

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

Х А Б А Р Л А Р Ы

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА
СЕРИЯСЫ**



СЕРИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



**PHYSICO-MATHEMATICAL
SERIES**

5 (297)

**ҚЫРКҮЙЕК – ҚАЗАН 2014 ж.
СЕНТЯБРЬ – ОКТЯБРЬ 2014 г.
SEPTEMBER – OCTOBER 2014**

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА
АЛМАТЫ, НАН РК
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р
ҚР ҰҒА корреспондент мүшесі
Ғ. М. Мутанов

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физика-математика ғылымдарының докторы **Н. М. Темірбеков** (бас редактордың орынбасары), ҚР ҰҒА-ның академиктері **Н. Ж. Тәкібаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кәлменов, Н. Қ. Блиев, Б. Н. Мұқашев, М. Ө. Өтелбаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Қ. Қ. Қадыржанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Н. Т. Данаев**, физика-математика ғылымдарының докторы **Т. С. Рамазанов**, физика-математика ғылымдарының докторы **Ө. Ө. Өмірбаев**, академик **А. Гаджиев** (Әзірбайжан), академик **А. Пашаев** (Әзірбайжан), академик **И. Тигиняну** (Молдова), академик **И. Н. Вишневский** (Украина), академик **А. М. Ковалев** (Украина), академик **А. А. Михалевич** (Беларусь), химия ғылымдарының докторы **Н. Бейсен** (жауапты хатшы)

Г л а в н ы й р е д а к т о р
академик НАН РК
Б. Т. Жумагулов

Р е д а к ц и о н н а я к о л л е г и я:

доктор физико-математических наук **Н. М. Темирбеков** (заместитель главного редактора), академики НАН РК **Н. Ж. Такибаев, С. Н. Харин, Т. Ш. Кальменов, Н. К. Блиев, Б. Н. Мукашев, М. О. Отелбаев**, доктор физико-математических наук **К. К. Кадыржанов**, доктор физико-математических наук **Н. Т. Данаев**, доктор физико-математических наук **Т. С. Рамазанов**, доктор физико-математических наук **У. У. Умирбаев**, академик **А. Гаджиев** (Азербайджан), академик **А. Пашаев** (Азербайджан), академик **И. Тигиняну** (Молдова), академик **И. Н. Вишневский** (Украина), академик **А. М. Ковалев** (Украина), академик **А. А. Михалевич** (Беларусь), доктор химических наук **Н. Бейсен** (ответственный секретарь)

E d i t o r - i n - c h i e f
academician of the NAS of the RK
B. T. Zhumagulov

E d i t o r i a l s t a f f:

doctor of physical and mathematical sciences **N.M. Temirbekov** (deputy editor-in-chief), academicians of the NAS of the RK **N. Zh. Takibayev, S. N. Harin, T. Sh. Kalmenov, N. K. Bliiev, B. N. Mukashev, M. O. Otelbaev**, doctor of physical and mathematical sciences **K. K. Kadirzhanov**, doctor of physical and mathematical sciences **N. T. Danaev**, doctor of physical and mathematical sciences **T. S. Ramazanov**, doctor of physical and mathematical sciences **U. U. Umirbaev**, academician **A. Gadzhiev** (Azerbaijan), academician **A. Pashaev** (Azerbaijan), academician **I. Tiginaynu** (Moldova), academician **I. N. Vishnevskiyi** (Ukraine), academician **A. M. Kovalov** (Ukraine), academician **A. A. Mikhalevich** (Belarus), doctor of chemical sciences **N. Beysen** (secretary)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая» I ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 3000 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18 www.akademiyanauk.kz
Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 3 – 6

INVESTIGATION OF PARTIAL UNELASTICITY COEFFICIENT CORRELATIONS AND THEIR DEPENDENCE OF TOTAL UNELASTICITY COEFFICIENT IN THE REACTION $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^-X^0$ AT 22,4 GEV/C

E. G. Boos, T. Temiraliev, M. Izbasarov, V. V. SamoiloV, A. I. Fedosimova

Institute of physics and technology, Almaty, Kazakhstan

Key words: nucleon, proton, antiproton, meson, unelasticity.

Abstract. The analysis of correlation of partial coefficient of unelasticity K_{π^\pm} , K_0 with total coefficient of unelasticity of K is carried for to reaction $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^-X^0$. It is established that the shares of energy transferred by a proton and an antiproton in system of the center of masses don't correlate with each other while the share of the energy which is carried away by secondary charged and neutral mesons correlates with total coefficient of unelasticity.

УДК 539.12

ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ ПАРЦИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕУПРУГОСТИ И ИХ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОЛНОГО КОЭФФИЦИЕНТА НЕУПРУГОСТИ В РЕАКЦИИ $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^-X^0$ ПРИ 22.4 ГЭВ/С

Э. Г. Боос, Т. Темиралиев, М. Избасаров, В. В. Самойлов, А. И. Федосимова

Физико-технический институт, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: нуклон, протон, антипротон, мезон, неупругость.

Аннотация. Проведен анализ корреляции парциального коэффициента неупругости K_{π^\pm} , K_0 с полным коэффициентом неупругости K в реакции $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^-X^0$. Установлено, что доли переданной протоном и антипротоном энергии в системе центра масс не коррелируют друг с другом, в то время как доля энергии, уносимая вторичными заряженными и нейтральными мезонами коррелирует с полным коэффициентом неупругости.

В настоящее время основная часть (~80 %) неупругих взаимодействий нуклонов в области энергии, достижимой на ускорителях, относится к так называемым «мягким» взаимодействиям, в которых поперечные импульсы генерированных частиц имеют малые значения (<1ГэВ/с). К сожалению, такие процессы до настоящего времени не находят теоретического описания, поскольку

механизм взаимодействия партонов, их адронизация на сравнительно «больших» ($\sim \frac{1}{\mu_\pi}$) расстояниях не выяснен. Поэтому накопление экспериментальных данных по реакциям такого типа имеет важное значение для формулирования адекватной теоретической модели. В этом плане нами изучаются 4-лучевые взаимодействия антипротонов с протонами при импульсе 22.4 ГэВ/с с двумя идентифицированными заряженными π -мезонами, протоном и антипротоном в конечном состоянии



где X^0 – вклад нейтральных частиц.

Первичные данные получены в рамках сотрудничества с ОИЯИ (г. Дубна) при облучении 2-метровой пузырьковой камеры «Людмила» в антипротонном пучке Серпуховского ускорителя [1]. Методические вопросы обработки и идентификации вторичных частиц изложены в работах [2, 3]. Выбор реакции указанного типа (1) интересен тем, что в ней удастся получить новые сведения о корреляциях потери энергии соударяющимися протоном и антипротоном и соответствующими долями энергий, уносимых заряженной ($\pi^+\pi^-$)-системой и нейтральной компонентой (X^0), состоящей, с большей вероятностью, из нейтральных π -мезонов.

Анализируются корреляции между полным коэффициентом неупругости в системе центра масс $K = \frac{\sqrt{S} - E_{\tilde{p}} - E_p}{\sqrt{S}}$, долями энергии, уносимыми в системе центра масс заряженными $K_\pm = \frac{\sum E_{\pi^\pm}}{\sqrt{S}}$ и нейтральными $K_0 = (K - K_\pm)$ мезонами, потерями энергии протонов и антипротонов $K_p = (\frac{\sqrt{S}}{2} - E_p) \frac{1}{\sqrt{S}}$ $K_{\tilde{p}} = (\frac{\sqrt{S}}{2} - E_{\tilde{p}}) \frac{1}{\sqrt{S}}$, где \sqrt{S} – полная энергия в системе центра масс.

В анализе было использовано 8366 неупругих взаимодействий реакции (1).

На рисунке 1 приведены корреляции между величинами а) (K_{π^\pm}, K); б) (K_0, K); в) (K_p, K); д) ($K_{\tilde{p}}, K$); е) ($K_{\tilde{p}}, K_p$); ф) (K_0, K_{π^\pm}); г) (K_p, K_{π^\pm}); х) ($K_{\tilde{p}}, K_{\pi^\pm}$).

На рисунке 1 а, б, ф события, сосредоточенные в полосах шириной ~ 0.02 при значениях $K = K_{\pi^\pm}$ (рис. 1 а) и $K_0 = 0$ (рис. 1 б, ф) соответствуют реакции $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^-$. Доля энергии, уносимая заряженными и нейтральными мезонами, растет с увеличением коэффициента неупругости K , при этом максимальные значения K_{π^\pm} и K_0 совпадают в пределах статистических ошибок.

Из рисунка 1с и 1д следует, что корреляции между долями энергии, переданной вторичным мезонам протоном и антипротоном практически совпадают, причем верхний предел $K_p (K_{\tilde{p}}) = 0.36$ означает полную передачу всей кинетической энергии вторичным мезонам. При этом диапазон корреляций очень широкий, что свидетельствует о независимости адронизации партонов из сталкивающихся частиц.

Этот же вывод следует из рис. 1е, где поле точки практически симметрично во всей разрешенной области изменений K_p и $K_{\tilde{p}}$. Совершенно новый эффект концентрации событий наблюдается на рис. 1г и 1х: в центральной части этих рисунков вокруг линий $K_p \approx K_{\pi^\pm}$ и $K_{\tilde{p}} \approx K_{\pi^\pm}$ наблюдается статистически обеспеченный избыток событий. Этот новый эффект ранее никем не наблюдался.

Наблюдаемые характерные особенности исследуемой реакции $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^-X^0$ необходимо учесть при создании модели адронизации партонов. Они указывают на специфические свойства механизма адронизации партонов в «мягких» соударениях нуклонов.

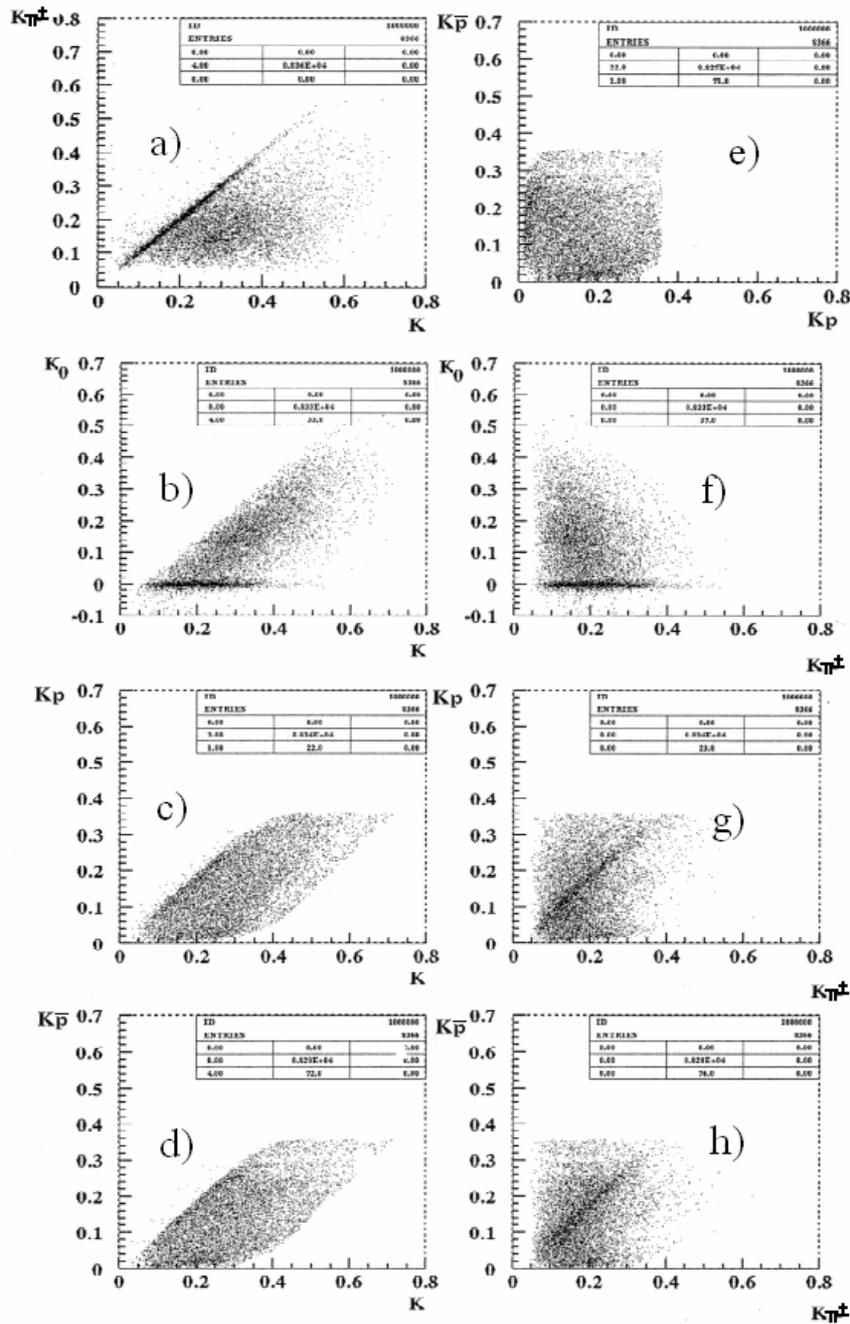


Рисунок 1 – Зависимость между парциальным коэффициентом неупругости и их корреляций с полным коэффициентом неупругости в реакции $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p\pi^+\pi^-X^0$ при импульсе 22.4 ГэВ/с

В заключении отметим:

- доли переданной протоном и антипротоном энергии в системе центра масс не коррелируют;
- доля энергии, получаемая заряженными и нейтральными мезонами, растет с увеличением коэффициента неупругости.

Авторы выражают благодарность международному сотрудничеству ОИЯИ и коллективу ускорителя У-70 ИФВЭ (г. Серпухов) за плодотворное сотрудничество.

Работа выполнена в рамках гранта №159/ГФЗ МОН РК «Исследование адронизации кварков в неупругих взаимодействиях электронов и антипротонов с протонами в области высоких энергий» по приоритету «Фундаментальные исследования в области естественных наук».

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Abesalashvili L. et al. // Phys. Lett. 52B C. 236 (1974).
- [2] Boos E.G. et al. // Nuovo Cimento 47A. C. 377 (1978).
- [3] Боос Э.Г., Темиралиев Т. и др. // Известия МОН-НАН РК. Сер. физ.-мат. – 2000. – № 2. – С. 35.

REFERENCES

- [1] Abesalashvili L. et al. Phys. Lett. 52B C. 236 (1974).
- [2] Boos E.G. et al. // Nuovo Cimento 47A. C. 377 (1978).
- [3] Boos Je.G., Temiraliev T. i dr. // Izvestija MON-NAN RK. Ser. fiz.-mat. 2000. N 2. S. 35.

**22.4 ГЭВ/С ИМПУЛЬСТЕ $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^-X^0$ РЕАКЦИЯСЫНДАҒЫ СЕРПІМСІЗДІКТІҢ
ҮЛЕСТІК КОЭФФИЦИЕНТТЕРІНІҢ КОРРЕЛЯЦИЯСЫН ЖӘНЕ
ОЛАРДЫҢ СЕРПІМСІЗДІКТІҢ ТОЛЫҚ КОЭФФИЦИЕНТІНЕ БАЙЛАНЫСЫН ЗЕРТТЕУ**

Э. Г. Боос, Т. Теміралиев, М. Избасаров, В. В. Самойлов, А. И. Федосимова

Физика-техникалық институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: нуклон, протон, антипротон, мезон, серпімсіздік.

Аннотация. $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^-X^0$ реакциясында үлестік серпімсіздік коэффициенті K_{π^\pm} , K_0 -дің толық серпімсіздік коэффициенті K – ға байланысына талдау жүргізілген. Массалық орталық жүйесінде протонның және антипротонның берген үлестік энергиясы бір бірімен байланысы жоқтығы анықталған, ал екінші реттік зарядталған және бейтарап мезондардың алып кететін энергиясының үлесі толық серпімсіздік коэффициентімен байланыстылығы көрсетілген.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 7 – 11

THE WELL-POSEDNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR DEGENERATE MULTI-DIMENSIONAL HYPERBOLIC-PARABOLIC EQUATION

S. A. Aldashev

Abai kazakh national pedagogical university, Almaty, Kazakstan

Key words: well-posedness, problem, function, equation, criterion.**Abstract.** We show the unique solvability to Dirichlet problem in the cylindrical domain for degenerate multi-dimensional hyperbolic-parabolic equation. We also obtain the criterion for the unique solvability of the problem.

УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. А. Алдашев

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: корректность, задача, функция, уравнение, критерия.**Аннотация.** В работе показано, что задача Дирихле в цилиндрической области для модельного вырождающегося многомерного гиперболо-параболического уравнения однозначно разрешима. Получена также критерий единственности регулярного решения.

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены [1], а их многомерные аналоги насколько известно автору, исследованы мало [2].

Задача Дирихле для этих уравнении еще не рассмотрены.

