quad (14)$$

где C_2 – постоянная интеграла площадей.

Таким образом, у нас есть четыре первых интеграла:

$$\left. \begin{aligned} r = r_0 = const, \\ 4(p^2 + q^2) - 3\epsilon\gamma''^2 = 2C_1, \\ 4(\gamma p + \gamma' q) + r_0 \gamma'' = 4C_2, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = C_3 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Проверим их на линейную независимость:

$$\lambda_1(r_0) + \lambda_2(rC_1) + \lambda_3(4C_2) + \lambda_4(C_3) = 0, \quad (16)$$

здесь $r_0 \neq 2C_1 \neq 4C_2 \neq C_3 \neq 0$, поэтому (16) выполнимо только при условии

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0,$$

то есть найденные четыре первых интеграла (15) линейно независимы, следовательно, их достаточно для полного интегрирования дифференциальных уравнений вращательного движения относительно центра масс в центральном ньютоновском поле тяготения при $A = B = 4C$.

REFERENCES

Shinibaev M.D. Postupatelnoe-vrashatelnye dvigeniya tverdogo tela v stazionarnom I nestazionarnom pole tyagoteniya Zemli. Almaty, 2010. 132 p. (in Russ.).

Резюме

М. Д. Шыныбаев¹, А. А. Беков¹, Е. С. Аяшева², С. С. Дайырбеков², А. С. Сансызбаева², Д. И. Усінбекова³

¹Академик Ө. М. Сұлтанғазин атындағы Ғарыштық зерттеулер институты АҚ «ҰҒЗТО», Алматы, Қазақстан,

²Сырдария университеті, Жетісай, Қазақстан,

³Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан)

ОРТАЛЫҚ НЬЮТОН КҮШ ӨРІСІНДЕ ҚАТТЫ ДЕНЕ ДИНАМИКАСЫНЫҢ БІР ИНТЕГРАЛДАНАТЫН КЕЗІ ТУРАЛЫ

Ньютонның күш өрісіндегі қатты дененің массалық центріне қатысты айналмалы қозғалысының жаңа интегралданатын кезі анықталды.

Бұл шешімде орталық бас инерциялық моменттер өзара былай байланысады $A = B = 4C$. Толық дифференциалдық теңдеулер бұл жағдайда Эйлердің үш динамикалық, үш кинематикалық және 9 Пуассон қатынастарынан тұрады. Олар $A = B = 4C$ болғанда 4 тәуелсіз бірінші интегралдар орнатуға мүмкіншілік береді, бұл жалпы теория бойынша айтылған дифференциалдық теңдеулер толық шешіледі деген тұжырым жасау заңды екенін білдіреді.

Бұл квадратуралар арқылы Эйлер бұрыштарын айқын түрде анықтауға мүмкіншілік береді. Олар ғарыштық нысандардың ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстарында қажетті параметрлерді айқындайды.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон тартылыс өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық күйі.

Summary

M. D. Shinibaev¹, A. A. Bekov¹, E. S. Ajasheva², S. S. Dairbekov², A. S. Sansyzbaeva², D. I. Usipbekova³

¹Acad. A. M Sultangazin Space research institute, Almaty, Kazakhstan;

²University of the Syr-Dariya, Djetysay, Kazakhstan;

³Kazakh national technical university after K. I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan)

ABOUT ONE INTEGRABLE CASE OF THE RIGID BODY DYNAMICS
IN CENTRAL NEWTONS-RUSSIAN GRAVITATIONAL FIELD

Found a new integrable case of the differential equations of rotational motion of motions of a rigid body about the center of mass in the Central Newtonian field, the burden of when the principal moments of inertia of the body are linked $A = B = 4C$.

A complete system of differential equations of motion of a body about the center of mass consists of three dynamic and three of the kinematic equation of Euler, as well as of the nine Poisson equations. These equations in the case $A = B = 4C$ allow four independent first integrals, according to the General theory, this is enough to fully integrated of the above differential equation of rotational motions of a rigid te La relative to its center of mass in Newtonian gravitational field. The first in-tegral allow you to record quadrature for the Euler angles.

Received quadrature provide a basis for developing ways of finding the orbital parameters of motion of space objects in translational and rotational movements in the Central Newtonian field of gravitation. The research results are of value in the development of model problems of celestial mechanics and dynamics of space flight.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Поступила 05.05.2014 г.

УДК 531.1

*М. Д. ШИНИБАЕВ¹, А. А. БЕКОВ¹, А. АБЖАПБАРОВ², С. С. ДАЙЫРБЕКОВ³,
Е. КЫТАЙБЕКОВ³, С. ЖОЛДАСОВ³*

¹Институт космических исследований им. акад. У. М. Султангазина АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан,

²Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан,

³Университет Сыр-Дария, Джетысай, Казахстан)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВ ЭЙЛЕРА В СЛУЧАЕ $A = B = 4C$
НА ИНТЕРВАЛЕ $\alpha_4 \leq \gamma'' \leq \alpha_3$

Аннотация. Найдены явные функции для углов Эйлера в случае интегрируемости $A = B = 4C$.

Осесимметричное тело, совершающее вращательное движение в центральном ньютоновском поле тяготения при $A = B = 4C$, является моделью любого космического объекта, который совершает неуправляемое вращательное движение в околоземном космическом пространстве, поэтому решение поставленной задачи на сегодня является актуальной проблемой. Ранее было установлено, что дифференциальные уравнения задачи о движении твердого тела относительно центра масс в ньютоновском поле тяготения при $A = B = 4C$ допускают четыре первых независимых интеграла.

Согласно общей теории наличие этих интегралов приводит к полному решению поставленной задачи. Ниже приводится метод вывода углов Эйлера из указанных первых интегралов.

Решение задачи принципиально важно при анализе движений неуправляемых объектов в околоземном космическом пространстве.

Ключевые слова: динамика, твердое тело, силовое поле, ньютоновское поле тяготения, центр масс, вращательное движение, моменты инерции тела.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон тартылыс өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Пусть твердое тело совершает вращательное движение относительно центра масс в ньютоновском центральном поле тяготения и имеет распределение масс, соответствующее следующему равенству

$$A = B = 4C, \quad (1)$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции.

Введем две системы координат с общим началом в центре масс тела $Ox_1y_1z_1$ – фиксированная система координат, $Oxyz$ – подвижная система координат, жестко связанная с телом, оси которой направлены по главным центральным осям тела, причем положения осей определяется таблицей направляющих косинусов

	x_1	y_1	z_1
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

При этих расположениях имеем следующие дифференциальные уравнения движения твердого тела относительно центра масс [1]:

$$\left. \begin{aligned} 4\dot{p} - 3qr &= -3\varepsilon\gamma'\gamma'', \\ 4\dot{q} + 3pr &= 3\varepsilon\gamma\gamma'', \\ \frac{dr}{dt} &= 0, \quad r = r_0 - const; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= r_0\gamma' - q\gamma'', \quad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r_0\gamma, \quad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma', \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$p = \dot{\psi}\gamma + \dot{\theta}\cos\varphi, \quad q = \dot{\psi}\gamma' - \dot{\theta}\sin\varphi, \quad r_0 = \dot{\psi}\gamma'' + \dot{\phi}, \quad (4)$$

где $\varepsilon = \frac{3\mu}{R^3}$, μ – гравитационная постоянная, R – расстояние центра масс тела от притягивающего тела, p, q, r – проекции мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ на подвижные оси, θ, φ, ψ – углы Эйлера, (2) – динамические уравнения Эйлера, (3) – уравнения Пуассона, (4) – кинематические уравнения Эйлера.

К этим уравнениям добавим соотношения Ю. А. Архангельского*

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \arctg\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right), \quad \dot{\psi} = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1 - \gamma''^2}, \quad \theta = \arccos\gamma'', \\ \gamma &= \sin\varphi\sin\theta, \quad \gamma' = \cos\varphi\sin\theta, \quad \gamma'' = \cos\theta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ранее для (2)-(4) получены следующие четыре независимых интеграла

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 - const, \quad \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \\ 4(p^2 + q^2) - 3\varepsilon\gamma''^2 &= 2C_1, \\ 4(p\gamma + q\gamma') + r_0\gamma'' &= 4C_2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из (4) находим

$$p^2 + q^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2(1 - \gamma''^2). \quad (7)$$

Найдем $\dot{\theta}^2$ из (5)

* Названо с целью экономии места.

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{1-\gamma''^2} \left(\frac{d\gamma''}{dt} \right)^2. \quad (8)$$

Исключим $(p\gamma + q\gamma')$ из следующих выражений:

$$\dot{\psi} = \frac{p\gamma + q\gamma'}{1-\gamma''^2}, \quad 4(p\gamma + q\gamma') + r_0\gamma'' = 4C_2,$$

тогда получим

$$\dot{\psi}^2 = \frac{(4C_2 - r_0\gamma'')^2}{16(1-\gamma''^2)}. \quad (9)$$

Определим из (6) $(p^2 + q^2)$:

$$p^2 + q^2 = \frac{1}{4}(2C_1 + 3\varepsilon\gamma''^2). \quad (10)$$

Перепишем (7), используя (8), (9), (10) и исключив $(p^2 + q^2)$, $\dot{\theta}^2$ и $\dot{\psi}^2$, найдем:

$$dt = \frac{d\gamma''}{\sqrt{a_4\gamma''^4 + a_3\gamma''^3 + a_2\gamma''^2 + a_1\gamma'' + a_0}}, \quad (11)$$

где

$$a_4 = -\frac{3}{4}\varepsilon, \quad a_3 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{16}(12\varepsilon - 8C_1 - r_0^2), \quad a_1 = \frac{1}{2}C_2r_0, \quad a_0 = \frac{1}{2}(C_1 - 2C_2^2).$$

Преобразуем (11)

$$dt = \frac{1}{a_{10}} \cdot \frac{d\gamma''}{\sqrt{-\gamma''^4 + b_3\gamma''^3 + b_2\gamma''^2 + b_1\gamma'' + b_0}}, \quad (12)$$

здесь

$$a_{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon, \quad b_3 = 0, \quad b_2 = \frac{a_2}{a_{10}}, \quad b_1 = \frac{a_1}{a_{10}}, \quad b_0 = \frac{a_0}{a_{10}}.$$

Перейдем от (12) к нормальной форме Лежандра [2], обозначая корни подкоренного полинома через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, располагая их в порядке убывания $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$ имеем два интервала

I) $\alpha_4 \leq \gamma'' \leq \alpha_3$ и II) $\alpha_2 \leq \gamma'' \leq \alpha_1$,

где полином

$$G_4(\gamma'') = -\gamma''^4 + b_3\gamma''^3 + b_2\gamma''^2 + b_1\gamma'' + b_0$$

положителен.

На I) интервале $\alpha_4 \leq \gamma'' \leq \alpha_3$ имеем

$$\gamma'' = \frac{\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{43} \sin^2 \lambda}{\alpha_{31} + \alpha_{43} \sin^2 \lambda} \text{ при } \gamma'' = \alpha_4, \lambda = 0; \quad (13)$$

при $\gamma'' = \alpha_3, \lambda = \frac{\pi}{2}$,

$$a_{10}dt = \mu_0 \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}}, \quad 0 < k^2 < 1, \quad (14)$$

$$\mu_0 = \frac{2}{(\alpha_{31}\alpha_{42})^{1/2}}, \quad k^2 = \frac{\alpha_{43}\alpha_{12}}{\alpha_{13}\alpha_{42}}, \text{ где } \alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i, (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Введем обозначение $a = \frac{a_{10}}{\mu_0}$, $u = at$, тогда имеем

$$u = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda}}, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda}}, \quad (15)$$

здесь K – полный эллиптический интеграл 1-го рода.

Обратив интеграл (15), имеем [3]:

$$\lambda = atu = \nu + \left(\frac{k^2}{8} + \frac{k^4}{16} \right) \sin 2\nu + O(k^5), \quad O(k^5) \approx 10^{-9}, \quad (16)$$

здесь $\nu = \frac{\pi}{2K} a \cdot t = nt$, $n = \frac{\pi a}{2K}$.

Таким образом, из (16) найдем

$$\lambda = nt + \left(\frac{1}{8} k^2 + \frac{1}{16} k^4 \right) \sin 2nt. \quad (17)$$

Теперь преобразуем (13)

$$\gamma'' = \gamma''_{00} + k^2 \gamma''_{02} + k^2 \gamma''_{12} \cos 2\nu + k^2 \gamma''_{22} \cos 4\nu \quad (18)$$

или

$$\gamma'' = \gamma''_{00} + k^2 \gamma''_{02} + k^2 \gamma''_{12} \cos 2nt + k^2 \gamma''_{22} \cos 4nt, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma''_{00} &= \frac{2\alpha_4 \alpha_{31} + \alpha_1 \alpha_{33}}{2\alpha_{31} + \alpha_{43}}, \quad \gamma''_{02} = -\frac{\alpha_{43}}{8} \left[\frac{1}{4(2\alpha_4 \alpha_{31} + \alpha_1 \alpha_{43})} + \frac{\alpha_1 \alpha_{13} \alpha_{42}}{\alpha_{12}} \right], \\ \gamma''_{12} &= \frac{\alpha_{13} \alpha_{42}}{\alpha_{12}} \left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_{31} + \alpha_{43}} - \frac{2\alpha_4 \alpha_{31} + \alpha_1 \alpha_{43}}{4} \right), \\ \gamma''_{22} &= \frac{\alpha_{43}}{8} \left(\frac{2\alpha_4 \alpha_{31} + \alpha_1 \alpha_{43}}{4} - \frac{\alpha_1 \alpha_{13} \alpha_{42}}{\alpha_1} \right). \end{aligned}$$

Угол нутации определяется из (5) и (18)

$$\theta = \arccos \left\{ \gamma''_{00} + k^2 \gamma''_{02} + k^2 \gamma''_{12} \cos 2nt + k^2 \gamma''_{22} \cos 4nt \right\}. \quad (19)$$

Угол прецессии найдем из (9)

$$\psi = \frac{1}{4} \int_0^t \frac{(4C_2 - r_0 \gamma'')}{1 - \gamma''^2} dt, \quad (20)$$

где γ'' определено выражением (18).

Угол собственного вращения найдем из (4)

$$\varphi = \int_0^t \left[r_0 - \gamma'' \cdot \frac{(4C_2 - r_0 \gamma'')}{4(1 - \gamma''^2)} \right] dt. \quad (21)$$

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Шинибаев М.Д. Поступательно-вращательные движения твердого тела в стационарном и нестационарном поле тяготения Земли. – Алматы, 2010. – 132 с.
- 2 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
- 3 Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. – М.: Наука, 1986. – 320 с.

REFERENCES

- 1 Shinibaev M.D. Postupatelnoe-vrshatelnye dvigeniya tverdogo tela v stazionarnom I nestazionarnom pole tyagoteniya Zemli. Almaty, 2010. 132 p. (in Russ.).
- 2 Korn G., Korn T. Spravochnik po matematyke. M.: Nauka, 1973. 832 p. (in Russ.).
- 3 Aksenov E.P. Spezialnye funkzii v nebesnoy mehanike. M.: Nauka, 1986. 320 p. (in Russ.).

Резюме

М. Д. Шыныбаев¹, А. А. Беков¹, А. Әбжапбаров², С. С. Дайырбеков³, Е. Қытайбеков³, С. Жолдасов³

¹Академик Ө. М. Сұлтанғазин атындағы Ғарыштық зерттеулер институты АҚ «ҰҒЗТО», Алматы, Қазақстан,

²М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан,

³Сырдария университеті, Жетісай, Қазақстан)

$\alpha_4 \leq \gamma'' \leq \alpha_3$ ИНТЕРВАЛЫНДА $A = B = 4C$ ШАРТЫНДАҒЫ ЭЙЛЕР БҰРЫШТАРЫН АНЫҚТАУ

$A = B = 4C$ интегралданатын кезеңіндегі қатты дененің айналмалы қозғалысын сипаттайтын Эйлер бұрыштары айқын түрде анықталды.

Өстік симметриялық дене $A = B = 4C$ жағдайында орталық ньютон өрісіндегі айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері жасанды жер серігінің математикалық моделін береді, егер ол қозғалыс жер маңындағы ғарыштық кеңістікте орындалса.

Зерттеу басқарылмайтын ғарыштық объектілеріне арналған (штаттық жағдайдан ығысқан жер серіктері, ғарыштық қоқыстар т.б.), сондықтан мақала өзекті проблемаға айналады.

Егер дифференциалдық теңдеулер қатты дененің массалық центріне қатысты қозғалысын сипаттайтын болса, онда жалпы теория бойынша шешімді табу үшін тәуелсіз төрт бірінші интегралдардың бар болуы жеткілікті. Бірақ ол тек теория, өйткені қозғалыс заңын ол интегралдардан қорытып алатын нақты әдіс жоқ. Бұл мақалада сондай әдіс орнатылған.

Есептің шешімі басқарылмайтын ғарыштық объектілердің қозғалысын талдауда қолданыста болады.

Тірек сөздер: динамика, қатты дене, күштік өріс, ньютон тартылыс өрісі, салмақ орталығы, айналмалы қозғалыс, дененің инерциялық моменттері.

Summary

M. D. Shinibaev¹, A. A. Bekov¹, A. Abzhapbarov², S. S. Dajyrbekov³, E. Kytajbekov³, S. Zholdasov³

¹Acad. A. M Sultangazin Space research institute, Almaty, Kazakhstan,

²M. Auezov South-Kazakhstan state university, Shymkent, Kazakhstan,

³University of the Syr-Dariya, Djetysay, Kazakhstan)

THE DEFINITION OF EULER ANGLES IN THE CASE $A = B = 4C$ IN THE INTERVAL $\alpha_4 \leq \gamma'' \leq \alpha_3$

We find the explicit functions for the Euler angles in the case of integrability of $A = B = 4C$.