В работе показано, что задача Дирихле в цилиндрической области для модельного вырождающегося многомерного гиперболо-параболического уравнения однозначно разрешима, получен также критерий единственности регулярного решения.

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m, t)$.Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ – части поверхности Γ , лежащие и полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α – верхнее, а σ_β – нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.Пусть далее S – общая часть границ областей $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$ представляющее множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m .В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающееся смешанно гиперболо-параболическое уравнение

$$0 = \begin{cases} t^q \Delta_x u - u_t, & t > 0, \\ |t|^p \Delta_x u - u_{tt}, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $p, q = \text{const}, p > 0, q \geq 0, \Delta_x$ – оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m, m \geq 2$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m-1, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

В качестве многомерной задачи Дирихле рассмотрим следующую задачу

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(r, \theta), \quad u|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r, \theta). \quad (3)$$

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \leq k \leq k_n, (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), W_2^l(S), l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева.

Имеет место ([3])

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (4)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = const.$$

Через $\bar{\varphi}_{1n}^k(r), \psi_{1n}^k(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответственно функций $\varphi_1(r, \theta), \psi_1(t, \theta)$.

Тогда справедливы

Теорема 1. Если $\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta) \in W_2^l(S), \psi_1(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\alpha), \psi_2(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta), l > \frac{3m}{2}$

и

$$\cos \mu_{s,n} \beta' \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

то задача 1 однозначно разрешима, где $\mu_{s,n}$ – положительные нули функций Бесселя первого рода

$$J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z), \quad \beta' = \frac{-2}{2+p} |\beta|^{\frac{(2+p)}{2}}.$$

Теорема 2. Решение задачи 1 единственно, тогда и только тогда, когда выполняется условие (5).

Доказательство теоремы. В сферических координатах уравнения (1) в области Ω_α имеет вид

$$t^q \left(u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u \right) - u_t = 0, \quad (6)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2), n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Так как искомое решение задачи 1 в области Ω_α принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, то его можно искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (7)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя (7) в (6), используя ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([3]), будем иметь

$$t^q \left(\bar{u}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k \right) - \bar{u}_{nt}^k = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (8)$$

при этом краевое условие (2), с учетом леммы 1, соответственно запишется в виде

$$\bar{u}_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1, t) = \psi_{1n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (9)$$

В (8), (9) произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = \bar{u}_n^k(r, t) - \psi_{1n}^k(t)$ получим

$$t^q \left(\bar{v}_{nrr}^k + \frac{m-1}{r} \bar{v}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{v}_n^k \right) - \bar{v}_{nt}^k = \bar{f}_n^k(r, t), \quad (10)$$

$$\bar{v}_n^k(r, \alpha) = \varphi_{1n}^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1, t) = 0, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

$$\bar{f}_n^k(r, t) = \psi_{1nt}^k + \frac{\lambda_n t^q}{r^2} \psi_{1n}^k, \quad \varphi_{1n}^k(r) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r) - \psi_{1n}^k(\alpha).$$

Произведя замену $\bar{v}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} v_n^k(r, t)$ задачу (10), (11) приведем к следующей задаче

$$Lv_n^k \equiv t^q \left(v_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k \right) - v_{nt}^k = f_n^k(r, t), \quad (12)$$

$$v_n^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad v_n^k(1, t) = 0, \quad (13)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{((m-1)(3-m) - 4\lambda_n)}{4}, \quad f_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \bar{\varphi}_{1n}^k(r) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \varphi_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (12), (13) ищем в виде $v_n^k(r, t) = v_{1n}^k(r, t) + v_{2n}^k(r, t)$, где $v_{1n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{1n}^k = f_n^k(r, t), \quad (14)$$

$$v_{1n}^k(r, \alpha) = 0, \quad v_{1n}^k(r, t) = 0, \quad (15)$$

а $v_{2n}^k(r, t)$ — решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \quad (16)$$

$$v_{2n}^k(r, \alpha) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r), \quad v_{2n}^k(r, t) = 0. \quad (17)$$

Решение выше указанных задач, аналогично [4] рассмотрим в виде

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (18)$$

при этом пусть

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \quad \bar{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \quad (19)$$

Подставляя (18) в (14), (15), с учетом (19), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (20)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (21)$$

$$T_{st} + \mu t^q T_s(t) = -a_{s,n}(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad (22)$$

$$T_s(\alpha) = 0. \quad (23)$$

Ограниченным решением задачи (20), (21) является ([5])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (24)$$

где $\nu = \frac{n+(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (22), (23) является

$$T_{s,n}(t) = \left(\exp\left(-\mu_{s,n}^2 \frac{t^{q+1}}{q+1}\right) \right) \int_t^\alpha a_{s,n}(\xi) \left(\exp\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} \xi^{q+1} \right) d\xi. \quad (25)$$

Подставляя (24) в (19) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^\infty b_{s,n} J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad 0 < r < 1. \quad (26)$$

Ряды (26) – разложения в ряды Фурье-Бесселя ([6]), если

$$a_{s,n}(t) = 2 [J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (27)$$

$$b_{s,n} = 2 [J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{1n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi, \quad (28)$$

$\mu_{s,n}, s = 1, 2, \dots$ – положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (18), (24), (25) получим решение задачи (14), (15) в виде

$$v_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad (29)$$

где $a_{s,n}(t)$ определяется из (27).

Далее, подставляя (18) в (16), (17), с учетом (19), будем иметь задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 t^q T_s = 0, \quad 0 < t < \alpha, \quad T_s(\alpha) = b_{s,n},$$

решение которого является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} (\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right). \quad (30)$$

Из (24), (30) получим

$$v_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^\infty b_{s,n} \sqrt{r} \exp\left(\frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} (\alpha^{q+1} - t^{q+1})\right) J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad (31)$$

где $b_{s,n}$ находится из (28).

Следовательно, единственным решением задачи (1), (2) в области Ω_α является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{1n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} [v_{1n}^k(r,t) + v_{2n}^k(r,t)] \right\} Y_{n,m}^k(\theta), \quad (32)$$

где $v_{1n}^k(r,t), v_{2n}^k(r,t)$ определяются из (29), (31).

Учитывая формулу ([6]) $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, оценки ([4,3])

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0,$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^l}{\partial \theta_j^l} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+l}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad l = 0, 1, \dots,$$

а также леммы, ограничения на заданные функции $\psi_1(t,\theta), \varphi_1(r,\theta)$, как в [7], можно доказать, что полученное решение (32) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Далее, из (29), (31), (32) $t \rightarrow +0$ при имеем

$$u(r,\theta,0) = \tau(r,\theta) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta).$$

$$\tau_n^k(r) = \psi_{1n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)s}{2}} \left[\int_0^{\alpha} a_{s,n}(\xi) \left(\exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} \xi^{q+1} \right) d\xi + b_{s,n} \left(\exp \frac{\mu_{s,n}^2}{q+1} \alpha^{q+1} \right) \right] J_{n+\frac{(m-2)s}{2}}(\mu_{s,n}r). \quad (33)$$

Из (27) – (31), а также из лемм вытекает, что $\tau(r, \theta) \in W_2^l(S), l > \frac{3m}{2}$.

Таким образом, учитывая краевые условия (3) и (33), в области Ω_β приходим к задаче Дирихле для многомерного уравнения Геллерстедта

$$|t|^p \Delta_x u - u_{tt} = 0 \quad (34)$$

с данными

$$u|_S = \tau(r, \theta), u|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), u|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r, \theta). \quad (35)$$

В [8] доказана следующая теорема

Теорема 3. Если $\tau(r, \theta), \varphi_2(r, \theta) \in W_2^l(S), \psi_2(t, \theta) \in W_2^l(\Gamma_\beta), l > \frac{3m}{2}$ и выполняется соотношение (5), то задача (34), (35) в классе $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$ однозначно разрешима.

Теорема 4. Решение задачи (34),(35) единственно, если и только, если имеет место условие (5). Далее, используя теорему 3,4 получим справедливость теоремы 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
- [2] Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: НГУ, 1983. – 84 с.
- [3] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
- [4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
- [5] Камкэ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.
- [6] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 297 с.
- [7] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. – Алматы: Ғылым, 1994. – 170 с.
- [8] Алдашев С. А. Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Геллерстедта // Укр. матем. журнал. – 2012. – Т. 64, № 3. – С. 3-9.

REFERENCES

- [1] Nahushev A.M. Zadachi so smeshheniem dlja uravnenija v chastnyh proizvodnyh. M.: Nauka, 2006. 287 s.
- [2] Vragov V.N. Kraevye zadachi dlja neklassicheskikh uravnenij matematicheskoy fiziki. Novosibirsk: NGU, 1983. 84 s.
- [3] Mihlin S.G. Mnogomernye singuljarnye integraly i integral'nye uravnenija. M.: Fizmatgiz, 1962. 254 s.
- [4] Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenija matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1966. 724 s.
- [5] Kamkje Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam. M.: Nauka, 1965. 703 s.
- [6] Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkicii. T. 2. M.: Nauka, 1974. 297 s.
- [7] Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlja mnogomernyh giperbolicheskikh i smeshannyh uravnenij. Almaty: Fylym, 1994. 170 s.
- [8] Aldashev S. A. Korrektnost' zadachi Dirihle i Puanakare v cilindricheskoy oblasti dlja mnogomernogo uravnenija Gellerstedta. Ukr. matem. zhurnal. 2012. T. 64, N 3. C. 3-9.

КӨП ӨЛШЕМДІ АЗҒЫНДАЛҒАН ГИПЕРБОЛА-ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕНДЕУГЕ ДИРИХЛЕ ЕСЕБІНІҢ КОРРЕКТІЛІГІ

С. А. Алдашев

Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: корректность, задача, функция, уравнение, критерия.

Аннотация. Жұмыста көп өлшемді азғындалған гипербола-параболалық тендеуге Дирихле есебінің бір мәнділігі дәлелденген. Және де регулярлық шешімнің жалғыздық критериясы алынған.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 12 – 15

THE METHOD OF CALCULATION OF THE MIGRATION ENERGY OF VACANCIES IN CUBIC CRYSTALS

K. Baigisova

Kazakh national technical university named after K. I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: kymbat_b@mail.ru, baigisova.k@gmail.com

Key words: migration energy, vacancy, configuration sphere, fcc crystal.

Abstract. We propose a method of simulation of vacancy migration energy in fcc (face-centered-cubic) metals. The method is based on the fact that the atoms in crystal are distributed on configuration spheres, surrounding one atom, which was chosen as the central atom. The vacancy migration energy is found from the difference between the crystal energies with two vacancies and one interstitial atom at the saddle point in a certain configuration sphere, and with one vacancy in the same configuration sphere.

УДК 538.9

КУБТЫҚ КРИСТАЛДАРДАҒЫ ВАКАНСИЯЛАРДЫҢ МИГРАЦИЯ ЭНЕРГИЯСЫН ЕСЕПТЕУ ӘДІСТЕРІ

Қ. Байгісова

Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: миграция энергиясы, вакансия, конфигурациялық сфера, қабырғаға центрленген кубтық кристал.

Аннотация. Қабырғаға центрленген кубтық кристалдардағы вакансиялардың миграция энергиясын есептеудің қарапайым әдісі ұсынылып отыр. Әдістің негізі мынада: кристалдардағы атомдар белгіленген бір орталық атомның айналасын қоршаған конфигурациялық сфераларда орналасқан. Белгілі бір конфигурациялық сферадағы «ер нүктесіндегі» бір түйінаралық атом және екі вакансиядан тұратын кристал энергиясы мен сол конфигурациялық сферада бір вакансияға ие кристал энергиясының айырмасынан вакансиялардың миграция энергиясы анықталынады.

Металдардағы нүктелік ақаулардың миграция энергиясын анықтауға арналған жұмыстарды сараптау нәтижесі тәжірибелік, теориялық және есептеу әдістері арқылы алынған энергия мәндері әр алуан екенін көрсетеді. Мысалы, мыстағы вакансиялардың миграция энергиясының тәжірибелік мәндері 0.6 – 1.08 эВ аралығында, ал есептік мәндері 0.34 – 1.0 эВ аралығында [1-3].

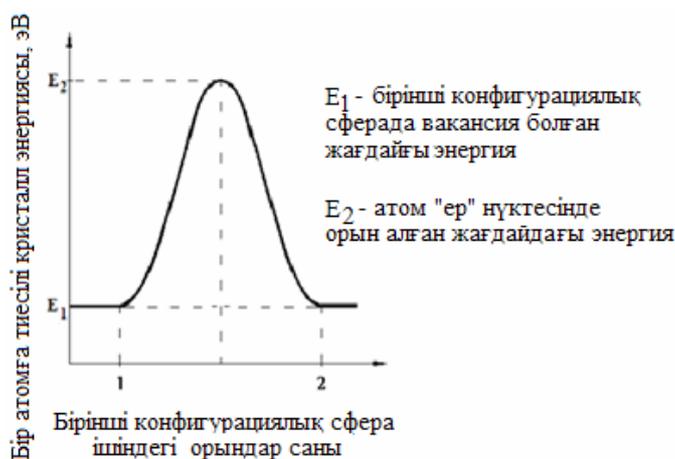
Сондықтан қатты денелердегі нүктелік ақаулардың миграция энергиясын анықтайтын тәжірибелік және есептік әдістерді жетілдіру өзекті мәселе болып табылады.

Қабырғаға центрленген кубтық кристалдардағы вакансиялардың миграция энергиясын есептеудің қарапайым әдісі ұсынылып отыр, ол келесі жолмен іске асырылады: N атомнан тұратын модельді кристалл конфигурациялық сфераларға бөлінеді. Ол үшін бір атомды орталық атом деп таңдаймыз. Орталық атомға ең жақын атомдар бірінші конфигурациялық сфера түзеді. Орталық атомнан бірдей қашықтықта орналасқан келесі атомдар екінші конфигурациялық сфера түзеді. Бұл процесс модельді кристалдағы конфигурациялық сфераларға атомдардың барлығы орналастырылғанша жалғаса береді. Бұл жердегі i -ші конфигурациялық сфераның радиусы

$$R_i = a\sqrt{m_i^2 + n_i^2 + l_i^2},$$

мұндағы m_i, n_i, l_i – i -ші конфигурациялық сферада орналасқан атомдардың кристаллографиялық индекстері; a – кристалдық тор параметрі.

Мысалы, қабырғаға центрленген кубтық тордан тұратын кристалдардағы бірінші конфигурациялық сфераның радиусы $R_1 = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ және ол 12 атомнан тұрады, екінші конфигурациялық сфераның радиусы $R_2 = a$, ол 6 атомнан тұрады және т.с.с. Ары қарай бірінші конфигурациялық сферада бір атом болмаған жағдайда, яғни бұл сферада бір вакансия бар деп алып, кристалдағы барлық атомдардың өзара әсерлесу энергиясы есептелінеді. Содан кейін екінші конфигурациялық сферада вакансия болған жағдайда атомдардың өзара әсерлесу энергиясы есептелінеді және т.с.с.



1-сурет – Бірінші конфигурациялық сферада екі вакансия және атом «ер» нүктесінде тұрған кездегі кристалдың энергиясы

Кристалдағы атомдардың өзара әсерлесу энергиясының бір вакансияға ие конфигурациялық сфера нөміріне тәуелділік графигі салынады.

Айталық, i -ші конфигурациялық сферада вакансия болған жағдайда кристалдағы атомдардың өзара әсерлесу энергиясы едәуір төмендейді деп қарастырайық. Бұл вакансияның сфера ішінде қозғалатынын көрсетеді, өйткені вакансия басқа басқа конфигурациялық сфераға өткенде кристал энергиясын өсіреді. i -ші конфигурациялық сферада вакансия болғандағы атомдардың өзара әсерлесу энергиясын E_{i1} деп белгілейік.

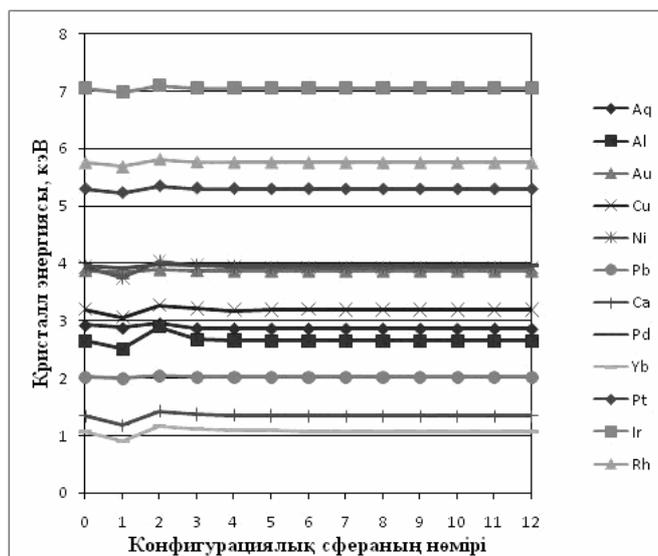
Бұл сфераның ішіндегі вакансия миграциясы, вакансияға жақынырақ орналасқан атом түйін арасына өткенде, яғни i -ші және $i-1$ -ші конфигурациялық сфералар арасында болғанда басталады (мысалы, $i=1$ болғанда бірінші конфигурациялық сфера мен орталық атом арасында). Бұл жағдайда кристалда i -ші конфигурациялық сферада екі вакансия және бір түйінаралық атом болады. Сондықтан i -ші және $i-1$ -ші конфигурациялық сфералар арасында екі вакансия және бір түйінаралық атом болған кездегі атомдардың өзара әсерлесу энергиясы, яғни E_{i2} есептелінеді. Онда кубтық кристалдағы вакансиялардың миграция энергиясы келесі қарапайым формуламен анықталады:

$$E_m^v = E_{i2} - E_{i1} \quad (1)$$

1-сурет (1)-ші формуланың физикалық мәнін сипаттайды.