Axisymmetric body that executes the rotary movement in Central new tanovska the gravitational field at $A = B = 4C$, is a model of any space objects that, which makes unmanaged rotational motion in the near-earth space, so the solution of the problem for today is an important issue. Previously, it was found that the differential equations of the problem of the movement-Institute of solid body about the center of mass in Newtonian gravitational field at $A = B = 4C$ allow the first four independent integral.

According to the General theory of the existence of these integrals leads to complete the task. Below is the output method of Euler angles of these first integrals.

The solution is fundamentally important in the analysis of movements unmanaged objects comrade in the near-earth space.

Keywords: dynamics, rigid body, the force field, the Newtonian gravitational field, the center of mass, rotational motion, the moments of inertia of the body.

Поступила 05.05.2014 г.

С. А. АЛДАШЕВ

(Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан)

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

Аннотация. В работе показано, что корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева–Бицадзе однозначно разрешима. Получен, также критерий единственности решения.

Ключевые слова: задача Дирихле, уравнение Лаврентьева–Бицадзе, цилиндрическая область.

Тірек сөздер: Дирихле есебі, Лаврентьев–Бицадзе теңдеуі, цилиндрлік аймақ.

Keywords: the Dirichlet problem, the equation of the Lavrent'ev-Bitsadze, the cylindrical region.

Проблема корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в специальных областях была объектом исследований многих авторов на плоскости и в пространстве.

Более полную библиографию работ, посвященных этой тематике, можно найти в монографиях [7, 8].

В данной работе показано, что задача Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе однозначно разрешима. Получен также критерий единственности регулярного решения.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ – части поверхности Γ , лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α – верхнее, а σ_β – нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$. Пусть далее S – общая часть границ областей $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$ представляющее множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m .

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерное уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$\operatorname{sgnt} \Delta_x u - u_{tt} = 0, \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m, m \geq 2$, которое играет важную роль в теории обтекания тонких тел [9].

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, \dots, m-1, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Задача D (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), u|_{\sigma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), u|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r, \theta), \quad (3)$$

при этом $\varphi_1(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta), \varphi_2(1, \theta) = \psi_2(\beta, \theta), \psi_1(0, \theta) = \psi(0, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \leq k \leq k_n, (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), W_2^l(S), l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева.

Имеет место ([10])

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, Если $l \geq m-1$ то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка, $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом

$$f_n^k(r) = \int_H f(r, \theta) Y_{n,m}^k(\theta) dH, \quad (4)$$

где, H -единичная сфера в E_m .

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^1(S)$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = const.$$

Через $\bar{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\bar{\psi}_{1n}^k(t)$, $\bar{\psi}_{2n}^k(t)$, обозначим коэффициенты ряда (4), соответственно функций $\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta) \in W_2^1(S), \psi_1(t, \theta) \in W_2^1(\Gamma_\alpha), \psi_2(t, \theta) \in W_2^1(\Gamma_\beta)$, $l \geq \frac{3m}{2}$, и имеет место

$$\cos \mu_{s,n} \alpha \operatorname{sh} \mu_{s,n} \beta \neq \sin \mu_{s,n} \alpha \operatorname{ch} \mu_{s,n} \beta, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

то задача D однозначно разрешима, где $\mu_{s,n}$ - положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+(m-2)/2}(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Теорема 2. Решение задачи D единственно, тогда и только тогда, когда выполняется условие (5).

Доказательство теоремы 1. В сферических координатах уравнения (1) в области Ω_α имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_{tt} = 0, \quad (6)$$

$$\delta = - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(g_j \sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно ([10]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$ каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи D в области Ω_α принадлежит классу $C(\Omega_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, то его можно искать в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (7)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ -функций, подлежащие определению.

Подставляя (7) в (6), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([10]), будет иметь

$$\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8)$$

При этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \bar{\psi}_{1n}^k(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

В (8), (9) произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \bar{\psi}_{1n}^k(t)$, получим

$$\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{v}_{nr}^k - \bar{v}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{v}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (10)$$

$$\bar{v}_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = 0 \quad k = \overline{1, n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

$$\bar{f}_n^k(r, t) = \psi_{1ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_{1n}^k, \quad \varphi_{1n}^k(r) = \bar{\varphi}_{1n}^k - \psi_{1n}^k(\alpha).$$

Произведя замену $\vartheta_n^k(r, t) = r^{\frac{1-m}{2}} \bar{v}_n^k(r, t)$, задачу (10), (11) приведем к следующей задаче

$$L \vartheta_n^k \equiv \vartheta_{nrr}^k - \vartheta_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \vartheta_n^k = f_n^k(r, t), \quad (12)$$

$$\vartheta_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \vartheta_n^k(1, t) = 0 \quad (13)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4}, f_n^k(r, t) = r^{\frac{1-m}{2}} \bar{f}_n^k(r, t), \varphi_n^k(r, t) = r^{\frac{1-m}{2}} \bar{\varphi}_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (12),(13) ищем в виде

$$\vartheta_n^k(r, t) = \vartheta_{1n}^k(r, t) + \vartheta_{2n}^k(r, t), \quad (14)$$

где $\vartheta_{1n}^k(r, t)$ -решение задачи

$$L\vartheta_{1n}^k = f_n^k(r, t), \quad (15)$$

$$\vartheta_{1n}^k(r, \alpha) = 0, \vartheta_{1n}^k(1, t) = 0. \quad (16)$$

а $\vartheta_{2n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$L\vartheta_{2n}^k = 0, \quad (17)$$

$$\vartheta_{2n}^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_n^k(r), \vartheta_{2n}^k(r, t) = 0 \quad (18)$$

Решение выше указанных задач, аналогично [11] рассмотрим в виде

$$\vartheta_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t). \quad (19)$$

При этом пусть

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \bar{\varphi}_n^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \quad (20)$$

Подставляя (19) в (15),(16), с учетом (20), получим

$$R_{srr} + \frac{\lambda_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, 0 < r < 1, \quad (21)$$

$$R_s(1) = 0, |R_s(0)| < \infty, \quad (22)$$

$$T_{stt} + \mu T_s = -a_{s,n}(t), 0 < t < \alpha, \quad (23)$$

$$T_s(\alpha) = 0. \quad (24)$$

Ограниченным решением задачи (21),(22) является ([12])

$$R_{s,n}(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (25)$$

где $\nu = n + \frac{m-2}{2}, \mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (23) представимо в виде ([12])

$$T_{s,n}(t) = c_{1s} \cos \mu_{s,n} t + c_{2s} \sin \mu_{s,n} t + \frac{\cos \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{s,n}(\xi) \sin \mu_{s,n} \xi d\xi - \frac{\sin \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{s,n}(\xi) \cos \mu_{s,n} \xi d\xi, \quad (26)$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив условию (24) будем иметь

$$c_{1s} \cos \mu_{s,n} \alpha + c_{2s} \sin \mu_{s,n} \alpha + \frac{\cos \mu_{s,n} \alpha}{\mu_{s,n}} \int_0^\alpha a_{s,n}(\xi) \sin \mu_{s,n} \xi d\xi - \frac{\sin \mu_{s,n} \alpha}{\mu_{s,n}} \int_0^\alpha a_{s,n}(\xi) \cos \mu_{s,n} \xi d\xi = 0. \quad (27)$$

Подставляя (25) в (20) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (28)$$

$$r^{-\frac{1}{2}} \bar{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} J_\nu(\mu_{s,n} r), 0 < r < 1.$$

Ряды (28)- разложения в ряды Фурье-Бесселя ((13)), если

$$a_{s,n}(t) = \frac{2}{[J_{v+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_v(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (29)$$

$$b_{s,n} = \frac{2}{[J_{v+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \bar{\varphi}_{1n}^k(\xi, t) J_v(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (30)$$

$\mu_{s,n}, s = 1, 2, \dots$ -положительные нули функций Бесселя $J_v(\mu_{s,n}r)$.

Из (25), (26) получим решение задачи (15), (16)

$$\vartheta_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_v(\mu_{s,n}r), \quad (31)$$

где $a_{s,n}(t)$ определяется из (29).

Далее, подставляя (19) в (17), (18), с учетом (20), будем иметь

$$T_{stt} + \mu_{s,n}^2 T_s = 0, 0 < t < \alpha, \quad (32)$$

$$T_s(\alpha) = b_{s,n}. \quad (33)$$

Общее решение уравнения (32) записывается в виде

$$T_{s,n}(t) = c'_{1s} \cos \mu_{s,n} t + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} t, \quad (34)$$

удовлетворив которого условию (33) получим

$$c'_{1s} \cos \mu_{s,n} \alpha + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} \alpha = b_{s,n}, \quad (35)$$

где $b_{s,n}$ находится из (30).

Из (25), (34) найдем решение задачи (17), (18)

$$\vartheta_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} (c'_{1s} \cos \mu_{s,n} t + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} t) J_v(\mu_{s,n}r) \quad (36)$$

Теперь переходим в области Ω_β к первой краевой задаче для уравнения

$$u_{rrr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \Delta u + u_{tt} = 0 \quad (37)$$

с условием (3).

Решения задачи (37), (3) будем искать в виде (7).

Подставляя (7) в (37) получим уравнение

$$u_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k + \bar{u}_{ntt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (38)$$

при этом краевое условие (3) запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, \beta) = \varphi_{2n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_{2n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots. \quad (39)$$

Произведя замены $\bar{\omega}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_{2n}^k(t)$, а затем $\bar{\omega}_n^k(r, t) = r^{\frac{1-m}{2}} \omega_n^k(r, t)$ задачу (38),(39) приведем к следующей задаче

$$L\omega_n^k = \omega_{nrr}^k + \omega_{ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2} \omega_n^k = g_n^k(r, t), \quad (40)$$

$$\omega_n^k(r, \beta) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \omega_n^k(1, t) = 0, \quad (41)$$

$$g_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \left[-\psi_{2n}^k(t) + \frac{\lambda_n}{r^2} \psi_{2n}^k(t) \right], \quad \bar{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} [\varphi_{2n}^k(r) - \psi_{2n}^k(\beta)].$$

Решение задачи (40),(41) ищем в виде

$$\omega_n^k(r, t) = \omega_{1n}^k(r, t) + \omega_{2n}^k(r, t), \quad (42)$$

где $\omega_{1n}^k(r, t)$ решение задачи

$$L\omega_{1n}^k = g_n^k(r, t), \quad (43)$$

$$\omega_{1n}^k(r, \beta) = 0, \quad \omega_{1n}^k(1, t) = 0, \quad (44)$$

а $\omega_{2n}^k(r, t)$ – решение задачи

$$L\omega_{2n}^k = 0, \quad (45)$$

$$\omega_{2n}^k(r, t) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \omega_{2n}^k(1, t) = 0. \quad (46)$$

Решение выше указанных задач, рассмотрим в виде

$$\omega_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) V_s(t), \quad (19')$$

при этом пусть

$$g_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} d_{s,n}(t) R_{s,n}(r), \quad \bar{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n} R_{s,n}(r). \quad (47)$$

Подставляя (19') в (43), (44), с учетом (47), получим задачу (21),(22), решение которого имеет вид (25), и задачу

$$V_{stt} - \mu_{s,n}^2 V_s = d_{s,n}(t), \quad \beta < t < 0, \quad (48)$$

$$V_s(\beta) = 0. \quad (49)$$

Общее решение уравнения (48) представимо в виде ([10])

$$V_{s,n}(t) = c_{1s} ch\mu_{s,n}t + c_{2s} sh\mu_{s,n}t + \frac{ch\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}} \int_t^0 d_{s,n}(\xi) sh\mu_{s,n}\xi d\xi - \frac{sh\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}} \int_t^0 d_{s,n}(\xi) ch\mu_{s,n}\xi d\xi, \quad (50)$$

удовлетворив которого условию (49) будем иметь

$$c_{1s} ch\mu_{s,n}t + c_{2s} sh\mu_{s,n}t + \frac{ch\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}} \int_t^0 d_{s,n}(\xi) sh\mu_{s,n}\xi d\xi - \frac{sh\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}} \int_t^0 d_{s,n}(\xi) ch\mu_{s,n}\xi d\xi = 0. \quad (51)$$

Подставляя (25) в (47) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} g_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} d_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \bar{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n} J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad 0 < r < 1.$$

которые являются рядами Фурье-Бесселя, если

$$d_{s,n}(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} g_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi. \quad (52)$$

$$e_{s,n} = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \bar{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi \quad (53)$$

Из (25), (50) получим решение задачи (43), (44)

$$\omega_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad (54)$$

где $d_{s,n}(t)$ определяется из (52).

Далее, подставляя (19') в (45), (46), с учетом (47), получим задачу

$$V_{stt} - \mu_s^2 V_s = 0, \quad \beta < t < 0, \quad (55)$$

$$V_s(\beta) = e_{s,n}. \quad (56)$$

Общее решение уравнения (55) имеет вид

$$V_{s,n}(t) = c'_{1s} ch\mu_{s,n}t + c'_{2s} sh\mu_{s,n}t, \quad (57)$$

удовлетворив условию (56) имеем

$$c'_{1s} ch\mu_{s,n}\beta + c'_{2s} sh\mu_{s,n}\beta = e_{s,n}, \quad (58)$$

где $e_{s,n}$ находится из (53).

Из (25), (58) найдем решение задачи (45), (46)

$$\omega_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} (c'_{1s} ch\mu_{s,n}t + c'_{2s} sh\mu_{s,n}t) J_\nu(\mu_{s,n}r). \quad (59)$$

Для определения неизвестных коэффициентов c_{1s}, c_{2s} и c'_{1s}, c'_{2s} из (26), (51) и (35), (58) получим следующие системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \mu_{s,n}(c_{1s} \cos \mu_{s,n} \alpha + c_{2s} \sin \mu_{s,n} \alpha) = (\sin \mu_{s,n} \alpha) \int_0^\alpha a_{s,n}(\xi) \cos \mu_{s,n} \xi d\xi - (\cos \mu_{s,n} \alpha) \int_0^\alpha a_{s,n}(\xi) \sin \mu_{s,n} \xi d\xi, \\ \mu_{s,n}(c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \beta + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \beta) = (\operatorname{sh} \mu_{s,n} \beta) \int_\beta^\alpha d_{s,n}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi d\xi - (\operatorname{ch} \mu_{s,n} \beta) \int_\beta^\alpha d_{s,n}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi d\xi, \\ c'_{1s} \cos \mu_{s,n} \alpha + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} \alpha = b_{s,n}, \\ c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \beta + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \beta = e_{s,n} \end{cases}$$

которые однозначно разрешимы, если выполняется условие (5).

Следовательно, из (14), (42) получим единственное решение задачи D в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{1-m}{2}} [\vartheta_{1n}^k(r, t) + \vartheta_{2n}^k(r, t)] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), t > 0, \tag{60}$$

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{1-m}{2}} [\omega_{1n}^k(r, t) + \omega_{2n}^k(r, t)] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), t < 0,$$

где $\vartheta_{1n}^k(r, t), \vartheta_{2n}^k(r, t)$ определяются из (31), (36), а $\omega_{1n}^k(r, t), \omega_{2n}^k(r, t)$ из (54), (59).

Учитывая следующие свойства нулей функций Бесселя ([14]):

1⁰. Если $\mu_{v,1}, \mu_{v,2}, \dots$ – положительные нули функций $J_\nu(z)$, упорядоченные по возрастанию значений, то

$$0 < \mu_{v,1} < \mu_{v+1,1} < \mu_{v,2} < \mu_{v+1,2} < \mu_{v,3} < \dots, \quad v > -1.$$

2⁰. Пусть $\mu_\nu, \mu'_\nu, \mu''_\nu$ являются наименьшими положительными нулями функций $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z), J''_\nu(z)$ соответственно

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{v(v+2)} < \mu_\nu < \sqrt{2(v+1)(v+3)}, v > 0, \\ \sqrt{v(v+2)} < \mu'_\nu < \sqrt{2v(v+1)}, v > 0 \\ \sqrt{v(v-1)} < \mu''_\nu < \sqrt{v^2-1}, v > 1, \end{aligned}$$

и формулы ([13, 11])

$$\begin{aligned} \operatorname{sinz} &= z(1 - z \sum_{n=1}^{\infty} (4n^2 - 1)^{-1} [J_n(nz)]^2), \\ J_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0, \\ 2J'_\nu(z) &= J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z), \end{aligned}$$

применяя признак Даламбера, доказываются, что ряды (31), (36), (54), (59) и продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Далее используем оценки ([13, 10])

$$|J_\nu(z)| \leq \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \tag{61}$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, j = \overline{1, m-1}, q = 0, 1, \dots,$$

$\Gamma(z)$ – гамма функция, а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta), \psi_1(t, \theta), \psi_2(t, \theta)$ показывается, что полученное решение (60) принадлежит классу $C(\overline{\Omega_{\alpha\beta}}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$.

Теорема 1 доказано.

Доказательство теоремы 2. Если выполняется условие (5), то из теоремы 1 вытекает, что решение задачи D единственно.

Пусть теперь условие (5) нарушено, хотя бы для одного $s = l$.