2-суретте қабырғаға центрленген кубтық кристалдан тұратын металдардағы атомдардың өзара әсерлесу энергиясының бір вакансиядан тұратын конфигурациялық сфераның нөміріне тәуелділік графигі берілген.

Атомдардың өзара әсерлесу энергиясын есептеу үшін көбінесе қолданыста жүрген Морзе потенциалы алынды [4-7]. Орталық атомның айналасындағы 30 конфигурациялық сфераларда орналасқан, сол орталық атомнан және 1060 атомнан тұратын қабырғаға центрленген кубтық кристал моделі үшін Морзе потенциалының параметрлері есептелінді.



2-сурет – Кристалл энергиясының бір вакансиядан тұратын 12 конфигурациялық сфераға тәуелділік графигі

Барлық қабырғаға центрленген кубтық кристалдар үшін вакансия бірінші конфигурациялық сферада болған кезде атомдардың өзара әсерлесуі минимумге ие екенін 2-суреттен көруге болады.

Кестеде ұсынылып отырған әдіс арқылы есептелінген қабырғаға центрленген кубтық кристалдан тұратын металдардағы вакансиялардың миграция энергиясының мәндері берілген.

Берілген әдісті кубтық кристалдардағы вакансиялардың миграция энергиясын есептеу үшін қолдануға болатынын есептелген мәндердің тәжірибе нәтижелерімен сәйкестігі дәлелдейді.

Қабырғаға центрленген кубтық кристалдан тұратын металдардағы вакансиялардың миграция энергиясының есептелген мәндері

Металл	Берілген әдіс бойынша есептелген мәндер, E_m^V , эВ	Есептелген мәндер, E_m^V , эВ (басқа авторлар)	Тәжірибелік мәндер, E_m^V , эВ [1]		
			Өздік диффузия әдісі	Суару	Суару және сәулелендіру
Ag	0.65	0.88; 0.90 [1] 1.03 [3]	–	0.66	0.67
Al	1.17	0.66 [3] 0.775; 0.96 [1]	0.62	0.62-0.66	0.58-0.62
Au	0.59	0.965; 1.13 [1] 1.71 [3]	0.85	0.83	0.77-0.85
Ca	1.02	–	–	–	–
Cu	1.19	0.77-1.00 [1]	0.77-0.88	0.71-1.08	0.67-0.72
Ir	1.13	–	–	–	–
Ni	1.07	1.04-1.25 [1]	–	1.27	–
Pb	0.41	0.44-0.61 [1] 0.76 [3]	0.60	–	0.54
Pd	1.42	1.21 [1]	–	–	–
Pt	1.35	1.48; 2.25 [1] 2.45 [3]	–	1.43	1.36-1.46
Rh	1.13	–	–	–	–
Yb	1.03	–	–	–	–

Қорытынды. Қабырғаға центрленген кубтық кристалдардағы вакансиялардың миграция энергиясын есептеуге арналған бұл әдіс үш түрлі қарапайым қадамдардан тұрады.

Бірінші қадам – кристадағы атомдар белгіленген бір орталық атомның айналасындағы конфигурациялық сфераларда орналасқан.

Содан кейін бір вакансиялы конфигурациялық сфералар арасынан кристалдың минимал энергиясына ие сфера анықталады.

Белгілі бір конфигурациялық сферадағы «ер» нүктесіндегі бір түйінаралық атом мен екі вакансиядан тұратын кристал энергиясы және сол конфигурациялық сферада бір вакансияға ие кристал энергиясының айырмасынан вакансиялардың миграция энергиясы анықталады.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Орлов А.Н., Трушин Ю.В. Энергии точечных дефектов в металлах. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 80 с.
- [2] Siegfried Schmauder, Leon Mishaevsky Jr. Micromechanics and Nanosimulation of Metals and Composites (Advanced Methods and Theoretical Concepts) // Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [3] Sato K., Yoshiie T., Xu Q., Kiritani M. Simulation of Vacancy Migration Energy in Cu under High Strain // Materials Science and Engineering. – 15 June 2003. – Vol. 350, Issue 1-2. – P. 220-222. – Symposium on High-Speed Deformation.
- [4] Girifalco L.A., Weizer V.G. Application of Morse potential function to cubic metals // Phys. Rev. – 1959. – Vol. 114. – P. 687-690.
- [5] Wynblatt P. Calculation of the vacancy migration energy in cubic crystals // J. Phys. Chem. Solids. – 1968. – Vol. 29. – P. 215-224.
- [6] Neumann G., Tille V., Hirschwald W. Calculation of vacancy migration energies in cubic metals using generalized Morse functions // Phys. Stat. Sol.(b). – 1972. – Vol. 54. – P. 519-526.
- [7] Плишкин Ю.М., Подчиненов И.Е. Парный потенциал взаимодействия атомов в меди, используемый для расчета характеристик дефектов // ФММ. – 1973. – Т. 36, № 2. – С. 260-264.

REFERENCES

- [1] Orlov A.N., Trushin Yu.V. Energiya tochechnykh defektov v metallakh. M.: Energoatomizdat, 1983. 80 s.
- [2] Siegfried Schmauder, Leon Mishaevsky Jr. Micromechanics and Nanosimulation of Metals and Composites (Advanced Methods and Theoretical Concepts). Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [3] Sato K., Yoshiie T., Xu Q., Kiritani M. Simulation of Vacancy Migration Energy in Cu under High Strain. Materials Science and Engineering. 15 June 2003. Vol. 350, Issue 1-2. P. 220-222. Symposium on High-Speed Deformation.
- [4] Girifalco L.A., Weizer V.G. Application of Morse potential function to cubic metals. Phys. Rev. 1959. Vol. 114. P. 687-690.
- [5] Wynblatt P. Calculation of the vacancy migration energy in cubic crystals. J. Phys. Chem. Solids. 1968. Vol. 29. P. 215-224.
- [6] Neumann G., Tille V., Hirschwald W. Calculation of vacancy migration energies in cubic metals using generalized Morse functions. Phys. Stat. Sol.(b). 1972. Vol. 54. P. 519-526.
- [7] Plishkin Yu.E., Podchinenov I.E. Parnyi potentsial vzaimodeistviya atomov v medi, ispolzuemy dlya rascheta charakteristik defektov. FMM. 1973. T. 36, N 2. S. 260-264.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ МИГРАЦИИ ВАКАНСИЙ В КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

К. Б. Байгисова

Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: энергия миграции, вакансия, конфигурационная сфера, ГЦК кристалл.

Аннотация. Предложен метод вычисления энергии миграции вакансий в ГЦК кристаллах. Метод основан на том, что атомы в кристалле распределяются по конфигурационным сферам, окружающим один, выбранный в качестве центрального атома. Энергия миграции вакансий находится из разности энергий кристалла с двумя вакансиями и одним междоузельным атомом в седловой точке в определенной конфигурационной сфере и одной вакансией в той же конфигурационной сфере.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 16 – 24

CALCULATION METHODS OF VACANCY MIGRATION ENERGY IN FCC METALS

K. Baigisova

Kazakh national technical university named after K. I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: kymbat_b@mail.ru, baigisova.k@gmail.com

Key words: vacancy migration energy, calculation methods, comparative analysis of calculation methods.

Abstract. In this paper several modern calculation methods of vacancy migration energy in metals using density functional theory and semi-empirical methods are considered. The comparative analysis was performed on such items as comparability of the calculated values of vacancy migration energy with experimental results, taking into account the relaxation of atoms around vacancies, and simplicity of calculations. Al, Cu и Ni were taken for comparative analysis.

УДК 538.9

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭНЕРГИИ МИГРАЦИИ ВАКАНСИЙ В ГЦК МЕТАЛЛАХ

К. Б. Байгисова

Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: энергия миграции вакансий, методы расчета, сравнительный анализ методов расчета.

Аннотация. Рассмотрены методы расчета энергии миграции вакансий в металлах с использованием теории функционала плотности и полуэмпирических методов. Сравнительный анализ проводился по таким показателям, как сопоставимость рассчитанных значений энергии миграции вакансий с экспериментальными результатами, учет релаксации атомов вокруг вакансий, и простота вычислений. Для сравнительного анализа были выбраны Al, Cu и Ni.

В результате экстремальных воздействий таких, как пластическая деформация, быстрое охлаждение, и радиационное повреждение образуются неравновесная концентрация точечных дефектов в металлах. Изменение структуры проявляется и в изменении функциональных характеристик и свойств металла. Одним из основных параметров, определяющих поведение точечных дефектов в металлах, является энергия миграции вакансий. Зная значение энергии миграции вакансий, можно понять и предсказать поведение дефектов и свойств материалов [1].

Расчетные данные энергии миграции вакансий в металлах, полученные различными методами, как правило, не совпадают с экспериментальными значениями. Поэтому совершенствование методов расчета энергии миграции вакансий в твердых телах остается актуальной задачей.

Исходным пунктом при решении таких задач является определение потенциала взаимодействия атомов [2, 3]. Наряду с определением потенциала взаимодействия атомов для расчета энергии миграции вакансий также важен и учет релаксации атомов вокруг вакансии.

В данной работе для сравнительного анализа были выбраны три показателя: сопоставимость рассчитанных значений энергии миграции вакансий с экспериментальными результатами, поскольку применимость рассчитанных значений с помощью любого метода определяется в сравнении с

экспериментальными данными; учет процесса релаксации атомов вокруг вакансий: это дает более реалистичное описание поведения дефектов; простота вычислений: во избежание использования множества подгоночных параметров необходимо упростить метод вычислений.

Парный потенциал Морзе является одним из наиболее простых видов межатомных потенциалов для описания межатомных взаимодействий в молекулярной динамике. Он не имеет квантовомеханического обоснования и относится к полуэмпирическим потенциалам. Для определения энергии миграции вакансии с помощью потенциала Морзе используют несколько подходов.

В работе [4] реализован один из таких подходов. Суть метода заключается в том, что модельный кристалл с ГЦК структурой, состоящий из N атомов, разбивается на семейство конфигурационных сфер. Для этого выбирается один атом в качестве центрального. Атомы, ближайшие к центральному атому, образуют первую конфигурационную сферу.

Следующие атомы, расположенные на одинаковом расстоянии от центрального атома, образуют вторую конфигурационную сферу (в расчете был выбран ГЦК кристалл, состоящий из центрального атома и 1060 атомов, расположенных в 30-ти конфигурационных сферах вокруг центрального атома). Эта процедура продолжается до полного размещения всех атомов модельного кристалла по конфигурационным сферам. В таком случае i -ая конфигурационная сфера будет иметь радиус

$$R_i = a\sqrt{m_i^2 + n_i^2 + l_i^2},$$

где m_i, n_i, l_i – кристаллографические индексы атомов, расположенных на i -ой конфигурационной сфере; a – параметр кристаллической решетки.

Далее с помощью потенциала Морзе вычисляется энергия взаимодействия между собой всех атомов кристалла при наличии вакансии в первой конфигурационной сфере, затем во второй конфигурационной сфере и т.д.

Потенциал Морзе выражается следующей формулой:

$$U_i = U(r_i) = D \left\{ \exp[-2\alpha(r_i - r_0)] - 2 \exp[-\alpha(r_i - r_0)] \right\}. \quad (1)$$

где D – параметр, показывающий величину минимума потенциала, r_0 – расстояние между атомами, соответствующее минимуму потенциала, α – параметр, определяющий кривизну потенциала. Если ввести постоянную $\zeta = \exp(\alpha r_0)$, а расстояние между атомами выразить, используя кристаллографические индексы m_i, n_i, l_i положения i -го атома относительно начального атома в решетке кубического кристалла и параметр решетки a (при температуре $T=0$ К параметр решетки будет a_0), то потенциал Морзе можно представить удобной для расчетов формулой

$$U_i(a) = D\zeta^2 \exp(-2\alpha a M_i) - 2D\zeta \exp(-\alpha a M_i).$$

где

$$r_i = a M_i, \quad M_i = \sqrt{m_i^2 + n_i^2 + l_i^2}.$$

Энергия взаимодействия N атомов находится по формуле

$$E_s = \frac{1}{2} N D \zeta^2 \sum_i^N \exp(-2\alpha a_0 M_i) - N D \zeta \sum_i^N \exp(-\alpha a_0 M_i). \quad (2)$$

Коэффициент $1/2$ появляется из-за того, что в качестве начального может быть любой атом решетки и $U_{ii} = U_i$.

Для определения α, D и r_0 используются три уравнения [5]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{1}{2} D \zeta^2 \sum_i^N \exp(-2\alpha a_0 M_i) - D \zeta \sum_i^N \exp(-\alpha a_0 M_i), \\ 0 &= -\zeta \sum_i^N M_i \exp(-2\alpha a_0 M_i) + \sum_i^N M_i \exp(-\alpha a_0 M_i), \\ -\frac{9Ka_0}{c} &= 2\alpha^2 D \zeta^2 \sum_i^N M_i^2 \exp(-2\alpha a_0 M_i) - \alpha^2 D \zeta \sum_i^N M_i^2 \exp(-\alpha a_0 M_i), \end{aligned} \quad (3)$$

где ε_s – энергия сублимации, приходящаяся на один атом, K – модуль объемной упругости. Промежуточная величина M_i , используемая для вычисления параметров потенциала Морзе, и зависящая от суммы квадратов кристаллографических индексов, меняется скачками (дискретна).

В таблице 1 дано сравнение значений параметров потенциала Морзе, взятых из литературных источников и полученных нами по предложенной методике, для Al, Cu и Ni.

Таблица 1 – Сравнительные данные о параметрах потенциала Морзе ГЦК металлов

Металл	Параметры, вычисленные в настоящей работе			Параметры, полученные в других работах			Источник
	$\alpha, \times 10^{-1} \text{ нм}^{-1}$	D, эВ	$r_0, \times 10^{-1}, \text{ нм}^{-1}$	$\alpha, \times 10^{-1} \text{ нм}^{-1}$	D, эВ	$r_0, \times 10^{-1}, \text{ нм}^{-1}$	
Al	1.084	-0.270	3.552	1.165	-0.270	3.253	[6]
Cu	1.363	-0.332	2.987	1.359	-0.343	2.866	[6]
Ni	1.283	-0.375	3.039	1.420	-0.420	2.780	[6]

Обозначим через E_{i1} энергию взаимодействия атомов при наличии вакансии в i -ой конфигурационной сфере. Миграция вакансии внутри этой сферы начинается с того, что ближайший к вакансии атом «поднимается» на соседнюю седловину потенциального рельефа в точку, находящуюся посередине между двумя соседними узлами кристаллической решетки, т.е. оказывается между i -ой и $(i-1)$ конфигурационными сферами (в случае $i=1$ – между первой конфигурационной сферой и центральным атомом). Для этого состояния кристалла характерно наличие двух вакансий: одной в i -ой конфигурационной сфере и второй на месте атома, находящегося в седловой точке между i -ой и $(i-1)$ конфигурационными сферами. Энергия, соответствующая этому состоянию будет E_{i2} . Тогда энергия миграции вакансий в кубическом кристалле определяется простой формулой

$$E_m^v = E_{i2} - E_{i1} \quad (4)$$

В таблице 2 приведены значения энергии миграции вакансий в ГЦК металлах, вычисленные по предлагаемому методу, в сравнении с экспериментальными результатами и данными расчетов, известными из литературы.

Таблица 2 – Значения энергии миграции вакансий в ГЦК металлах

Металл	$\varepsilon_s, \text{ эВ}$	$E_m^v, \text{ эВ}$				
		Метод 1	Метод 2	Метод 3	Литературные данные	Экспериментальные данные [8]
Al	3,04 [16]	1,17	0,69	0,59	0,66 [7] 0,775; 0,96 [8]	0,58-0,66
Cu	3,52 [15]	1,19	0,80	0,68	0,77-1,00 [8]	0,60-1,08
Ni	4,39 [15]	1,07	1,0	0,86	1,04-1,25 [8]	1,20-1,27

В последнее время для расчета E_m^v чаще всего используется метод погруженного атома (МПА) [9-14]. Суть МПА состоит в том, что каждый атом системы рассматривается как примесь, погруженная в ансамбль, состоящий из всех оставшихся атомов. Формула определения потенциальной энергии системы атомов в кристалле, которая впервые была предложена в работах M.S. Dow и M.I. Baskes имеет следующий вид:

$$U = \sum_i \left[\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \varphi(r_{ij}) + \Phi(\rho_i) \right], \quad (5)$$

где r_{ij} – расстояние между исходным i -ым атомом и другим атомом j , $\varphi(r_{ij})$ – парный потенциал, $\Phi(\rho_i)$ – энергия погружения атома, которая зависит от локальной величины электронной плотности ρ_i в точке расположения i -го атома.