Тогда, если решение однородной задачи, соответствующей задаче D будем искать в виде (6), то приходим к краевым задачам $t > 0$

$$L\vartheta_n^k = 0, \\ \vartheta_n^k(r, \alpha) = 0, \vartheta_n^k(1, t) = 0,$$

и при $t < 0$

$$L\omega_n^k = 0, \\ \omega_n^k(r, \beta) = 0, \omega_n^k(1, t) = 0.$$

решениями которых, являются функции

$$\vartheta_n^k(r, t) = \sqrt{r}(\sin\mu_{l,n}t + \cos\mu_{l,n}t)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r), \\ \omega_n^k(r, t) = \sqrt{r}\left(\operatorname{sh}\mu_{l,n}t + \operatorname{ch}\mu_{l,n}t\right)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r).$$

Следовательно, нетривиальные решения однородной задачи D записываются в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} (\sin\mu_{l,n}t + \cos\mu_{l,n}t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r) Y_{n,m}^k(\theta), \\ t > 0,$$

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(2-m)}{2}} (\operatorname{sh}\mu_{l,n}t + \operatorname{ch}\mu_{l,n}t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r) Y_{n,m}^k(\theta), \\ t < 0.$$

Из оценок (61) следует, аналогично [15,16], что она принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_{\alpha} \cup \Omega_{\beta})$, если $p > \frac{3m}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Шабат Б.В. Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. – 1957. – Т. 112, № 3. – С. 386-389.
- 2 Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // ДАН СССР. – 1958. – Т. 122, № 2. – С.167-170.
- 3 Солдатов А.П. Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Доклады РАН. – 1993. – Т. 336, № 6. – С. 696-698; – Т. 333, № 1. – С. 16-18.
- 4 Сабитов К.Б. Задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Доклады РАН. – 2007. – Т. 413, № 1. – С. 23-26.
- 5 Алдашев С.А. Критерий единственности решения задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Материалы межд. Российско-Болгарского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». – Нальчик, НИИПИМА КБНЦ РАН, 2010. – С. 22-23.
- 6 Dunninger D.R., Zachmanoglou E.C. The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains // J. Math. Mech. – 1969 – Vol. 18, 8.
- 7 Хачев М.М. Первая краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. – Нальчик: Эльбрус, 1998. – 168 с.
- 8 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
- 9 Pivko S. On nonlinear effects in stender and a related one // Publ. Inst. Math. N.S. – 1969. – Vol. 9(23).
- 10 Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
- 11 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 659 с.
- 12 Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
- 13 Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 297 с.
- 14 Ватсон Г. Теория бесселевых функций. – Т. 1. – М.: ИЛ, 1949.
- 15 Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.
- 16 Алдашев С.А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 34, № 1. – С. 64-68.

REFERENCES

- 1 Shabat B.V. Primery reshenija zadachi Dirihle dlja uravnenija smeshannogo tipa. DAN SSSR. 1957. T. 112, № 3. S. 386-389.
- 2 Bicadze A.V. Nekorrektnost' zadachi Dirihle dlja uravnenij smeshannogo tipa v smeshannyh oblastjakh. DAN SSSR. – 1958. T. 122, № 2. S.167-170.

- 3 Soldatov A.P. Zadachi tipa Dirihle dlja uravnenija Lavrent'eva-Bicadze. Doklady RAN. 1993. T. 336, № 6. S. 696-698; T. 333, № 1. S. 16-18.
- 4 Sabitov K.B. Zadachi Dirihle dlja uravnenija smeshannogo tipa v prjamougol'noj oblasti. Doklady RAN. 2007. T. 413, № 1. S. 23-26.
- 5 Aldashev S.A. Kriterij edinstvennosti reshenija zadachi Dirihle v cilindricheskoj oblasti dlja mnogomernogo uravnenija Lavrent'eva-Bicadze. Materialy mezhd. Rossijsko-Bolgarskogo simpoziuma «Uravnenija smeshannogo tipa i rodstvennye problemy analiza i informatiki». Nal'chik, NIIPMA KBNC RAN, 2010. S. 22-23.
- 6 Dunninger D.R., Zachmanoglou E.C. The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains. J. Math. Mech. 1969 Vol. 18, 8.
- 7 Hachev M.M. Pervaja kraevaja zadacha dlja linejnyh uravnenij smeshannogo tipa. Nal'chik: Jel'brus, 1998. 168 s.
- 8 Nahushev A.M. Zadachi so smeshheniem dlja uravnenija v chastnyh proizvodnyh. M.: Nauka, 2006. 287 s.
- 9 Pivko S. On nonlinear effects in stender and a related one. Publ. I'inst. Math. N.S. 1969. Vol. 9(23).
- 10 Mihlin S.G. Mnogomernye singuljarnye integraly i integral'nye uravnenija. M.: Fizmatgiz, 1962. 254 s.
- 11 Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1977. 659 s.
- 12 Kamke Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam. M.: Nauka, 1965. 703 s.
- 13 Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkicii T. 2. M.: Nauka, 1974. 297 s.
- 14 Watson G. Teorija besselevykh funkcij. T. 1. M.: IL, 1949.
- 15 Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlja mnogomernyh giperbolicheskikh i smeshannyh uravnenij. Almaty: Gylym, 1994. 170 s.
- 16 Aldashev S.A. O zadachah Darbu dlja odnogo klassa mnogomernyh giperbolicheskikh uravnenij. Differenc. uravnenija. 1993. T. 34, № 1. S. 64-68.

Резюме

С. А. Алдашев

(Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан)

КӨП ӨЛШЕМДІ ЛАВРЕНТЬЕВ-БИЦАДЗЕ ТЕНДЕУІНЕ ЦИЛИНДРЛІК АЙМАҚТА ДИРИХЛЕ ЕСЕБІНІҢ КОРРЕКТІЛІГІ

Жұмыста көп өлшемді Лаврентьев-Бицадзе тендеуіне цилиндрлік аймақта Дирихле есебінің корректілігі көрсетілген және де шешімнің жалғыздық критерийі алынған.

Тірек сөздер: Дирихле есебі, Лаврентьев–Бицадзе тендеуі, цилиндрлік аймақ.

Summary

S. A. Aldashev

(Kazakh national pedagogical university named after Abai, Almaty, Kazakhstan)

THE CORRECTNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR MULTIDIMENSIONAL EQUATIONS OF THE LAVRENT'EV-BITSADZE

It is shown that the correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional equations of the Lavrent'ev-Bitsadze uniquely solvable. Also obtain a uniqueness criterion for solutions.

Keywords: the Dirichlet problem, the equation of the Lavrent'ev-Bitsadze, the cylindrical region.

Л. А. АЛЕКСЕЕВА

(Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан)

СТАЦИОНАРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТЕРМОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

Аннотация. Для исследования термодинамики стержневых конструкций рассмотрены задачи стационарных колебаний термоупругого стержня в предположении, что известны действующие на него силы и тепловые источники. На основе метода обобщенных функций построены аналитические решения стационарных краевых задач при заданных двух из четырех значений комплексных амплитуд перемещения, напряжения, температуры и теплового потока на каждом из концов стержня.

Ключевые слова: термоупругость, стержень, стационарные колебания, фундаментальная матрица, метод обобщенных функций.

Тірек сөздер: термосерпімділік, өзек, стационарлық тербеліс, фундаментальдық матрица, жинақталған функциялар әдісі.

Keywords: thermoelasticity, rod, stationary oscillations, fundamental matrix method of generalized functions.

Стержневые конструкции широко используются в машиностроении в качестве соединительных и передаточных звеньев для конструктивных элементов самых разных машин и механизмов. В процессе эксплуатации они подвергаются переменным механическим и термическим воздействиям, которые создают сложное напряженно-деформированное состояние в конструктивных элементах, зависящее от их температуры, и влияющее на их прочность и надежность. Поэтому определение термо-напряженного состояния стержневых конструкций с учетом их механических свойств (в частности, упругости) относится к числу актуальных научно-технических проблем.

Изучение термодинамических процессов методом математического моделирования приводит к краевым задачам для термоупругих сред, которые описываются системами дифференциальных уравнений смешанного гипербола-параболического типа. Существуют различные модели термоупругих сред. При изучении медленных динамических процессов чаще используется модель *несвязанной термоупругости*, в которой не учитывается влияние движения среды на ее температурное поле.

Быстрые вибрационные процессы в конструкциях влияют на температурное поле в них. При изучении таких процессов следует использовать модель *связанной термоупругости*. Здесь рассмотрены краевые задачи (КЗ) стационарных колебаний термоупругого стержня с использованием этой модели в предположении, что известны действующие на него силы и тепловые источники. На основе метода обобщенных функций построены аналитические решения стационарных краевых задач при заданных двух из четырех значений комплексных амплитуд перемещений, напряжений, температуры и тепловых потоков на каждом из концов стержня.

1. Постановка краевых задач. Рассмотрим термоупругий стержень длины $2L$, который характеризуется плотностью ρ , жесткостью EJ и термоупругими константами γ , η и κ [1, 2]. Перемещения сечений стержня и температурное поле стержня описывается системой гипербола-параболических уравнений вида:

$$\rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1 = 0, \quad (1)$$

$$\theta_{,xx} - \kappa^{-1} \theta_{,t} - \eta u_{,xt} + F_2 = 0.$$

Здесь $u(x,t)$ – компоненты продольных смещений, $\theta(x,t)$ – относительная температура ($\theta = T(x,t) - T(x,0)$), T – абсолютная температура, c – скорость распространения упругих волн в

стержне, ρ – погонная плотность, $c = \sqrt{\frac{EJ}{\rho}}$. Предполагается, что на стержень действует периоди-

ческая во времени сила вида

$$F_1(x, t) = F_1(x) \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

а $F_2 = (\lambda_0 \kappa)^{-1} W(x, t)$, $W(x, t) = W(x) \exp(-i\omega t)$, где W – количество выделенного (поглощенного) тепла на единицу объема за единицу времени, λ_0 – коэффициент теплопроводности. Символ после запятой обозначает частную производную по указанной в индексе переменной ($u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ и т.д.).