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N f_j(r). \quad (6)$$

Здесь $f_j(r)$ – вклад j -го атома в локальную электронную плотность атома i .

В МПА электронная плотность в точке представляется как суперпозиция электронных плотностей каждого атома и их взаимодействие предполагается сферически симметричным, что для переходных металлов является серьезным допущением.

Преимуществом МПА по сравнению с парными потенциалами, в том числе потенциалом Морзе, является эффективный учет ион-электронного взаимодействия, который осуществляется функцией погружения $\Phi(\rho_i)$.

Поиск вида функций $\varphi(r_{ij})$, $f_i(r)$, $\Phi(\rho_i)$ является сложной задачей. В большинстве случаев происходит выбор различных аппроксимирующих формул с заданными параметрами, значения которых подгоняются под экспериментальные значения известных величин.

В работе [13] МПА был модифицирован путем использования представления о бимодальном распределении электронной плотности в кристалле, которая имеет максимумы в центрах октаэдрических и тетраэдрических пустот кристаллической решетки металла, т.е. допускается, что в этих пустотах могут находиться электроны проводимости с вероятностью, превышающей среднюю или фоновую вероятность по всему кристаллу. Тогда расстояние между вершинными узлами и центрами граней ГЦК решетки, с одной стороны, и центрами октаэдрических и тетраэдрических пустот – с другой стороны, можно считать расстоянием между атомными остовами и электронами проводимости. Зная расстояние между всеми атомными остовами и электронами проводимости, можно определить их потенциал взаимодействия.

Отличие предложенного метода от других МПА, в данном методе используется только один подгоночный параметр и значения энергии миграции вакансий гораздо лучше совпадают с экспериментальными значениями. Расчет E_m^v в этом методе был проведен следующим образом. В континууме ГЦК кристалла выделяется кубик, состоящий из n^3 элементарных ячеек. Начало координат помещается в центр такого кубика. Затем находятся координаты всех узлов и центров граней элементарных ячеек, а также центров октаэдрических и тетраэдрических пустот решетки. Тетраэдрические пустоты используются все, а из октаэдрических пустот используются только те, которые расположены в центрах элементарных ячеек. Из кубика, выделенного из континуума, удаляется атом, расположенный в начале координат или на расстоянии $a/2$ от начала координат, и вычисляется U_1 – потенциал взаимодействия атомных остовов и электронов проводимости при наличии одной вакансии. Здесь a – параметр кристаллической решетки металла. Затем вычисляется потенциал U_2 для кубика, имеющего две вакансии, первая из которых находится или в начале координат, или на расстоянии $a/2$ от начала координат, а вторая – на расстоянии $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ от первой вакансии и одного атома между двумя вакансиями (атом находится в седловой точке).

Тогда

$$E_m^v = u_2 - u_1, \quad (7)$$

где $u_1 = U_1/N_1$ и $u_2 = U_2/N_1$. Здесь $N_1 = N - 1$, а N – число атомов в решетке без вакансий. Кубик в континууме ГЦК кристалла выделяется произвольным образом, поэтому значение E_m^v , вычисленное по формуле (7), можно отнести ко всему кристаллу.

Энергия взаимодействия атомных остовов и электронов проводимости в металле U , будучи кулоновским потенциалом, определяется эффективным зарядом q_{ef} и расстоянием r между узлами и центрами граней, октаэдрических и тетраэдрических пустот решетки:

$$U = k \frac{q_{ef}^2}{r}, \quad (8)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Согласно принципу суперпозиции, потенциал взаимодействия ионов (атомных остовов) и электронов в решетке металла может быть представлен следующей формулой:

$$U = U^I + U^{II} + U^{III} + U^{IV} + U^V + U^{VI}. \quad (9)$$

Здесь U^I – потенциал взаимодействия ионов, U^{II} – потенциал взаимодействия ионов с электронами, находящимися в октаэдрических пустотах, U^{III} – потенциал взаимодействия ионов с электронами, находящимися в тетраэдрических пустотах, U^{IV} – потенциал взаимодействия электронов, находящихся в октаэдрических пустотах, U^V – потенциал взаимодействия электронов, находящихся в тетраэдрических пустотах, U^{VI} – потенциал взаимодействия электронов, находящихся в октаэдрических пустотах, с электронами, находящимися в тетраэдрических пустотах.

После преобразований получим:

$$U = \frac{q_{ef}^2}{8\pi\epsilon_0 a} \sum_1^N \sum_1^N r_{ij}^{-1} - \frac{q_{ef}^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_1^N \sum_1^{N^o} r_{ij}^{-1} - \frac{q_{ef}^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_1^N \sum_1^{N^t} r_{ij}^{-1} + \frac{q_{ef}^2}{8\pi\epsilon_0 a} \sum_1^{N^o} \sum_1^{N^o} r_{ij}^2 + \\ + \frac{q_{ef}^2}{8\pi\epsilon_0 a} \sum_1^{N^t} \sum_1^{N^t} r_{ij}^{-1} + \frac{q_{ef}^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_1^{N^o} \sum_1^{N^t} r_{ij}^{-1} = \frac{q_{ef}^2}{8\pi\epsilon_0 a} (S_1 - 2S_2 - 2S_3 + S_4 + S_5 + 2S_6),$$

где S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 и S_6 – суммы обратных расстояний, выраженные через кристаллографические индексы. Знак «–» указывает на потенциал притяжения.

Приравнявая к U энергию сублимации металла ϵ_s и, вычисляя суммы обратных расстояний, можно найти эффективный заряд электрона в квадрате

$$q_{ef}^2 = \frac{N\epsilon_s}{bS}. \quad (10)$$

Здесь $b = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 a \sigma}$, σ – коэффициент перевода Дж в эВ; $S = S_1 - 2S_2 - 2S_3 + S_4 + S_5 + 2S_6$.

Потенциал взаимодействия атомов и электронов кристаллика с одной вакансией, приходящийся на один атом, будет определяться выражением

$$u_1 = \frac{bq_{ef}^2 S_{1v}}{N_1} = \epsilon_s \frac{NS_{1v}}{N_1 S}, \quad (11)$$

а потенциал взаимодействия атомов и электронов кристаллика с двумя вакансиями и одним атомом между ними, приходящийся на один атом, будет определяться формулой

$$u_2 = \frac{bq_{ef}^2 S_{2v}}{N_1} = \epsilon_s \frac{NS_{2v}}{N_1 S}. \quad (12)$$

Тогда энергия миграции вакансий в металле, в соответствии с формулой (7), будет

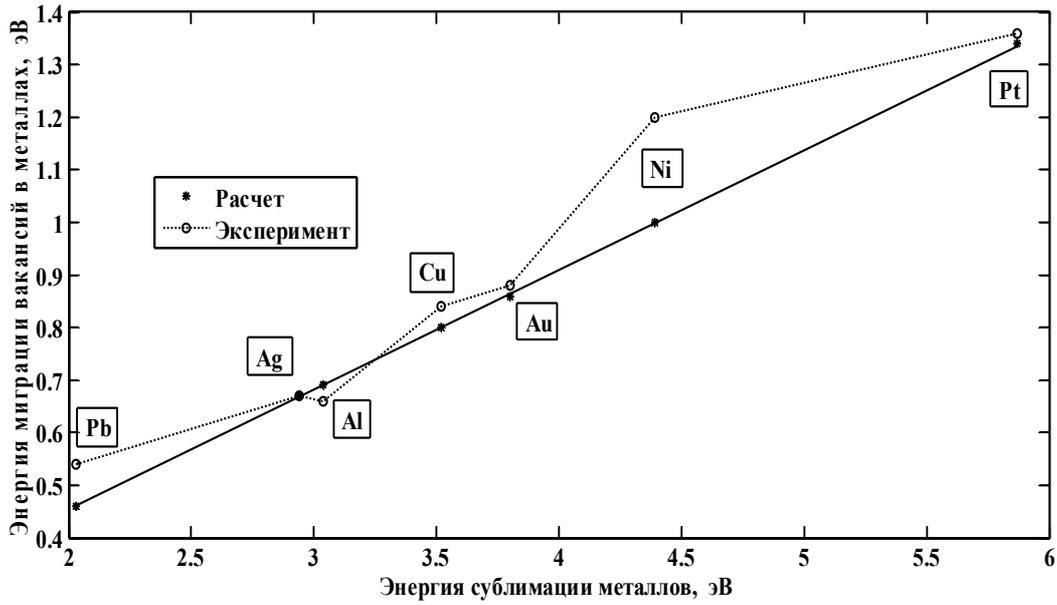
$$E_m^v = u_2 - u_1 = \epsilon_s \frac{N}{N_1} (S_{2v} - S_{1v}) / S \quad (13)$$

В формулах (11)-(13) S_{1v} и S_{2v} – это S для кристалликов с одной и двумя вакансиями. Вычисленные значения E_m^v по формуле (13) представлены в таблице 2.

В формуле (13) соотношение $\frac{N}{N_1} (S_{2v} - S_{1v}) / S$ одинаково для всех ГЦК металлов. Поэтому из

этой формулы следует, что E_m^v прямо пропорциональна ϵ_s , однако зависимость между экспериментальными значениями E_m^v и ϵ_s не является линейной (рисунок).

В работе [14] предлагается некоторое усовершенствование метода, изложенного в [13], путем учета релаксации атомов, окружающих вакансии, при вычислении U_1 и U_2 . Когда из кубика, выделенного из континуума, удаляется атом, расположенный в начале координат, или на расстоянии $a/2$ от начала координат, т.е. образуется вакансия, то остальные атомы, окружавшие удаленный атом, смещаются со своих мест в кристаллической решетке, и это смещение должно учитываться. К примеру, в Си расстояние между атомами, окружающими вакансию, в первой координационной сфере уменьшается примерно на 2 %. Расстояние между атомами, окружающими вакансию, во второй координационной сфере увеличивается примерно на 0,2 % и т.д. [17].



Зависимость энергии миграции вакансий от энергии сублимации для ряда ГЦК металлов

Поэтому вполне допустимо, что в результате релаксации атомов вокруг вакансии кубик, выделенный из континуума, сохраняет тип кристаллической решетки, но при этом параметр решетки несколько изменяется. Как в работе [13] допускается, что значение эффективного заряда электрона проводимости сохраняется при образовании вакансии. Измененный параметр кристаллической решетки можно определить, используя модули упругости кристалла C_{11} или C_{44} .

При деформации кристалла изменится не только расстояние между рассматриваемыми атомами, но величина ортов и углы между ними. Связь измененных ортов с первоначальными устанавливается следующими соотношениями [18]:

$$\begin{aligned} i' &= (1 + e_{xx})\mathbf{i} + e_{xy}\mathbf{j} + e_{xz}\mathbf{k} \\ j' &= e_{yx}\mathbf{i} + (1 + e_{yy})\mathbf{j} + e_{yz}\mathbf{k} \\ k' &= e_{zx}\mathbf{i} + e_{zy}\mathbf{j} + (1 + e_{zz})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (14)$$

где $e_{xx}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yx}, e_{yy}, e_{yz}, e_{zx}, e_{zy}, e_{zz}$ – компоненты тензора деформации, которые с точностью до первого порядка равняются относительным изменениям ортов при деформации кристалла.

При малых деформациях кристалла смещение атома \mathbf{r} будет

$$\mathbf{r} = R_x(\mathbf{i}' - \mathbf{i}) + R_y(\mathbf{j}' - \mathbf{j}) + R_z(\mathbf{k}' - \mathbf{k}).$$

Или с учетом (14)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (R_x \cdot e_{xx} + R_y \cdot e_{yx} + R_z \cdot e_{zx})\mathbf{i} + (R_x \cdot e_{xy} + R_y \cdot e_{yy} + R_z \cdot e_{zy})\mathbf{j} + \\ &+ (R_x \cdot e_{xz} + R_y \cdot e_{yz} + R_z \cdot e_{zz})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (15)$$

Плотность упругой энергии деформированного кристалла можно записать в виде [18]:

$$u = \frac{1}{2}C_{11}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) + \frac{1}{2}C_{44}(e_{yx}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) + \frac{1}{2}C_{12}(e_{yy}e_{xx} + e_{zz}e_{xx} + e_{xx}e_{yy}), \quad (16)$$

где C_{12} – также модуль упругости кристалла. Из (16) можно получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e_{xx}^2} = C_{11}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial e_{zx}^2} = C_{44} \quad (17)$$

Формула (17) применима в рамках представления кристалла однородной и непрерывной средой, т.е. в рамках континуального приближения. В случае кристалла, состоящего из атомов, расположенных на определенных расстояниях друг от друга, соотношения (17) должны быть записаны в следующем виде:

$$C_{11} = \sum_i^N \sum_j^N \left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial e_{xx}} \right)^2 \frac{\partial^2 u(r_{ij})}{\partial r_{ij}^2}, \quad C_{44} = \sum_i^N \sum_j^N \left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial e_{zx}} \right)^2 \frac{\partial^2 u(r_{ij})}{\partial r_{ij}^2}. \quad (18)$$

Модули упругости в виде (18) позволяют суммировать вклад всех атомов в плотность энергии деформации. С учетом, что смещение j -го атома относительно i -го атома при деформации dr_{ij} можно выразить через изменение параметра решетки da . При этом модуль упругости имеет вид:

$$C_{11} = \sum_i^N \sum_j^N \left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial e_{xx}} \right)^2 \left(\frac{\partial a}{\partial r_{ij}} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{ij}(a)}{\partial a^2}, \quad C_{44} = \sum_i^N \sum_j^N \left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial e_{zx}} \right)^2 \left(\frac{\partial a}{\partial r_{ij}} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{ij}(a)}{\partial a^2}. \quad (19)$$

Используя (15) легко показать, что

$$\left(\frac{\partial r_{ij}}{\partial e_{xx}} \right)^2 = \frac{R_{xij}^2 r_{xij}^2}{\partial r_{ij}^2} = \frac{a^2 (m_i - m_j)^4}{(m_i - m_j)^2 + (n_i - n_j)^2 + (l_i - l_j)^2},$$

где $m_i, m_j, n_i, n_j, l_i, l_j$ – кристаллографические индексы, указывающие координаты узлов, центров граней, октаэдрических и тетраэдрических пустот решетки.

Плотность энергии – это общая энергия кристалла U , отнесенная к его объему V . Поэтому уравнение для определения измененного параметра решетки будет иметь следующий вид:

$$C_{11} = \frac{5a^2 q_{ef}^2 S_v}{2\pi\epsilon_0 n a_1^6}, \quad (20)$$

где $S_v = S_1 - 2S_2 - 2S_3 + S_4 + S_5 + 2S_6$, ϵ_0 – электрическая постоянная, n – число элементарных ячеек в выбранном кубике, a_1 – параметр решетки кристаллика, содержащего вакансию (измененный параметр решетки), N, N^o, N^t – число атомов, октаэдрических и тетраэдрических пустот решетки.

Эффективный заряд электрона определяется из соотношения

$$U = \frac{q_{ef}^2}{8\pi\epsilon_0 a} \sum_1^N \sum_1^N r_{ij}^{-1} - \frac{q_{ef}^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_1^N \sum_1^{N^o} r_{ij}^{-1} - \frac{q_{ef}^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_1^N \sum_1^{N^t} r_{ij}^{-1} + \frac{q_{ef}^2}{8\pi\epsilon_0 a} \sum_1^{N^o} \sum_1^{N^o} r_{ij}^2 + \frac{q_{ef}^2}{8\pi\epsilon_0 a} \sum_1^{N^t} \sum_1^{N^t} r_{ij}^{-1} + \frac{q_{ef}^2}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_1^{N^o} \sum_1^{N^t} r_{ij}^{-1}, \quad (21)$$

Конечная формула для расчета E_m^v выражается следующим образом:

$$E_m^v = \frac{N\epsilon_s a}{S(N-1)} \left(\frac{S_{vv}}{a_2} - \frac{S_v}{a_1} \right) \quad (22)$$

где ϵ_s – энергия сублимации металла, a_2 – параметр решетки кристалла, содержащего атом в седловой точке, S_{vv} – сумма обратных расстояний для кристалла с атомом в седловой точке, S – сумма обратных расстояний в формуле (21).

В таблице 2 в пятом столбце показаны значения E_m^v для ГЦК металлов, рассчитанные по формуле (22).

Обсуждение результатов и выводы. Из таблицы 2 видно, что значения E_m^v для Al, Cu и Ni, полученные с помощью метода Морзе, находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными результатами (кроме Al, что, возможно, связано с переменной валентностью алюминия). Данный метод достаточно прост в использовании для расчета E_m^v , но не учитывает релаксацию атомов вокруг вакансий в кристалле.

Значения энергии миграции вакансий, вычисленные модифицированным МПА с одним подгонным параметром, гораздо лучше совпадают с экспериментальными значениями. Этот метод очень удобен для расчета E_m^v , но зависимость E_m^v от ϵ_s металлов является линейной, что не соответствует зависимости экспериментальных значений E_m^v от ϵ_s . Такое несоответствие вызвано, скорее

всего, тем, что в данном методе также игнорируется релаксация атомов вокруг вакансий в кристалле металла.

Результаты вычисления E_m^v модифицированным МПА с учетом релаксации атомов вокруг вакансий показывают хорошее согласие расчетных значений с экспериментальными данными. Помимо этого зависимость E_m^v от ε_s металлов является нелинейной, что в большей степени соответствует зависимости между экспериментальными значениями E_m^v и ε_s .

Таким образом, наиболее приемлемым методом вычисления значений E_m^v для металлов является модифицированный МПА при учете релаксации атомов вокруг вакансий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Калинин Б.А. Физическое материаловедение. – Т. 4: Физические основы прочности. Радиационная физика твердого тела. Компьютерное моделирование. Учебник для вузов. – М.: МИФИ, 2008. – 696 с.
- [2] Marian J., Wirth B. D., Caro A., Sadigh B., Odette G. R., Perlado J. M., T. Diaz de la Rubia. Dynamics of Self-Interstitial Cluster Migration in Pure α -Fe and Fe-Cu alloys // Physical Review B. – 2002. – Vol. 65, 144102.
- [3] Chaitanya Deo. Multiscale Materials Modeling of Structural Materials for Next Generation Nuclear Reactors. Edited by Amir Zacarias Mesquita, ISBN 978-953-51-0018-8, 2012. Available from: <http://www.intechopen.com/books/nuclear-reactors/multiscale-materials-modeling-of-structural-materials-for-next-generation-nuclear-reactors>.
- [4] 4. Исаков Б.М., Байгисова К.Б., Бондаренко Г.Г. Межатомное взаимодействие и подвижность вакансий в металлах с гранцентрированной кубической решеткой // Металлы. – 2013. – № 4. – С. 55-61.
- [5] 5. Исаков Б.М., Сулейменова Ж.К., Шамбулов Н.Б. Определение параметров потенциала Морзе для ГЦК металлов // Труды XIX Междунар. совещания «Радиационная физика твердого тела» (Севастополь, 31 августа – 05 сентября 2009 г.) / Под ред. Г. Г. Бондаренко. – М.: ГНУ НИИ ПМТ, 2009. – С. 290-297.
- [6] 6. Girifalco L.A., Weizer V.G. Application of Morse potential function to cubic metals // Phys. Review. – 1959. – Vol. 114. – P. 687-690.
- [7] 7. Sato K., Yoshiie T., Xu Q., Kiritani M. Simulation of Vacancy Migration Energy in Cu under High Strain // Materials Science and Engineering: A. – 2003. – Vol. 350. – Issue 1-2. – P. 220-222.
- [8] 8. Орлов А.Н., Трушин Ю.В. Энергии точечных дефектов в металлах. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 80 с.
- [9] 9. Suzuki A., Mishin Y. Atomistic Modeling of Point Defects and Diffusion in Copper Grain Boundaries // Interface Science. – 2003. – N 11. – P. 131-148.
- [10] Iyad A. Hijazi, Young Ho Park. Consistent Analytic Embedded Atom Potential for Face-Centered Cubic Metals and Alloys // Journal of Materials Science and Technology. – 2009. – Vol. 25, N. 6. – P. 835-846.
- [11] Grabowski S., Kadau K., Entely P. Atomistic Modeling of Diffusion in Aluminum // Phase Transitions: A Multinational Journal. – 2002. – Vol. 75. – Issue 1-2. – P. 265-272.
- [12] Mishin Y. Structural Stability and Lattice Defects in Copper: *Ab initio*, Tight-Binding, and Embedded-Atom Calculations // Physical Review B. – 2001. – Vol. 63, 224106.
- [13] Исаков Б.М., Байгисова К.Б., Бондаренко Г.Г. Определение энергии миграции вакансий в ГЦК металлах с использованием модифицированного метода погруженного атома // Металлы. – 2014. – № 2. – С. 87-92.
- [14] Исаков Б.М., Байгисова К.Б., Бондаренко Г.Г. Определение энергии миграции вакансий в ГЦК металлах с учетом релаксации соседних атомов // Труды XXIV Междунар. совещания «Радиационная физика твердого тела» (Севастополь, 7–12 июля 2014 г.) / Под ред. Г. Г. Бондаренко. – М.: ФГБНУ НИИ ПМТ, 2014. – С. 304-310.
- [15] Термодинамические свойства неорганических веществ. Справочник / Под ред. А. П. Зефирова). – М.: Атомиздат, 1965. – 460 с.
- [16] Физические величины. Справочник / Под ред. И. С. Григорьевой, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
- [17] 17. Дамаск А., Динс Дж. Точечные дефекты в металлах. – М.: Мир, 1966. – 292 с.
- [18] 18. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. – М.: Наука, 1978. – 792 с.

REFERENCES

- [1] Kalin B.A. Fizicheskoe materialovedenie. Tom 4. Fizicheskie osnovy prochnosti. Radiatsionnaya fizika tverdogo tela. Kompyuternoe modelirovanie. Vtorichnaya: Uchebnik dlya vuzov. M.: MIFI, 2008. 696 s.
- [2] Marian J., Wirth B. D., Caro A., Sadigh B., Odette G. R., Perlado J. M., T. Diaz de la Rubia. Dynamics of Self-Interstitial Cluster Migration in Pure α -Fe and Fe-Cu alloys. Physical Review B. 2002. Vol. 65, 144102.
- [3] Chaitanya Deo. Multiscale Materials Modeling of Structural Materials for Next Generation Nuclear Reactors. Edited by Amir Zacarias Mesquita, ISBN 978-953-51-0018-8, 2012. Available from: <http://www.intechopen.com/books/nuclear-reactors/multiscale-materials-modeling-of-structural-materials-for-next-generation-nuclear-reactors>.
- [4] Iskakov B.M., Baigisova K.B., Bondarenko G.G. Interatomic Interaction and Vacancy Mobility in FCC Metals. Russian Metallurgy (Metally). 2013. N 7. P. 522-527.

- [5] Iskakov B.M., Suleimenova Zh. K., Shambulov N.B. Opredelenie parametrov potentsiala Morze dlya GTSK metallov. Trudy XIX Mezhdunar. soveshchaniya "Radiatsionnaya fizika tverdogo tela" (Sevastopol, 31 avgusta – 05 sentyabrya 2009 g.). Pod red. G.G. Bondarenko. M.: GNU NII PMT, 2009. S. 290-297.
- [6] Girifalco L.A., Weizer V.G. Application of Morse potential function to cubic metals. Phys. Review. 1959. Vol. 114. P. 687-690.
- [7] Sato K., Yoshiie T., Xu Q., Kiritani M. Simulation of Vacancy Migration Energy in Cu under High Strain. Materials Science and Engineering: A. 2003. Vol. 350. Issue 1-2. P. 220-222.
- [8] Orlov A.N., Trushin Yu.V. Energiya tochechnykh defektov v metallakh. M.: Energoatomizdat, 1983. 80 s.
- [9] Suzuki A., Mishin Y. Atomistic Modeling of Point Defects and Diffusion in Copper Grain Boundaries. Interface Science. 2003. N 11. P. 131-148.
- [10] Iyad A. Hijazi. Young Ho Park. Consistent Analytic Embedded Atom Potential for Face-Centered Cubic Metals and Alloys. Journal of Materials Science and Technology. 2009. Vol. 25, N 6. P. 835-846.
- [11] Grabowski S., Kadav K., Entely P. Atomistic Modeling of Diffusion in Aluminum. Phase Transitions: A Multinational Journal. 2002. Vol. 75. Issue 1-2. P. 265-272.
- [12] Mishin Y. Structural Stability and Lattice Defects in Copper: *Ab initio*, Tight-Binding, and Embedded-Atom Calculations. Physical Review B. 2001. Vol. 63, 224106.
- [13] Iskakov B.M., Baigisova K.B., Bondarenko G.G. Determination of the Vacancy Migration Energy in FCC Metals Using a Modified Embedded-Atom Method. Russian Metallurgy (Metally). 2014. N 3. P. 246-250.
- [14] Iskakov B.M., Baigisova K.B., Bondarenko G.G. Determination of Vacancy Migration Energy in FCC Metals Taking into account the Relaxation of Neighboring Atoms. Trudy XXIV Mezhdunar. soveshchaniya "Radiatsionnaya fizika tverdogo tela" (Sevastopol, 7–12 iyulya 2014 g.). Pod red. G. G. Bondarenko. M.: FGBNU NII PMT, 2014. S. 304-310.
- [15] Termodinamicheskie svoystva neorganicheskikh veshchestv. Spravochnik. Pod red. A. P. Zefirova. M.: Atomizdat, 1965. 460 s.
- [16] Fizicheskie velichiny. Spravochnik. Pod red. I. S. Grigoreva, E. Z. Meilikhova. – M.: Energoatomizdat, 1991. 1232 s.
- [17] Damask A., Dins J. Tochechnye defekty v metallakh. M.: Mir, 1966. 292 s.
- [18] Kittel Ch. Vvedenie v fiziku tverdogo tela. M.: Nauka, 1978. 792 s.

ҚЦҚ МЕТАЛДАРДАҒЫ ВАКАНСИЯЛАРДЫҢ МИГРАЦИЯ ЭНЕРГИЯСЫН ЕСЕПТЕУ ӘДІСТЕРІ

Қ. Б. Байгісова

Қ. И. Сәтбаев атындағы қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: вакансиялардың миграция энергиясы, есептеу әдістері, есептеу әдістерінің салыстыру сараптамасы.

Аннотация. Жұмыста тығыздық функционал теориясы мен жартылай эмпирикалық әдісін қолдана отырып металдардағы вакансиялардың миграция энергиясын есептеудің заманауи әдістері қарастырылды. Салыстыру сараптамасы келесі көрсеткіштер бойынша жасалды: вакансиялардың миграция энергиясының есептелген мәндері мен тәжірибеде алынған нәтижелерін салыстыру, вакансиялар айналасындағы атомдардың релаксациясын ескеру және есептеу қарапайымдылығы. Салыстыру сараптамасын жасауға Al, Cu и Ni металдары алынды.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 25 – 32

**MODELS OF DETERMINATION OF RELEVANCE OF THE TEXT
TO THE GIVEN THEME, GRAPHS ASSOCIATED WITH TEXTS
AND A PROBLEM OF SUMMARIZING****T. V. Batura¹, F. A. Murzin¹, D. O. Speransky², B. S. Baizhanov³, M. V. Nemchenko³**¹A. P. Ershov Institute of Informatics Systems, Russian Academy of Sciences, Siberian Branch,²Novosibirsk National Research State University,³Institute of Mathematics, Informatics and Mechanics,

Committee of Science of the Ministry of Education and Science of Republic Kazakhstan.

E-mails: tatiana.v.batura@gmail.com, murzin@iis.nsk.su, speranskydaniil@gmail.com,

baizhanov@hotmail.com, nemchenko.imim@mail.ru

Key words: processing of texts in a natural language, syntactic analysis, Link Grammar Parser, summarization, relevance.

Abstract. Article is devoted to algorithms of the summarization. The problem consists of that to allocate from the text fragments corresponding to the given theme. The theme is understood as a set of the sentences concerning to one concept, the phenomenon, sequence of events, etc. Fragments not necessarily follow one after another. In the text between them, other themes can be included. Further the allocated fragments can be united in the resume on the given theme. In the work, some generalization of the method described in the work of Niraj Kumar, etc. [1] is offered. The considered approach allows us to take into account syntactic relations, which can be received on output of program system Grammar Parser.

УДК 519.68; 681.513.7;

316.472.45; 007.51/.52

**МОДЕЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЛЕВАНТНОСТИ ТЕКСТА
ЗАДАННОЙ ТЕМЕ, ГРАФЫ АССОЦИИРОВАННЫЕ С ТЕКСТАМИ
И ЗАДАЧА РЕФЕРИРОВАНИЯ****Т. В. Батура¹, Ф. А. Мурзин¹, Д. О. Сперанский², Б. С. Байжанов³, М. В. Немченко³**¹Институт систем информатики им. А. П. Ершова СО РАН,²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,³Институт математики, информатики и механики КН МОН РК

Ключевые слова: обработка текстов на естественном языке, синтаксический анализ, Link Grammar Parser, резюмирование, релевантность.

Аннотация. Статья посвящена алгоритмам реферирования. Задача состоит в том, чтобы из текста выделить фрагменты, соответствующие заданной теме. Под темой понимается набор предложений, относящихся к одному понятию, явлению, последовательности событий и др. Фрагменты не обязательно следуют друг за другом. В тексте между ними могут присутствовать вставки на другие темы. Далее выделенные фрагменты могут быть объединены в резюме по данной теме. В работе предложено некоторое обобщение метода, описанного в работе Нираджа Кумара и др. [1]. Рассматриваемый подход позволяет учесть синтаксические отношения, которые могут быть получены на выходе программной системы Link Grammar Parser.

1. Введение. Основой для написания данной статьи послужила работа [1], в которой авторы рассматривают процесс автоматического резюмирования. В научной литературе как синоним используется также слово «реферирование». Суть работы состоит в том, что из текста могут выделяться фрагменты, соответствующие заданной теме. Под темой понимается набор предложений, относящихся к одному понятию, явлению, последовательности событий и др. Фрагменты не обязательно следуют друг за другом. В тексте между ними могут присутствовать вставки на другие темы. Далее выделенные фрагменты могут быть объединены в резюме по данной теме. В общем случае из текста могут быть выделены несколько таких резюме, соответствующих различным темам.

Одна из возникающих проблем состоит в том, что перестановка слов в предложении может существенно менять его смысл, что приводит к некорректной работе алгоритмов, оперирующих с отдельными ключевыми словами, их частотами и т. д. Сравните, например, такие выражения, как «кровь с молоком» и «молоко с кровью». В упомянутой выше работе предложен метод, позволяющий учесть порядок слов и показавший свою эффективность.

В данной работе авторы предлагают некоторое обобщение данного метода, которое позволяет учесть дополнительно также синтаксические отношения, которые могут быть получены на выходе программной системы Link Grammar Parser. Речь идет об анализе текстов на английском языке.

2. Базовый алгоритм резюмирования. Базовый алгоритм резюмирования описан в вышеупомянутой работе [1] и состоит из нескольких этапов. Ниже дано краткое описание алгоритма.

1. Проводится предварительная обработка статьи, могут удаляться отдельные элементы, специальные обозначения, неподдерживаемые символы.

2. Вычисляются веса слов.

3. Выполняется разбиение статьи на отдельные фрагменты (топики). Вычисляются веса топиков. Под топиком будем понимать набор предложений, идущих не обязательно последовательно и охватывающих некоторую самостоятельную подтему в исходной статье. Отметим, что для статьи достаточно большого объема таких подтем может быть довольно много.

4. Вычисляется оценка релевантности (соответствия) топиков эталонному сообщению по заданной теме. Множество релевантных фрагментов объединяются в одно резюме.

На рисунке 1 схематически показано, что исходная статья разбивается на топики, каждый из которых сравнивается с эталонным сообщением Summary.

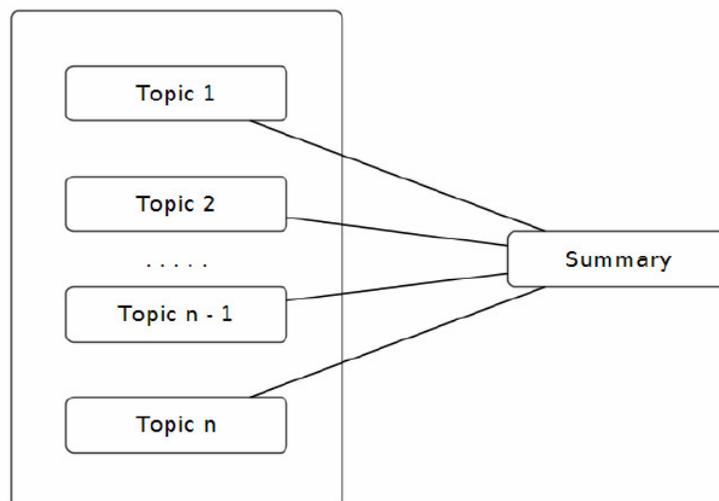
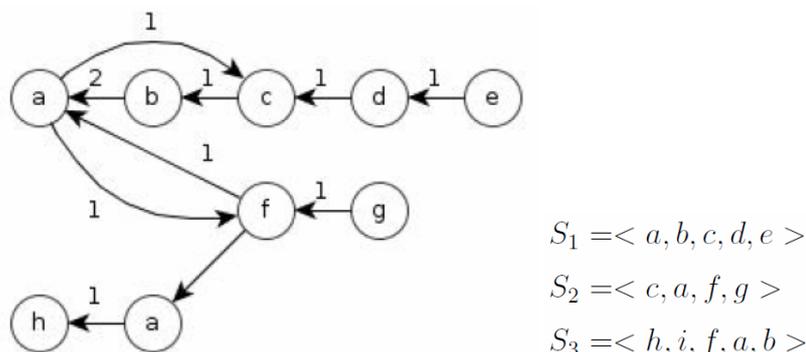


Рисунок 1 – Общая схема алгоритма

Считаем, что произвольный текст (статьи в целом или топика) представляет собой последовательность предложений, каждое из которых состоит из слов. Тогда текст можно представить в виде графа, вершины которых слова, а направленные ребра показывают очередность следования слов. Ребра направлены от последующих слов к предыдущим. Пример построения графа приведен на рисунке 2. Веса ребер определяются естественным образом. Это количества вхождений соответствующих пар слов в весь текст. Заметим, что метод может применяться как к исходному тексту, так и предварительно «очищенному» от предлогов, союзов и других слов.