Термоупругое напряжение в стержне определяется формулой:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta \quad (3)$$

Краевые условия на концах стержня ($x = x_1 = -L$, $x = x_2 = L$) могут быть различными. Здесь сформулируем их для четырех краевых задач, обычно рассматриваемых в классической теории термоупругости [1,2]:

$$1 \text{ КЗ} \quad u(x_j, t) = w_j \exp(-i\omega t), \quad \theta(x_j, t) = \theta_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2 \quad (4)_1$$

$$2 \text{ КЗ} \quad \sigma(x_j, t) = P_j \exp(-i\omega t), \quad \theta_{,x}(x_j, t) = q_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2 \quad (4)_2$$

$$3 \text{ КЗ} \quad u(x_j, t) = w_j \exp(-i\omega t), \quad \theta_{,x}(x_j, t) = q_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2 \quad (4)_3$$

$$4 \text{ КЗ} \quad \sigma(x_j, t) = P_j \exp(-i\omega t), \quad \theta(x_j, t) = \theta_j \exp(-i\omega t); \quad j = 1, 2 \quad (4)_4$$

w_j, θ_j, P_j, q_j – комплексные амплитуды, ω – частота колебаний. Наряду с ними можно поставить краевые задачи, когда на одном конце стержня задаются условия одной краевой задачи, а на втором – условия другой. Требуется найти решение этих задач.

2. Обобщенное решение краевой задачи. В силу гармоничности по времени действующих сил и граничных условий, решение задачи можно искать в виде $(u, \theta) = (u(x), \theta(x)) \exp(-i\omega t)$, где комплексные амплитуды $(u(x), \theta(x))$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho c^2 u_{,xx} + \rho \omega^2 u - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1(x) &= 0, \\ \theta_{,xx} + i\omega \kappa^{-1} \theta + i\omega \eta u_{,x} + F_2(x) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим комплексные амплитуды решения, удовлетворяющие (5) и условиям (4) соответственно решаемой КЗ, если $F_1(x), F_2(x)$ принадлежат классу обобщенных функций медленного роста $S'(R^1)$ [3].

Для решения задачи используется метод обобщенных функций, основные идеи которого изложены в [4]. Для этого представим обобщенное решение КЗ в виде

$$(\hat{u}(x), \hat{\theta}(x)) = (u(x), \theta(x)) H(L - |x|),$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда, равная 0.5 в точке разрыва, $(u(x), \theta(x))$ – ее классическое решение. Из (4), используя операцию дифференцирования регулярных кусочно-дифференцируемых обобщенных функций [3], получим на $S'(R^1)$:

$$\begin{aligned}
 \rho c^2 \hat{u}_{,xx} + \rho \omega^2 \hat{u} - \gamma \hat{\theta}_{,x} &= \rho c^2 (u(-L)\delta'(x+L) - u(L)\delta'(x-L)) + \\
 &+ \rho c^2 ((u_{,x}(-L)\delta(x+L) - u_{,x}(L)\delta(x-L))) - \\
 &- \gamma \theta(-L)\delta(x+L) + \gamma \theta(L)\delta(x-L) - \rho F_1(x)H(L-|x|), \\
 \hat{\theta}_{,xx} + i\omega \kappa^{-1} \hat{\theta} + i\omega \eta \hat{u}_{,x} &= i\omega \eta ((u(-L)\delta(x+L) - u(L)\delta(x-L))) + \\
 &+ \theta(-L)\delta'(x+L) - \theta(L)\delta'(x-L) + \\
 &+ \theta_{,x}(-L)\delta(x+L) - \theta_{,x}(L)\delta(x-L) - F_2(x)H(L-|x|),
 \end{aligned} \tag{6}$$

$\delta(x)$ – функция Дирака. Коротко запишем эту систему в виде

$$\sum_{j=1}^2 D_{kj}(\partial_x) \hat{u}_j(x) = \hat{G}_k(x, w_1, w_2, u'(-L), u'(L), \theta_1, \theta_2, \theta'(-L), \theta'(L)) + \hat{F}_k(x), \quad k=1, 2.$$

Требуется определить решение (6) при полученной сингулярной правой части, которая зависит от значений искомым функций в граничных точках и их производных.

Решение системы уравнений (6) имеет вид свертки:

$$\hat{u}_k(x) = \sum_{j=1}^2 U_k^j(x, \omega) * \hat{G}_j(x, \dots) + \sum_{j=1}^2 U_k^j(x, \omega) * \hat{F}_j(x), \quad k=1, 2, \tag{7}$$

где $U_k^j(x, \omega)$ – матрица фундаментальных решений системы уравнений (4):

$$\sum_{j=1}^2 D_{kj}(\partial_x) U_j^l(x) = \delta_k^l \delta(x), \quad k, l=1, 2, \tag{8}$$

δ_k^l – символ Кронекера. Как известно, если такая свертка существует, то обобщенное решение существует и оно единственно. А если оно регулярное и дифференцируемое, то совпадает с классическим.

Подставляя в (7) правую часть (5) и вычисляя, получим решение задачи в виде

$$\begin{aligned}
 u(x)H(|x|-L) &= F_1 * U_1^1 + F_2 * U_1^2 + \\
 + c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} &\left\{ (p_k - \tilde{\gamma} \theta_k) U_1^1(x - (-1)^k L, \omega) + u_k(\omega) U_{1,x}^1(x - (-1)^k L, \omega) \right\} + \\
 + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} &\left\{ (q_k + i\omega \eta w_k) U_1^2(x - (-1)^k L, \omega) + \theta_k(\omega) U_{1,x}^2(x - (-1)^k L, \omega) \right\}
 \end{aligned} \tag{9}_1$$

$$\begin{aligned}
 \theta(x)H(L-|x|) &= F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2 + \\
 + c^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} &\left\{ (p_k - \gamma \theta_k) U_2^1(x - (-1)^k L, \omega) + w_k U_{2,x}^1(x - (-1)^k L, \omega) \right\} + \\
 + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} &(q_k + i\omega \eta w_k) U_2^2(x - (-1)^k L, \omega) + \theta_k U_{2,x}^2(x - (-1)^k L, \omega)
 \end{aligned} \tag{9}_2$$

Формулы (9) определяют перемещение и температуру внутри стержня по известным перемещениям, напряжениям, температуре и тепловым потокам на его концах. Однако, для каждой краевой задачи известны только четыре граничных значения комплексных амплитуд, например, для КЗ1 известны только перемещения и температура на концах стержня. Для ее решения надо определить напряжения и тепловые потоки на его концах.

Аналогично для других КЗ. Для определения недостающих краевых значений следует использовать краевые условия, исходя из свойств фундаментальной матрицы $U_k^j(x, \omega)$.

3. Матрица фундаментальных решений и ее свойства. Фундаментальную матрицу $U_k^j(x, \omega)$ удается построить аналитически с помощью обобщенного преобразования Фурье уравнений (8). Ее трансформанта Фурье имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1^j(\xi, \omega) &= \frac{\delta_1^j(\xi^2 - i\omega k^{-1}) + i\xi\gamma\delta_2^j}{\Delta(\xi, \omega)}, \\ \bar{U}_2^j(\xi, \omega) &= \frac{\xi\omega\eta\delta_1^j + (\xi^2 c^2 - \omega^2)\delta_2^j}{\Delta(\xi, \omega)}, \quad j=1,2, \end{aligned} \tag{10}$$

где знаменатель – определитель соответствующей алгебраической системы уравнений относительно ее компонент – имеет вид:

$$\Delta(\xi, \omega) = (\xi^2 - ik^{-1}\omega)(c^2\xi^2 - \omega^2) - i\gamma\eta\xi^2\omega = c^2(\xi^2 - \lambda_1)(\xi^2 - \lambda_2). \tag{11}$$

Корни квадратного относительно ξ^2 уравнения: $\Delta(\xi, \omega) = 0$ -комплексные:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\omega}{2c^2} \left\{ (\omega + i\gamma\eta) + ic^2k^{-1} \pm \sqrt{(\omega + i(\gamma\eta + c^2k^{-1}))^2 - 4i\omega c^2k^{-1}} \right\},$$

зависят от трех безразмерных параметров среды: $\nu = \frac{L\omega}{c}$, $\alpha = \frac{\gamma\eta}{\omega}$, $\beta = \frac{c^2k^{-1}}{\omega}$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{\nu^2}{2L^2} \left\{ 1 + i(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(1 + i(\alpha - \beta))^2 - 4i\beta} \right\} \tag{12}$$

Для построения оригинала удобно разложить $\frac{1}{\Delta(\xi, \omega)}$ в простые дроби. Тогда компоненты трансформанты (10) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1^j &= \frac{\delta_1^j(\xi^2 - i\omega k^{-1}) + i\xi\gamma\delta_2^j}{(\xi^2 - \lambda_1)(\xi^2 - \lambda_2)} = \frac{\delta_1^j(\xi^2 - i\omega k^{-1}) + i\xi\gamma\delta_2^j}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{1}{(\xi^2 - \lambda_1)} - \frac{1}{(\xi^2 - \lambda_2)} \right\} \\ \bar{U}_2^j &= \frac{\xi\omega\eta\delta_1^j + (\xi^2 c^2 - \omega^2)\delta_2^j}{(\xi^2 - \lambda_1)(\xi^2 - \lambda_2)} = \frac{\xi\omega\eta\delta_1^j + (\xi^2 c^2 - \omega^2)\delta_2^j}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ \frac{1}{(\xi^2 - \lambda_1)} - \frac{1}{(\xi^2 - \lambda_2)} \right\} \end{aligned} \tag{13}$$

Выражениям, стоящих в числителях в пространстве оригиналов соответствуют следующие дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} \delta_1^j(\xi^2 - i\omega k^{-1}) + i\xi\gamma\delta_2^j &\Leftrightarrow \delta_1^j(-i\omega k^{-1} - \partial_x \partial_x) - \gamma\delta_2^j \partial_x \\ \xi\omega\eta\delta_1^j + (\xi^2 c^2 - \omega^2)\delta_2^j &\Leftrightarrow i\omega\eta\delta_1^j \partial_x - \delta_2^j(c^2 \partial_x \partial_x + \omega^2) \end{aligned} \tag{14}$$

Поэтому для восстановления оригиналов надо построить оригинал функции

$$\psi^*(\xi, \lambda) = (\xi^2 - \lambda)^{-1} = F_x[\psi(x, \lambda)].$$

Нетрудно показать, что функция $\frac{\sin k|x|}{k}$ имеет обобщенное преобразование Фурье вида:

$$F_x \left[\frac{\sin k|x|}{k} \right] = \left(\frac{1}{(\xi^2 - (k + i0)^2)} + \frac{1}{(\xi^2 - (k - i0)^2)} \right),$$

откуда следует, что

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin|x|\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \quad (15)$$

Используя (15) и (14), получим выражения для компонент фундаментальной матрицы:

$$U_1^j(x, \omega) = \frac{\delta_1^j H_0(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ i\omega\kappa^{-1} \left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} - \frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} \right) + \left(\sqrt{\lambda_1} \sin x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin x\sqrt{\lambda_2} \right) \right\} -$$

$$- \frac{\gamma\delta_2^j H_0(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2} \right), \quad j=1, 2$$

(16)

$$U_2^j(x, \omega) =$$

$$= \frac{H_0(x)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left\{ i\omega\eta\delta_1^j \left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2} \right) - \omega^2 \left(\frac{\sin x\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}} - \frac{\sin x\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_2}} \right) \delta_2^j + \right.$$

$$\left. + c^2 \left(\sqrt{\lambda_1} \sin x\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin x\sqrt{\lambda_2} \right) \delta_2^j \right\}, \quad j=1, 2$$

где

$$H_0(x) = H(x) - \frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2} (H(x) - H(-x)) \quad (17)$$

(заметим, что риманова поверхность матрицы по ω однолистая, так как значения компонент U_k^j не зависят от выбора знака радикалов $\sqrt{\lambda_j}$).

Как видим, компоненты фундаментальной матрицы являются регулярными обобщенными функциями, U_k^j непрерывны в точке $x=0$:

$$U_k^j(\pm 0, \omega) = U_k^j(0, \omega) = 0, \quad k, j=1, 2, \quad (18)$$

а ее производные

$$\partial_x U_1^j(x, \omega) = \left[\frac{(\lambda_1 - i\omega\kappa^{-1})}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2} \right) + \cos x\sqrt{\lambda_2} \right] \operatorname{sgn}(x)\delta_1^j -$$

$$+ \frac{\gamma}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\sqrt{\lambda_1} \sin|x|\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin|x|\sqrt{\lambda_2} \right) \delta_2^j$$

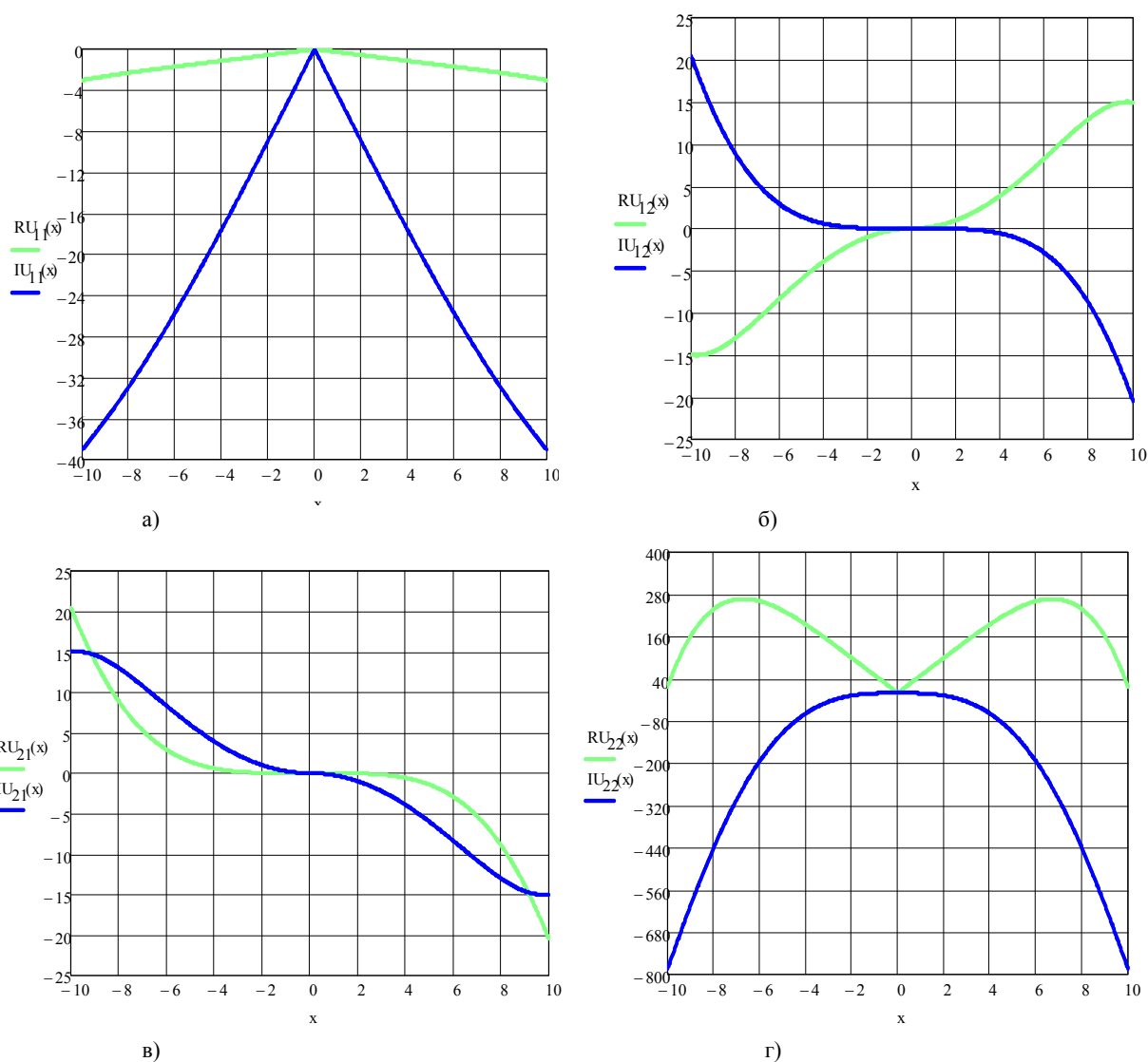
$$\partial_x U_2^j(x, \omega) = -\delta_1^j \frac{i\omega\eta \left(\sqrt{\lambda_1} \sin|x|\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} \sin|x|\sqrt{\lambda_2} \right)}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} +$$

$$-\delta_2^j \operatorname{sgn}(x) \left\{ \frac{\omega^2 - \lambda_1 c^2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \left(\cos x\sqrt{\lambda_1} - \cos x\sqrt{\lambda_2} \right) - c^2 \cos x\sqrt{\lambda_2} \right\}$$

в этой точке терпят разрыв первого рода:

$$\tilde{U}_{1,x}^j(\pm 0, \omega) = \pm \frac{1}{2} \delta_1^j, \quad \tilde{U}_{2,x}^j(\pm 0, \omega) = \pm \frac{c^2}{2} \delta_2^j \quad (19)$$

(верхнему знаку соответствует левый предел в нуле, нижнему – правый).