Рисунок 2 – Граф слов, ассоциированный с набором предложений S_1, S_2, S_3

Далее для вычисления весов слов рассматриваются именно такие графы. Веса слов можно вычислять различными способами. В частности, в работе [1] предлагается вычислять их по формуле:

$$W(v_i) = \frac{1 - \lambda}{N} + \lambda \sum_{v_j \in In(v_i)} \frac{W(v_j)}{|Out(v_j)|},$$

где N – количество вершин в графе; $In(v_k)$ – множество вершин, соединенных входящими в v_k связями; $Out(v_k)$ – множество вершин, соединенных исходящими из v_k связями; λ – коэффициент затухания.

Опустив подробности, сразу же отметим, что данная формула корректна, т.е. веса всегда однозначно вычисляются. Также отметим, что приведенное определение напоминает понятие ранга формулы в математической логике.

Чтобы разбить исходную статью на топики в [1] используется метод кластеризации, например, Group-Average Agglomerative Clustering. Простейший метод – это топиками считать абзацы статьи. Некоторые топики могут быть выделены вручную.

Переходим непосредственно к процессу резюмирования. Итак, на данной стадии имеется некоторый заранее заготовленный текстовый фрагмент Set_1 , точно относящийся к определенной теме. Фрагмент Set_2 – анализируемый фрагмент. В действительности, анализируемых фрагментов много. Он сопоставляется с фрагментом Set_1 на предмет релевантности, т.е. соответствия той же теме. Напомним, что в нашем случае он представляет собой фрагмент, выделенный из исходного (большого) текста посредством кластеризации или другим способом, как было указано выше. Процесс сбора всех фрагментов, удовлетворяющих определенному критерию соответствия, и является, по сути дела, процессом резюмирования.

Перейдем теперь к более детальному описанию алгоритма. Фрагменту Set_1 соответствует ориентированный граф $G = (V, E)$, описанный выше. Пусть далее w_{ij} – вес ребра $(V_i, V_j) \in E$, если таковое имеется, и $w_{ij} = 0$ в противном случае. Рассмотрим неориентированный граф, ассоциированный с графом G естественным образом. Множество вершин то же самое. Ребра возникают посредством «забывания» об ориентации. Вес ребра в новом графе будет равен $Link_Strength_{ij} = 2 \times \min(w_{ij}, w_{ji})$. Большое значение данной величины означает, что данные два слова многократно встречаются рядом в двух вариантах. А именно, первое слово предшествует второму или наоборот второе слово предшествует первому.

Далее вводим величину $Path_Length_{ij} = 1 / Link_Length_{ij}$. То есть, осуществлен переход к обратным величинам. Таким образом, получаем, что чем меньше $Path_Length_{ij}$, тем более выражено упомянутое выше свойство, иначе говоря, данные слова «очень связаны» между собой внутри данной темы.

Центральность по близости (Closeness centrality) – это понятие обычно используется при изучении социальных сетей и является показателем, насколько быстро распространяется информация в

сети от одного участника к остальным. В качестве меры расстояния между двумя участниками используется кратчайший путь в графе (геодезическое расстояние). Так, непосредственные друзья участника находятся на расстоянии 1, друзья друзей – на расстоянии 2, друзья друзей друзей – на расстоянии 3 и т.д. Далее берется сумма всех расстояний и нормируется. Полученная величина называется удаленностью вершины V_i от других вершин. Близость определяется как величина, обратная удаленности.

$$C_c(V_i) = \frac{N-1}{\sum_{t \in V \setminus \{V_i\}} d_G(V_i, t)},$$

где $d_G(V_i, t)$ – кратчайший путь от вершины V_i до вершины t .

Другими словами, центральность по близости позволяет понять, насколько близок рассматриваемый участник ко всем остальным участникам сети. Таким образом, важно не только наличие непосредственных друзей, но и чтобы у самих этих друзей тоже были друзья.

В нашем случае мы имеем дело с текстами, а не с социальными сетями. Но в обоих случаях используются теоретико-графовые конструкции. Поэтому, аналогично, можно вычислить центральность по близости для любой вершины в рассматриваемом неориентированном графе. При вычислении геодезического расстояния используются веса ребер $Path_Length_{ij}$.

Переходим теперь к процессу сравнения двух фрагментов Set_1 и Set_2 . Продемонстрируем основную идею на примере [1]. Предположим, что каждый из них состоит из трех предложений:

Set_1	Set_2
$A B C D$	$M N B D$
$B N D$	$C O D$
$W X B C$	$A B C$

Оставим только те слова, которые одновременно входят в оба текстовых фрагмента, получаем соответственно:

Set'_1	Set'_2
$A B C D$	$N B D$
$B N D$	$C D$
$B C$	$A B C$

Каждому из текстовых фрагментам Set'_1 и Set'_2 соответствует свой неориентированный граф. Заметим, что множество вершин у этих графов будет одно и то же, а именно $\{A, B, C, D, N\}$. Соответственно для всех вершин V_i можно вычислить центральность по близости в первом графе и во втором. Обозначим их $C_c(V_i)_1$ и $C_c(V_i)_2$ соответственно.

Далее подсчитываем величину $Diff(V_i) = (|C_c(V_i)_2 - C_c(V_i)_1| / C_c(V_i)_1) \times 100$. Она характеризует, насколько одинаково или различно употребление данного слова в контекстах первого и второго текстовых фрагментов. Множитель равный 100 позволяет, грубо говоря, выразить эту величину в процентах. Далее устанавливаем порог, который служит критерием «одинаковости» употребления слова. Например, в качестве порога можно взять медиану величин $Diff(V_i)$, и далее этот порог можно использовать при анализе других фрагментов.

На финальной стадии подсчитывается, сколько слов «преодолели» порог по формуле:

$$Score(Set_1, Set_2) = (Count_{match}(Set_1, Set_2) / Count(Set_1)) \times 100;$$

$Count_{match}(Set_1, Set_2)$ – количество всех слов из Set_1 , которые одновременно входят в Set_1 и Set_2 , и которые «преодолели» порог, т.е. прошли проверку на идентичность употребления в обоих текстовых фрагментах;

$Count(Set_1)$ – количество всех слов из Set_1 , которые подвергались анализу, т.е. просто одновременно входят в Set_1 и Set_2 .

Окончательный вывод делается по тому, насколько велико $Score(Set_1, Set_2)$, т.е. в конечном итоге и здесь эксперт выбирает соответствующий порог, позволяющий сделать вывод, что тема фрагмента Set_2 соответствует теме эталонного текстового фрагмента Set_1 .

3. Link Grammar Parser и модель определения релевантности. Обобщим теперь данный алгоритм и попытаемся учитывать синтаксическую структуру предложений. Для этого на третьем этапе перед тем, как вычислять веса топиков, воспользуемся результатом работы системы Link Grammar Parser. Это синтаксический анализатор английского языка, базирующийся на оригинальной теории синтаксиса английского языка. Программная система приписывает заданному предложению синтаксическую структуру, состоящую из множества помеченных связей, соединяющих пары слов. Пример синтаксического разбора предложения анализатором приведен на рисунке 3. Подробное описание этого Link Grammar Parser можно найти в [2,3].

```

          +-----Og-----+
    +-Ds-+---Ss-+      +---D*u-+
    |      |      |      |      |
the fox.n ate.v the rabbit.p

```

Рисунок 3 – Пример синтаксического разбора предложения

Переходим теперь к собственно описанию обобщенного алгоритма. Как и раньше считаем, что в нашем распоряжении имеется последовательность предложений $S = \langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle$. Далее к каждому из предложений применяем синтаксический анализатор Link Grammar Parser. В результате его работы получаем направленные связи между парами слов предложения. Аналогично, последовательности предложений соответствует ориентированный граф с помеченными ребрами $G = (V, E)$. Но в данном случае меткой ребра является пара $\langle T, n \rangle$, где T – тип связи (коннектора), n – количество раз, которое данная связь встретилась в последовательности предложений $S = \langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle$.

Отметим, что пара слов и коннектор, их соединяющий, в принципе, могут встретиться многократно. Две вершины могут соединяться однонаправленными параллельными ребрами, имеющими различные пометки, и, конечно, две вершины могут соединяться разнонаправленными ребрами. То есть «ребром с пометкой» назовем четверку $\langle V_1, V_2, T, n \rangle$. Предполагаем, что каждой связи T_i сопоставлено положительное число α_i , называемое ее весом или важностью.

Далее полагаем:

$$1) \mu(T_i, 1) = \alpha_i,$$

$$2) \mu(T_i, n) = n \cdot \mu(T_i, 1) = n \cdot \alpha_i,$$

$$3) \mu(T_{i_1}, n_1, \dots, T_{i_k}, n_k) = \sum_j \mu(T_{i_j}, n_j) = \sum_j n_j \cdot \alpha_j.$$

Таким образом, если из вершины V_i в вершину V_j идет множество параллельных ребер с пометками $\langle T_{i_1}, n_1 \rangle, \dots, \langle T_{i_k}, n_k \rangle$, то все они могут быть заменены одним ребром, имеющим вес равный $w_{ij} = \mu(T_{i_1}, n_1, \dots, T_{i_k}, n_k)$. Далее, как и раньше, можно определить

$Link_Length_{ij} = 2 \times (w_{ij}, w_{ji})$ и соответственно $Path_Length_{ij} = 1/(Link_Length_{ij})$. Отметим, что если для любого i выполнено $\alpha_i \geq 1$, то $Link_Length_{ij} \geq 2$ и $Path_Length_{ij} \leq 0.5$.

Соответствующим образом может быть изменена формула вычисления ранга слова. При этом можно использовать два варианта формулы.

Вариант первый:

$$S(V_i) = \frac{1-\lambda}{N} + \lambda \sum_{V_j \in IN(V_i)} \frac{w_{ji} \cdot S(V_j)}{|OUT(V_j)|}$$

Вариант второй:

$$S(V_i) = \frac{1-\lambda}{N} + \lambda \sum_{V_j \in IN(V_i)} \frac{w_{ji} \cdot S(V_j)}{\left(\sum_{V_k \in OUT(V_j)} w_{jk} \right)}$$

Приведенные выше формулы могут быть модифицированы на случай размытой логики Заде [4, 5]. А именно, считаем, что $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Далее можно, например, положить $\mu(T_i, n) = (1 - 1/2^n) \mu(T_i, 1) = (1 - 1/2^n) \alpha_i$. Формула возникает исходя из следующей идеи. Предполагаем,

что если связь входит однократно, то $\mu(T_i, 1) = \frac{1}{2} \alpha_i$, если двукратно, то $\mu(T_i, 2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \alpha_i$ и т.д.

Соответственно получаем $\mu(T_i, n) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \alpha_i = \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \alpha_i$.

Если задействовано несколько связей, то наиболее естественный вариант – это взять их дизъюнкцию $\mu(T_{i_1}, n_1, \dots, T_{i_k}, n_k) = \mu(T_{i_1}, n_1) \vee \dots \vee \mu(T_{i_k}, n_k)$. Дизъюнкция в логике Заде означает максимум истинностных значений. Можно также использовать их среднее значение, но этот вариант менее естественный. В случае среднего значения увеличение количества связей может приводить к уменьшению веса ребра в итоговом графе, если добавлять связи с маленькими весами. С другой стороны, вариант, когда используется дизъюнкция, не «чувствует», мало или много связей. Поэтому целесообразно произвести дополнительное уточнение метода.

Предположим, что $0 \leq \sum_i \alpha_i \leq 1$, т.е. фактически имеет место неравенство, аналогичное неравенству Крафта, известному в теории информации. Тогда имеем $\mu(T_i, n) = \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \alpha_i \leq \alpha_i$, и в итоге вместо дизъюнкции можно использовать сумму. Соответственно получаем: $w_{ij} = \mu(T_{i_1}, n_1, \dots, T_{i_k}, n_k) = \sum_j \mu(T_{i_j}, n_j) \leq \sum_j \alpha_j \leq 1$. Очевидно также, что $w_{ij} \geq 0$.

При определении ранга слова можно использовать первый вариант формулы, заменив сумму дизъюнкцией. Тогда значение ранга также будет лежать на отрезке $[0, 1]$. В итоге получаем $S(V_i) = \frac{1-\lambda}{N} + \lambda \cdot \bigvee_{V_j \in IN(V_i)} \frac{w_{ji} \cdot S(V_j)}{|OUT(V_j)|}$. Отметим, что возможны другие варианты данной формулы.

Например, дизъюнкция может быть заменена операцией $x \oplus y = x + y - x \cdot y$. Величина $C_c(V_i)$, называемая центральность по близости, может быть вычислена стандартным способом, и далее, для того, чтобы попасть в интервал $[0, 1]$, она может быть нормирована. В итоге имеем

$$\bar{C}_c(V_i) = \frac{C_c(V_i)}{\max_j \{C_c(V_j)\}}$$

4. Заключение. В статье речь идет о резюмировании, но в действительности, задача определения релевантности заданной теме важна сама по себе. Например, эта задача является основной при разработке новых методов интеллектуального поиска информации в сети. Разрабатываемые

методы, в идеале, должны позволять сопоставлять конструкции естественного языка и в ряде случаев отождествлять даже перефразированные варианты предложений, основываясь также на анализе их синтаксических структур. Таким образом, мы можем сопоставить поисковый запрос и текст, взятый из сети интернет или других источников, с целью определения релевантности (соответствия) текста поисковому запросу.

Аналогично, для определения источника распространения информации в социальных сетях можно использовать алгоритм оценки релевантности сообщений, оставляемых в социальных сетях, статьям, публикуемым в интернете. В частности, для того чтобы учесть синтаксическую структуру текста можно использовать результат работы синтаксического анализатора Link Grammar Parser.

Описанная модель представляется перспективной. Тем не менее, настоящая работа еще далека от завершения. Весьма вероятно, предложенный подход потребует доработки. Можно рассматривать множество вариаций обсуждаемого алгоритма: использовать различные методы кластеризации, меры схожести подтем, варьировать формулы для вычисления весов слов и др. Для того чтобы найти наилучшую конфигурацию, при которой алгоритм обеспечит качественные результаты, следует протестировать различные комбинации вариаций этого алгоритма, а также привлечь экспертов для оценки качества работы алгоритма. Это довольно трудоемкий процесс.

В заключение отметим, что ранее были предложены [6, 7] различные способы представления семантико-синтаксических отношений между смысловыми единицами предложения, методы построения этого представления на основе диаграмм Link Grammar Parser, а также способы вычисления степени совпадения естественно-языковых конструкций. Идеи были реализованы в информационно-поисковой системе iNetSearch. В итоге было получено, что методы, учитывающие перефразирования (перефразирование можно считать отдаленным аналогом перестановки слов) позволили улучшить работу системы, но, как показало тестирование, незначительно по сравнению с базовым алгоритмом. С другой стороны, была показана высокая эффективность учета синтаксических отношений, генерируемых системой Link Grammar Parser.

Работа выполнена при поддержке гранта 2581/ГФ3 МОН РК.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kumar N., Srinathan K., Varma V. Using graph based mapping of co-occurring words and closeness centrality score for summarization evaluation // CICLing Proceedings of the 13th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Text Processing, 2012. – P. 353-365.
- [2] Temperley D., Sleator D., Lafferty J. Link Grammar Documentation [Electronic resource]. – 1998. – Mode of access: <http://www.link.cs.cmu.edu/link/dict/index.html> (accessed 15 November 2012)
- [3] Sleator D., Temperley D. Parsing English with a Link Grammar. – Pittsburgh: School of Computer Science Carnegie Mellon University, 1991. – 93 p.
- [4] Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
- [5] Пивкин В.Я., Бакулин Е.П., Кореньков Д.И. Нечеткие множества в системах управления: Учебное пособие. – Новосибирск: НГУ, 1997. – 52 с.
- [6] Murzin F., Perfliev A., Shmanina T. Methods of syntactic analysis and comparison of constructions of a natural language oriented to use in search systems // Bull. Nov. Comp. Center, Comp. Science. – 2010. – Iss. 31. – P. 91-109.
- [7] Перфильев А.А., Мурзин Ф.А., Шманина Т.В. Методы синтаксического анализа и сопоставления конструкций естественного языка, ориентированные на применение в информационно-поисковых системах // Вестник НГУ. – 2011. – Т. 9, вып. 4. – С. 50-59.