Компоненты $U_k^j(x, \omega)$ при $\omega=1$ ($\gamma=0.1, c=1, k=1, \eta=1$)

Эти особенности наглядно продемонстрированы на рисунке 1, где изображены реальная и мнимая часть каждой компоненты [5].

4. Разрешающие уравнения краевой задачи. Используя (6) и предельные свойства $U_j^i(x, \omega)$ при $x \rightarrow \pm 0$ (17), (18), из вида решения (9) получим систему из четырех линейных алгебраических уравнений в левой и правой граничных точках для определения четырех неизвестных функций на концах стержня:

$$\begin{aligned}
 0.5u_1 &= c^2 (\tilde{\gamma}\theta_2 - p_2) + u_2 U_{1,x}^1(-2L, \omega) - (q_2 + i\omega\eta u_2) U_1^2(-2L, \omega) - \\
 &\quad - \theta_2 U_{1,x}^2(-2L, \omega) + \left(\hat{F}_1 * U_1^1 + \hat{F}_2 * U_1^2 \right)_{x=-L} \\
 0.5u_2 &= c^2 (p_1 - \tilde{\gamma}\theta_1) + u_1 U_{1,x}^1(2L, \omega) + (q_1 + i\omega\eta u_1) + \theta_1 U_{1,x}^2(2L, \omega) + \\
 &\quad + \left(\hat{F}_1 * U_1^1 + \hat{F}_2 * U_1^2 \right)_{x=L}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0,5\theta_1 = & c^2 (\gamma\theta_2 - p_2)U_2^1(-2L, \omega) - c^2 u_2 U_{2,x}^1(-2L, \omega) - \\
 & -(q_2 + i\omega\eta u_2)U_2^2(-2L, \omega) + \theta_2 U_{2,x}^2(-2L, \omega) + \left(F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2\right)\Big|_{x=-L}, \\
 0,5\theta_2 = & \\
 & + c^2 \left\{ (p_1 - \gamma\theta_1)U_2^1(2L, \omega) + u_1 U_{2,x}^1(2L, \omega) \right\} + \\
 & + \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (q_k + i\omega\eta u_k)U_2^2(2L, \omega) + \theta_1 U_{2,x}^2(2L, \omega) + \left(F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2\right)\Big|_{x=L}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Если \hat{F}_1, \hat{F}_2 – регулярные функции, то

$$\hat{F}_j * U_k^j = H(L - \|x\|) \int_{-L}^L F_j(y) U_k^j(x - y, \omega) dy.$$

Для сингулярных \hat{F}_1, \hat{F}_2 следует пользоваться определением свертки [3].

Разрешающую систему уравнений (20) представим в матричном виде:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{cccc} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ (U_{1,x}^1 - i\omega\eta U_1^2)_{(2L)} & -c^2 & (\check{\gamma}c^2 - U_{1,x}^2)_{(2L)} & U_1^2(2L, \omega) \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ -c(U_{2,x}^1 + i\omega\eta U_2^2)_{(2L)} & c^2 U_2^1(2L, \omega) & (\gamma c^2 U_2^1 - U_{2,x}^2)_{(2L)} & -U_2^2(2L, \omega) \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ p_1 \\ \theta_1 \\ q_1 \end{array} \right\} + \\
 & \left\{ \begin{array}{cccc} (-U_{1,x}^1 + i\omega\eta U_1^2)_{(-2L)} & c^2 & (-\check{\gamma}c^2 + U_{1,x}^2)_{(-2L)} & U_1^2(-2L, \omega) \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ (c^2 U_{2,x}^1 + i\omega\eta U_2^2)_{-2L} & c^2 U_2^1(-2L, \omega) & (-\gamma c^2 U_2^1 + U_{2,x}^2)_{-2L} & U_2^2(-2L, \omega) \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} w_2 \\ p_2 \\ \theta_2 \\ q_2 \end{array} \right\} = \\
 & = \left\{ F_1 * U_1^1 + F_2 * U_1^2 \Big|_{x=-L}, F_1 * U_1^1 + F_2 * U_1^2 \Big|_{x=L}, F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2 \Big|_{x=-L}, F_1 * U_2^1 + F_2 * U_2^2 \Big|_{x=L} \right\}^T
 \end{aligned} \tag{21}$$

(здесь в нижнем индексе в скобках указаны значения x , для которых вычисляются элементы матрицы).

Из этой системы легко построить линейную систему алгебраических уравнений для любой из рассмотренных краевых задач, оставляя в левой части слагаемые с неизвестными краевыми значениями искомых функций и перенося в правую часть с известными.

Так, например, для КЗ1 неизвестными являются напряжения и тепловые потоки на концах стержня (p_1, p_2, q_1, q_2) . Тогда из (21) получим

$$\{M_{ij}(L, \omega)\}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(L, \omega) \\ b_2(L, \omega) \\ b_3(L, \omega) \\ b_4(L, \omega) \end{pmatrix} \quad (22)$$

Определитель матрицы M_{ij} определяет спектр собственных термоупругих колебаний стержня, частоты которых должны удовлетворять уравнению:

$$\det\{M_{ij}(L, \omega_k)\} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

В силу (16), это сложное трансцендентное уравнение, корни которого можно определять численно с помощью различных стандартных программ.

В случае собственных колебаний существование решений и его единственность определяется рангом расширенной матрицы системы, который зависит от действующих источников возмущений.

Для несобственных колебаний решение системы единственно и его определяем методом Крамера. После определения недостающих граничных функций по формулам (8), (2), определяем перемещения, температуру в стержне.

Для определения термоупругих напряжений подставим решение (9) в (3). В результате получим:

$$\sigma(x, \omega) = \rho c^2 \left(\sum_{j=1}^2 U_{1,x}^j * \hat{G}_j(x, \dots) + \sum_{j=1}^2 U_{1,x}^j * \hat{F}_j(x) \right) - \gamma \theta(x, \omega), \quad (24)$$

где все входящие функции определены выше.

Заключение. Полученные решения позволяют определять термонапряженное состояние стержневых конструкций при разнообразных геометрических размерах и термоупругих параметрах, а также во всем диапазоне частот колебаний. При этом можно исследовать воздействие на них сосредоточенных тепловых и силовых источников, описываемых сингулярными обобщенными функциями.

Нетрудно видеть, что алгоритм решения сохраняется и для обратных краевых задач, если на одном конце стержня задать не два крайних значения, а три, а на другом одно, недостающее для разрешимости системы (21), или даже 4 значения на одном, при неизвестных значениях на другом. Этот класс полуобратных и обратных задач очень важен для практических приложений при изготовлении разнообразных контроллеров в измерительных приборах для конструкций и сооружений, работающих в условиях переменных термических и динамических воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970.
- 2 Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975.
- 3 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1978.
- 4 Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. – 2006. – Т. 6, № 1(19). – С. 16-32.
- 5 Алексеева Л.А., Ахметжанова М. М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней // Материаловедение. – Бишкек, 2013. – № 2. – С. 46-50.

REFERENCES

- 1 Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970.
- 2 Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
- 3 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1978.
- 4 Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения. Математический журнал. 2006. Т. 6, № 1(19). С. 16-32.
- 5 Алексеева Л.А., Ахметжанова М. М. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений динамики термоупругих стержней. Материаловедение. Бишкек, 2013. № 2. С. 46-50.

Резюме

Л. А. Алексеева

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан)

ТЕРМОСЕРПІМДІ ӨЗЕК ДИНАМИКАСЫНЫҢ СТАЦИОНАРЛЫҚ ШЕТТІК ЕСЕБІ

Өзекті құрылымдардың термодинамикасын зерттеу үшін термосерпімді өзектің стационарлық есебі қарастырылған, өзекке әсер етуші күш пен жылу көздері белгілі болып шамаланған. Жинақталып қорытылған функциялар әдісі негізінде стационарлық шеттік есептің әрбір өзектің соңындағы кешенді амплитудалар: орын ауыстыру, кернеу, температура және жылу ағысы сияқты төрт мәнінің екеуінің аналитикалық шешімі құрылған.

Тірек сөздер: термосерпімділік, өзек, стационарлық тербеліс, фундаментальдық матрица, жинақталған функциялар әдісі.

Summary

L. A. Alexeyeva

(Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan)

STATIONARY BOUNDARY VALUE PROBLEM OF DYNAMICS OF THERMOELASTIC CORES

For research of thermodynamics of rods the problem of stationary fluctuations of a thermoelastic core is considered in the assumption that acting dynamic forces and thermal sources are known. On the basis of the generalized functions method the analytical solution of boundary value problems are constructed when the two complex amplitudes are known from forth ones of movements, stresses, temperature and heat flows on the ends of a core.

Keywords: thermoelasticity, rod, stationary oscillations, fundamental matrix method of generalized functions.

Поступила 05.05.2014 г.