REFERENCES

- [1] Kumar N., Srinathan K., Varma V. Using graph based mapping of co-occurring words and closeness centrality score for summarization evaluation. CICLing Proceedings of the 13th International Conference on Computational Linguistics and Intelligent Text Processing, 2012. P. 353-365.
- [2] Temperley D., Sleator D., Lafferty J. Link Grammar Documentation [Electronic resource]. 1998. Mode of access: <http://www.link.cs.cmu.edu/link/dict/index.html> (accessed 15 November 2012)
- [3] Sleator D., Temperley D. Parsing English with a Link Grammar. Pittsburgh: School of Computer Science Carnegie Mellon University, 1991. 93 p.
- [4] Zadeh L.A. The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning. Moscow.: Mir, 1976. 165 p. (in Russian, translated from American. Elsevier Publishing Company, Inc., 1975)
- [5] Pivkin V.Ya., Bakulin E.P., Korenkov D.I. Fuzzy sets in control systems: Manual. Novosibirsk State Univ., 1997. 52 p. (in Russian).

- [6] Murzin F., Perfliev A., Shmanina T. Methods of syntactic analysis and comparison of constructions of a natural language oriented to use in search systems. Bull. Nov. Comp. Center, Comp. Science. 2010. Iss. 31. P. 91-109.
- [7] Murzin F., Perfliev A., Shmanina T. Methods of syntactic analysis and comparison of constructions of a natural language oriented to use in search systems. Vestnik of Novosibirsk State Univ. Ser.: Information Technologies. Novosibirsk, 2012. Vol. 9, is. 4. P. 13-28. (in Russian).

**БЕРІЛГЕН ТАҚЫРЫПҚА БАЙЛАНЫСТЫ МӘТІННІҢ РЕЛЕВАНТЫН АНЫҚТАУ ҮЛГІЛЕРІ,
МӘТІНМЕН ЖӘНЕ РЕФЕРАТ ОҚУ МІНДЕТІМЕН АССОЦИАЦИЯЛАНҒАН ГРАФТАР**

Т. В. Батура, Ф. А. Мурзин, Д. О. Сперанский, Б. С. Байжанов, М. В. Немченко

Тірек сөздер: табиғи тілде мәтінді өңдеу, синтаксистік анализ, түйіндеме, Link Grammar Parser, релеванттық.

Аннотация: Мақала реферат оқу алгоритміне арналған. Мақсаты: мәтіннен тақырыпқа байланысты керекті фрагменттерді бөліп алу. Тақырып астында бір түсінікке негізделген, құбылысқа, жүйелі оқиғаға және т.б. байланысты сөйлемдер жиынтығы пайымдалады. Фрагменттер бірінен кейін бірі тұрып реттелуі міндетті емес. Мәтінде олардың арасында басқа тақырыпқа байланысты кірістірмелер болуы мүмкін. Ары қарай белгіленген фрагменттер берілген тақырыпқа байланысты түйіндемеге бірігуі мүмкін. Мақалада Нирадж Кумардың жұмысын сипаттайтын кейбір жалпыламалар ұсынылды. Қарастырылынып отырған әдіс Link Grammar Parser программалық жүйе істен шыққан кезде синтаксистік қателерді ескеруге мүмкіндік береді.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 33 – 41

**POLYMORPHIC TYPING OF ENTITIES AND
A TASK OF CONSTRUCTING MULTI-CRITERIA ACCESS
CONTROL MECHANISM****R. G. Bijashev, M. N. Kalimoldaev, O. A. Rog**

Institute of information and computing technologies, Almaty, Kazakhstan.

E-mails: mnk@ipic.kz, brg@ipic.kz, olga@ipic.kz

Key words: computer security, mandatory security policy, multi-criteria access control, security domain, type theory, computable functions.

Abstract. Problems of implementation of a formal model of multi-criteria system of access control (MSAC) are considered. This system allow the simultaneous use of a number of security models of mandate type represented in a unified manner, which provides a multi-aspect security access of subjects to objects.

The principle of multi-criteria access control is based on multiple categorization of the entities, implemented in the form of their multiple polymorphic typing. As a result, entity acquires a set of values corresponding to the categories, each of which is mapped to the certain security model.

An algebraic definition of the security model in the form of a pair of the domain security – security policy is given. Security domain corresponds to the category of the MSAC structured on several levels. Security policy is represented as a set of parameterized computable functions for constructing the security domain and setting an access relation on it. A set of such models forms a system of types of the MSAC, serving as a mechanism for restricting access of subjects to information objects. The paper sets a task of constructing an access control mechanism as a set of functions intended for calculations on each level of the structure of the security domains.

УДК 004.94

**ПОЛИМОРФНАЯ ТИПИЗАЦИЯ СУЩНОСТЕЙ И
ЗАДАЧА КОНСТРУИРОВАНИЯ МЕХАНИЗМА
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО РАЗГРАНИЧЕНИЯ ДОСТУПА****Р. Г. Бияшев, М. Н. Калимолдаев, О. А. Рог**

Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: информационная безопасность, мандатные политики безопасности, многокритериальное разграничение доступа, домен безопасности, теория типов, вычисляемые функции.

Аннотация. Рассматриваются вопросы реализации формальной модели системы многокритериального разграничения доступа (МСРД), допускающей одновременное применение ряда моделей безопасности мандатного типа, представленных единым образом, что обеспечивает многоаспектную безопасность доступа субъектов к объектам.

Предложен принцип многокритериального разграничения доступа, основанный на множественной категоризации сущностей, реализуемой в виде их множественной полиморфной типизации. В результате сущность приобретает набор значений, соответствующих категориям, каждой из которых сопоставляется определенная модель безопасности.

Дается алгебраическое определение модели безопасности в виде пары домен безопасности – политика безопасности. Домен безопасности соответствует категории МСРД, структурированной на нескольких уровнях, а политика безопасности представляется в виде набора параметризованных вычисляемых функций,

предназначенных для построения домена и задания на нем отношения доступа. Набор таких моделей образует систему типов МСРД, служащую механизмом разграничения доступа субъектов к информационным объектам. Ставится задача конструирования механизма разграничения доступа в виде множества функций, предназначенных для вычислений на каждом из уровней структуризации доменов безопасности.

1. Принцип реализации многокритериального разграничения доступа

Данная статья посвящена вопросам реализации многокритериальной системы разграничения и контроля доступа к информации (МСРД), формальная модель которой представлена в [1, 2].

Большинство моделей безопасности основаны на разделении множества сущностей систем разграничения доступа к информации на субъекты и объекты, и рассмотрении их взаимодействия как элементов с заданными свойствами по правилам определенной политики безопасности. Обозначим $E=\{e\}$ – множество сущностей системы, которое включает подмножества субъектов $S=\{s\}$ и объектов $O=\{o\}$.

Мандатные политики безопасности, применяемые в настоящее время для разграничения доступа, основаны на присвоении сущностям меток безопасности. Возможность предоставления доступа субъекта к объекту производится путем сравнения значений их меток безопасности и определения доминирования метки безопасности субъекта над меткой безопасности объекта. Для этого на множестве значений меток безопасности устанавливается отношение доминирования в виде отношения порядка.

К сожалению, каждая из известных моделей безопасности мандатного типа, регулируя доступ субъектов к объектам, рассматривает одно свойство сущности в качестве параметра разграничения доступа. Например, модель безопасности Белла и ЛаПадулы основана на предоставлении доступа по значениям уровня конфиденциальности субъектов и объектов. Ролевая модель разграничения доступа (RBAC) разграничивает доступ по видам операций с информационными объектами. Тематическая модель предоставляет доступ на основе принадлежности документа той или иной тематике, организационная – тому или иному отделу организации [3–5].

Разграничения доступа по отдельному признаку недостаточно для отражения реальных ситуаций, имеющих место в условиях функционирования информационных систем, где данные характеризуются рядом разнотипных свойств, требующих учета в качестве параметров разграничения доступа.

В настоящее время поднимается вопрос обеспечения «многосторонней безопасности» («multilateral security») [6], учитывающей все аспекты защиты от несанкционированного доступа в информационных системах. Эту проблему можно решить, разграничивая доступ с одновременным использованием политик безопасности по каждому из критериев и совместно применяя при этом соответствующие модели безопасности в рамках одной системы, что вызывает трудности из-за отсутствия их единообразного представления.

Проблеме единообразного представления моделей безопасности, а также вопросам их сводимости к друг к другу, посвящены такие работы как [7, 8] и ряд других. Следует отметить, что до настоящего времени единая точка зрения на решение этой проблемы отсутствует.

В формальной модели МСРД, с целью обеспечения многоаспектной безопасности, предлагается принцип единообразного представления политик безопасности мандатного типа и соответствующих им моделей, дающий возможность их одновременного применения в рамках одной системы и обеспечивающий разграничение доступа по нескольким критериям.

Единое представление политик безопасности и соответствующих им моделей. Единое представление политик безопасности и соответствующих им моделей безопасности в МСРД осуществляется следующим образом.

Пространство субъектов и объектов, образующее предметную область многокритериальной системы разграничения доступа, классифицируется по различным признакам, таким как отделы, тематика, роли, уровни конфиденциальности, образуя структурные единицы, которые имеют в общем случае иерархическое строение. Согласно своим свойствам, сущность может оказаться принадлежащей нескольким структурным единицам и, следовательно, нескольким классифицирующим категориям, называемым категориями разграничения доступа или категориями безопасности.

Категория МСРД содержит все возможные значения привилегий доступа (атрибутов безопасности, или классификационных атрибутов), которые сущности могут иметь по этой категории. Разрабатываемый вариант МСРД предполагает независимость категорий.

Для обеспечения возможности выполнения мандатных политик безопасности по каждой из категорий сравнением значений привилегий доступа сущностей, множества элементов категорий структурируются единым образом путем задания для каждой категории отношения частичного порядка, представляющего отношение доминирования меток безопасности. Конкретный вид этого отношения зависит от политики безопасности, применяемой для категории.

Таким образом, каждая категория приобретает тип, определяемый как множество элементов категории, упорядоченное в соответствии с применяемой для этой категории политикой безопасности.

Тип категории применяется для классификации сущностей МСРД. Он определяет возможность использования сущности в рамках той или иной политики безопасности средствами соответствующей модели безопасности и служит информационно-логической схемой предметной области этой модели.

Типизация категорий – это динамический процесс, он реализует категоризацию сущностей в МСРД и осуществляется администратором в процессе *функционирования* системы разграничения доступа.

Обобщенный тип категории, следуя [9], может быть представлен в виде:

$$T = (D, \leq, Op), \quad (1)$$

где D – домен категории; \leq – отношение частичного порядка на множестве элементов категории, представляющего на ней отношение доминирования значений меток безопасности. Множество, в частности, может быть неупорядоченным, упорядоченным линейно или упорядоченным иерархически в виде дерева; Op – множество операций с элементами множества D .

Такая организация структуры категории позволяет осуществлять иерархическую группировку привилегий доступа, что обеспечивает:

- передачу прав доступа по уровням структуры категории;
- возможность группового управления привилегиями доступа с учетом иерархической организации пространства субъектов и объектов.

Подвиды структур, образуемых отношением частичного порядка, отражают особенности моделей безопасности.

Например, линейно упорядоченное множество используется в модели Белла и ЛаПадулы.

Скалярное множество подходит для применения в моделях ролевого, тематического или организационного разграничения доступа, категории которых не содержат иерархической группировки названий привилегий доступа.

Эти же модели могут иметь категории, в которых привилегии доступа образуют иерархически вложенные группы. Так, ролевая модель разграничения доступа (RBAC) разграничивает доступ по видам операций и их группам. К числу операций относятся «чтение», «запись», «корректировка». Они могут быть объединены в группы, или роли, такие как «автор», «редактор», «рецензент», «администратор» и т.д. Названия тематик и отделов в тематической и организационной моделях разграничения доступа также допускают иерархическую группировку.

Множественная типизация сущности. В соответствии с принадлежностью к определенной категории сущность получает значение метки безопасности в виде привилегии доступа по этой категории, причем для субъекта привилегия доступа выражает его право доступа, а для объекта – вид доступа.

Значение метки безопасности сущности по определенной категории служит своего рода интерфейсом, или ключом доступа данной сущности по категории. Для субъекта оно означает возможность доступа ко всем тем объектам, чьи метки безопасности доминируются меткой безопасности данного субъекта. Для объекта оно означает, что к нему имеют доступ все субъекты, метки безопасности которых доминируют над его меткой безопасности.

При поступлении запроса на доступ от субъекта к объекту, их метки безопасности сравниваются для установления факта доминирования метки безопасности субъекта над меткой безопас-

ности объекта, что означает возможность доступа или выполнение политики безопасности по категории.

Метка безопасности сущности e по категории i определяется д в у м я с п о с о б а м и:

- а) e_i – как элемент частично упорядоченного множества категории;
- б) $\{e_i\}$ – как подмножество подчиненных ему элементов.

Таким образом, в многокритериальной системе разграничения доступа производится множественная категоризация сущностей, реализуемая в виде их множественной типизации.

Набор значений привилегий, полученный сущностью по всем категориям, образует ее метку безопасности, которая *однозначно определяет* сущность (субъект или объект) в системе разграничения доступа. Метка безопасности сущности в системе также определяется двойкой:

- а) в виде кортежа элементов категории:

$$e = (e_1, e_2, \dots, e_n), \quad (2)$$

где e_i – метка безопасности сущности по категории i , заданная в виде элемента категории;

- б) в виде кортежа подмножеств элементов категорий:

$$\{e\} = (\{e_{1i}\}, \{e_{2i}\}, \dots, \{e_{ni}\}), \quad (3)$$

где $\{e_i\}$ – метка безопасности сущности по категории i , заданная в виде подмножества элементов категории, подчиненных элементу e_i ; n – число категорий.

Равенства (2)-(3) являются формулировкой механизма типизации сущностей МСРД.

В соответствии с этим на множестве элементов категории i определяется 2 ф о р м ы отношения доминирования метки безопасности субъекта над меткой безопасности объекта:

- а) Как отношение иерархического предшествования \geq на множестве элементов категории:

$$s \geq o \Leftrightarrow s \geq o ;$$

- б) Как отношение включения подмножеств частично упорядоченного множества элементов категории, подчиненных элементам категории, задающих метки безопасности субъекта и объекта:

$$\{s\} \geq \{o\} \Leftrightarrow \{s\} \subset \{o\} \text{ или } \{s\} \supset \{o\} .$$

Направление оператора включения зависит от политики безопасности для категории.

Категорию можно рассматривать как структурированное множество всевозможных значений меток безопасности сущностей по ней.

Определение механизма разграничения доступа для категории. В [3, 10] показано, что модели безопасности мандатного доступа относятся к классу LBAC (Lattice Based Access Control – метод разграничения доступа, основанный на решетке) и контроль безопасности информационных потоков в них базируется на использовании аппарата решеточно упорядоченных множеств.

Определим обобщенный механизм разграничения доступа для категорий со структурами различных видов. Для этого представим тип категории (1) в виде полной решетки, упорядоченной отношением доминирования меток безопасности способом, указанным в [9, 3]:

$$T_L = (D_L, \leq, Op), \quad (4)$$

где D_L – домен типа категории (1) в виде полной решетки, дополненный элементами T и \perp :

$$D_L = D \cup \{T, \perp\},$$

\leq и Op – указаны в (1).

Символ T помещается в корень дерева элементов категории. В зависимости от контекста операции, он обозначает или максимальный элемент категории или все множество ее элементов. Аналогично, символ \perp , на который замыкаются все листовые вершины дерева, обозначает или минимальный элемент категории или пустое множество ее элементов.

При этом появляется возможность задать операции множества Op из (4) для получения точной верхней и точной нижней грани для любой пары сущностей категории i . Эти операции представляют механизм разграничения доступа по категории для пары субъект-объект, представленных значениями своих меток безопасности.

Для значений меток безопасности в виде элементов категории точная верхняя и точная нижняя грани определяются как:

$$\text{MAX}(s, o) = \begin{cases} T (\text{доступ запрещен}) \\ s, \text{ если } s \geq o (\text{доступ разрешен}) \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{MIN}(s, o) = \begin{cases} \text{T (доступ запрещен)} \\ o, \text{ если } s \geq o \text{ (доступ разрешен)} \end{cases} \quad (6)$$

Для значений меток безопасности в виде подмножеств элементов категории определение точных верхних и нижних граней производится как:

$$\text{MAX}(\{s\}, \{o\}) = \begin{cases} \text{T (доступ запрещен)} \\ \{s\}, \text{ если } \{s\} \supset \{o\} \mid \{s\} \subset \{o\} \text{ (доступ разрешен)} \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{MIN}(\{s\}, \{o\}) = \begin{cases} \text{T (доступ запрещен)} \\ \{o\}, \text{ если } \{s\} \supset \{o\} \text{ или } \{s\} \subset \{o\} \text{ (доступ разрешен)} \end{cases} \quad (8)$$

где направление отношения включения зависит от политики безопасности для категории.

Определенный таким образом механизм разграничения доступа предназначен для реализации политики безопасности МСРД для сущностей определенной категории.

Многокритериальная политика безопасности МСРД. В МСРД, ввиду применения мандатных политик безопасности, предполагается централизованное или принудительное управление доступом, которое означает, что администрирование политик безопасности и привилегий доступа производится специальным выделенным субъектом – администратором, а пользователи лишены возможности изменения и передачи своих прав доступа.

Разграничение доступа субъектов к объектам согласно многокритериальной политике разграничения доступа выполняется следующим образом. При поступлении запроса на доступ от субъекта к объекту, МСРД производит сравнение значений их меток безопасности по каждой из категорий в соответствии с сопоставленными этим категориям политиками безопасности и принимает решение о возможности доступа при условии выполнения политики безопасности для каждой из них.

Разграничение доступа субъектов к объектам происходит в процессе функционирования МСРД, во время выполнения операторов языка определения данных (ЯОД) и языка манипулирования данными (ЯМД). Операторы ЯОД используются для выполнения операций администрирования политик безопасности и прав доступа сущностей, а операторы ЯМД – для предоставления различных видов доступа субъектов к объектам.

В основе работы операторов лежит предикат доступа $P = A(s, o)$, определенный на декартовом произведении множеств значений меток безопасности субъектов и объектов

$$S \times O,$$

где $S = \{s\}$ – множество субъектов, заданных своими метками безопасности:

$$s = (s_1, s_2, \dots, s_n),$$

$O = \{o\}$ – множество объектов, заданных метками безопасности:

$$o = (o_1, o_2, \dots, o_n),$$

при этом метки безопасности определяются механизмом типизации (2), (3).

Оператор МСРД выполняется, если значение предиката истинно:

$$P \supset \text{Имя_оператора}(s, o).$$

Для осуществления многокритериальной политики безопасности в МСРД производится:

- а) типизация категорий МСРД;
- б) динамическая типизация сущностей как объектов разграничения доступа по каждой из категорий. При этом сущности присваивается метка безопасности в виде набора значений различных типов, сопоставленных категориям МСРД;
- в) предоставление доступа субъекта к объекту на основании сравнения однотипных значений меток безопасности субъекта и объекта.

Программная реализация многокритериальной политики безопасности МСРД требует конструирования механизма разграничения доступа для каждой из категорий, определенного с помощью (5)-(8), который, по сути, служит реализацией предиката доступа P .

Обобщенное определение модели безопасности для категории. Вышеизложенное позволяет нам дать формальное определение модели безопасности для категории в виде типа категории, а также модели безопасности всей МСРД в виде системы типов МСРД.

Модель безопасности для категории SM_i – строится методом денотационной семантики в виде системы функций, представляющих субъекты и объекты их метками безопасности, и отношения между ними. Эти функции являются средствами динамической типизации категории, выполняя роль политики безопасности для нее.

Модель безопасности для категории i представляет собой пару

$$SM_i = (SD_i, SP_i), \quad (9)$$

где SM_i – модель безопасности для категории; SD_i – домен безопасности для категории. Является декларативным или экстенциональным представлением типа категории в виде домена типа с заданным на нем отношением частичного порядка; SP_i – политика безопасности для категории. Является процедурным или интенциональным представлением типа категории в виде множества параметризованных вычислимых функций;

Модель безопасности МСРД, представляющая собой механизм разграничения доступа и одновременно являющаяся ее системой типов, определяется как объединение моделей безопасности для категорий:

$$SM = \bigcup_{i=1}^n SM_i.$$

Объектами этой модели служат сущности системы разграничения доступа, однозначно представленные своими метками безопасности.

2. Полиморфное представление системы типов МСРД

Параметр полиморфного представления декларативного и процедурного типов категории (параметр структуризации категории). Система типов многокритериальной системы разграничения доступа (8) обладает свойством параметрического полиморфизма, который позволяет определить входящие в ее состав функции политики безопасности для i -й категории

$$SP_i, i = \overline{1, n}$$

таким образом, чтобы вычисления их значений производились идентично вне зависимости от вида структуры типа категории.

Как уже упоминалось, видами структуры множества элементов категории МСРД могут быть подструктуры частично упорядоченного множества, такие как скалярное множество, линейно упорядоченное множество, иерархия в виде дерева.

Для конструирования системы типов МСРД предполагается использовать методику синтаксически ориентированного конструирования типов и функций для их обработки [11]. Следуя специально разработанной для данной методики нотации Ч. Хоара, параметром полиморфного представления системы типов МСРД можно назвать вид структуры категории, диапазон значений которого включает «множество», «список», «дерево».

Структура домена безопасности для категории. Параметрический полиморфизм системы типов дает возможность единообразного представления различных моделей безопасности в многокритериальной системе разграничения доступа.

Домен безопасности SD_i для категории из определения модели безопасности (9) имеет многоуровневую структуру цепочки доменов. Каждый уровень представлен единым для всех категорий образом, зависящим от параметра полиморфного представления типа категории:

$$SD_i = D_i^{Syn} \rightarrow D_i^{Sem} \rightarrow D_i^{SL} \rightarrow B, \quad (10)$$

где D_i^{Syn} – синтаксический домен категории, неструктурированное множество значений привилегий доступа; D_i^{Sem} – семантический домен категории. Является множеством D_i^{Syn} , структурированным в виде полной решетки в соответствии с параметром полиморфного представления типа

категории; D_i^{SL} – домен меток безопасности категории. Представляет собой множество D_i^{Sem} с определенными на нем значениями меток безопасности в соответствии с механизмом типизации (2)-(3). Значения меток безопасности в виде подмножеств сохраняют структуру категории, задаваемую параметром ее полиморфного представления; B – домен булевых значений {истина, ложь}. Его элементы показывают возможность доступа субъекта к объекту, которая определяется с помощью механизма разграничения доступа (5)-(8).

Домен D_i^{SL} является типизированной матрицей доступа категории, представляющей ее область безопасного доступа.

Объединение доменов меток безопасности всех категорий

$$D^{SL} = \bigcup_{i=1}^n D_i^{SL}$$

образует типизированную матрицу доступа МСРД, являющуюся областью безопасного доступа МСРД.

3. Система типизации как механизм многокритериального разграничения доступа

Политика безопасности для категории. Формальное представление политики безопасности SP_i из (9) выполняет роль системы типизации для категории. Типизация категорий и сущностей производится динамически, в процессе функционирования МСРД.

Система типизации для категории предназначена для конструирования домена безопасности SD_i из (9) и реализации на нем предиката доступа по категории $P_i=A(s,o)$ в виде механизма разграничения доступа, которое производится с целью обеспечения соблюдения правил политики безопасности для категории.

Формальное выражение политики безопасности SP для всей системы разграничения доступа

$$SP = \bigwedge_{i=1}^n SP_i$$

является конъюнкцией формальных выражений механизмов разграничения доступа SP_i по всем категориям. Она обеспечивает соблюдение многокритериальной политики безопасности МСРД.

Система типизации для категории в процессе функционирования МСРД выполняет следующие функции:

а) устанавливает отношение доступа на множестве СЧО при выполнении операторов ЯОД по типизации категорий;

б) проверяет его истинность для пар (s, o) при выполнении операторов ЯМД по предоставлению доступа субъектов к объектам.

При этом система типизации выполняет **задачу** полиморфной структуризации категорий различных видов на всех их уровнях для построения соответствующих категориям доменов безопасности.

Механизм разграничения доступа, реализующий систему типизации для категории, представляется в виде множества вычислимых параметризованных функций, определенных на различных уровнях домена безопасности для категории, определенного в (10). Это множество включает функции для реализации механизма типизации и механизма разграничения доступа по категории.

Политика безопасности для категории задается следующим образом:

$$SP_i = F^{Sem} \rightarrow F^{SL} \rightarrow F^B,$$

где F^{Sem} – параметрические функции построения семантического домена как абстрактного типа данных с параметром полиморфного представления категории, выполняющие задачу типизации категорий:

$$F^{Sem}: D^{Syn} \rightarrow D^{Sem}$$

F^{SL} – функция уровня безопасности. Присваивает сущности ее метку безопасности. Выполняет задачу типизации субъектов и объектов, определенную механизмом типизации (2), (3):

$$F^{SL}: D^{Sem} \rightarrow D^{SL}$$

F^B – функция безопасного доступа. Определяет возможность доступа субъекта к объекту, реализует при этом механизм разграничения доступа, определенный в (5)-(8):

$$F^B: D^{SL} \times D^{SL} \rightarrow B$$

Функции SP_i , представляют функциональную программу, вычисляющую значения меток безопасности сущностей как неподвижных точек, и значения отношения доступа между ними в виде значений булевого домена B .

Таким образом, можно сделать вывод о том, что задача построения механизма разграничения доступа МСРД сводится к созданию функциональной программы для реализации системы типизации каждой категории.

Заключение. Показана возможность параметризованного представления моделей безопасности различных видов для их совместного применения в многокритериальной системе разграничения доступа к защищаемым информационным ресурсам.

Строится модель безопасности в виде системы типов МСРД, которая служит реализацией механизма разграничения доступа субъектов к объектам и осуществляет многокритериальную политику безопасности МСРД. Система типов представляется двояко: декларативно – как структура данных и процедурно – как параметризованное множество частично-рекурсивных функций. Эти функции лежат в основе реализации операторов ЯОД и ЯМД МСРД.

Такое представление системы типов дает возможность единообразно типизировать категории различной структуры и осуществлять выполнение соответствующих им политик безопасности.

Построенный механизм является функциональной программой, которая вычисляет значения классификационных атрибутов доменов безопасности для каждой из категорий и принимает решение о предоставлении доступа субъекта к объекту.

Предложенный подход к построению механизма разграничения доступа исключает появление нежелательных информационных потоков, дает возможность группового управления привилегиями доступа по каждой категории, обеспечивает высокую скорость вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Калимолдаев М.Н., Бияшев Р.Г., Рог О.А. Формальное представление функциональной модели многокритериальной системы разграничения и контроля доступа к информационным ресурсам // Проблемы информатики. – 2014. – № 1(22). – С. 43-55.
- [2] Rog O.A. Polymorphic typing of entities in the multi-criteria system of access control and a task of constructing types. Information Technologies, Management and Society // The 12 th International Scientific Conference Information Technologies and Management. – 2014. April 16–17. – Riga, 2014. – P. 66.
- [3] Гайдамакин Н.А. Теоретические основы компьютерной безопасности: учебное пособие. – Екатеринбург: издательство Уральского университета, 2008. – 212 с.
- [4] Девянин П.Н. Модели безопасности компьютерных систем. Управление доступом и информационными потоками. Учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2011. – 320 с.
- [5] Грушо А.А., Тимонина Е.Е. Теоретические основы защиты информации. – М.: Издательство агентства «Яхтмен», 1996. – 192 с.
- [6] Anderson R.J. Security Engineering: a Guide to Building Dependable Distributed Systems. – Wiley Computer Publishing, 2001. – 890 p.
- [7] Иткес А.А. Объединение моделей логического разграничения доступа для сложноорганизованных распределенных информационных систем // Проблемы информатики. – 2010. – № 1(5). – С. 85-94.
- [8] Zhao G. On The Modeling of Bell-LaPadula Security Policies Using RBAC // Workshop on Enabling Technologies: Infrastructure for Collaborative Enterprises. – 2008. WETICE '08. IEEE 17th. – 23-25 June 2008. – P. 257-262.
- [9] Агафонов В.Н. Типы и абстракция данных в языках программирования (обзор). В Сб. Данные в языках программирования. Абстракция и типология / Пер. с англ.; под ред. В. Н. Агафопова. – М.: Мир, 1982. – 328 с.
- [10] Sandhu R.S. Lattice Based Access Control Models // IEEE Computer. – 1993. –Vol. 26, N 11. – P. 9-19.
- [11] Душкин Р. Алгебраические типы данных и их использование в программировании // Практика функционального программирования. – 2009. – Вып. 2. – С. 125-157.

REFERENCES

- [1] Kalimoldaev M.N., Bijashev R.G., Rog O.A. Formal'noe predstavlenie funkcional'noj modeli mnogokriterial'noj sistemy razgranichenija i kontrolja dostupa k informacionnym resursam. Problemy informatiki. 2014. N 1(22). S. 43-55.
- [2] Rog O.A. Polymorphic typing of entities in the multi-criteria system of access control and a task of constructing types. Information Technologies, Management and Society. The 12 th International Scientific Conference Information Technologies and Management. 2014. April 16–17. Riga, 2014. P. 66.
- [3] Gajdamakin N.A. Teoreticheskie osnovy komp'juternoj bezopasnosti: uchebnoe posobie. Ekaterinburg: izdatel'stvo Ural'skogo universiteta, 2008. 212 s.

- [4] Devjanin P.N. Modeli bezopasnosti komp'juternyh sistem. Upravlenie dostupom i informacionnymi potokami. Uchebnoe posobie dlja vuzov. M.: Gorjachaja linija-Telekom, 2011. 320 s.
- [5] Grusho A.A., Timonina E.E. Teoreticheskie osnovy zashchity informacii. M.: Izdatel'stvo agentstva «Jahtsmen», 1996. 192 s.
- [6] Anderson R.J. Security Engineering: a Guide to Building Dependable Distributed Systems. Wiley Computer Publishing, 2001. 890 p.
- [7] Itkes A.A. Ob#edinenie modelej logicheskogo razgranichenija dostupa dlja slozhnoorganizovannyh raspredelennyh informacionnyh sistem. Problemy informatiki. 2010. N 1(5). S. 85-94.
- [8] Zhao G. On The Modeling of Bell-LaPadula Security Policies Using RBAC. Workshop on Enabling Technologies: Infrastructure for Collaborative Enterprises. 2008. WETICE '08. IEEE 17th. 23-25 June 2008. P. 257-262.
- [9] Agafonov V.N. Tipy i abstrakcija dannyh v jazykah programmirovaniya (obzor). V Sb. Dannye v jazykah programmirovaniya. Abstrakcija i tipologija. Per. s angl.; pod red. V. N. Agafonova. M.: Mir, 1982. 328 s.
- [10] Sandhu R.S. Lattice Based Access Control Models. IEEE Computer. 1993. Vol. 26, N 11. P. 9-19.
- [11] Dushkin R. Algebraicheskie tipy dannyh i ih ispol'zovanie v programmirovanii. Praktika funkcional'nogo programmirovaniya. 2009. Vyp. 2. S. 125-157.

БОЛМЫСТАРДЫ ПОЛИМОРФТЫ ТИПТЕНДІРУ ЖӘНЕ КӨПКРИТЕРИАЛДЫ ҚОЛЖЕТІМДІЛІКТІ ШЕКТЕУ МЕХАНИЗМІН ҚҰРАСТЫРУ ЕСЕБІ

Р. Г. Бияшев, М. Н. Қалимолдаев, О. А. Рог

Тірек сөздер: ақпараттық қауіпсіздік, қауіпсіздіктің мандатты саясаты, көпкритериалды қолжетімділікті шектеу, қауіпсіздік домені, типтер теориясы, есептелінетін функциялар.

Аннотация. Субъектінің объектіге қолжетімділіктің көпәспектiлi қауiпсiздiгiн қамсыздандыратын, бiрыңғай түрде көрсетiлген, мандатты типтегi қауiпсiздiк моделдер қатарын бiр уақытта қолдану мүмкiндiгi бар, көпкритериалды қолжетiмдiлiктi шектеу жүйесiнiң формалды моделiн (ҚШЖМ) жүзеге асыру мәселелерi қарастырылып отыр.

Болмыстарды көптік катергоризациялау негiзiнде, олардың көптік полиморфты типизация түрiнде жүзеге асырылатын, көпкритериалды қолжетiмдiлiктi шектеу принципi ұсынылған. Нәтижесiнде болмыс әрқайсысы белгiлi бiр қауiпсiздiк моделi безбендiрiлетiн, категорияларға сәйкес, мәндер жиынын қабылдайды.

Қауiпсiздiк саясаты – қауiпсiздiк доменiнiң жұп түрiндегi, қауiпсiздiк моделiнiң алгебралық анықтамасы берiледi. Бiрнеше деңгейде құрылымдалған, қауiпсiздiк доменi ҚШЖМ категориясына сәйкес келедi, ал қауiпсiздiк саясаты домен құрастыру және ондағы қолжетiмдiлiк қатынасын белгiлеуге арналған параметрленген есептелiнетiн функциялар жиыны түрiнде ұсынылады. Осындай моделдер жиыны, ақпараттық объектiге субьектiлердiң қолжетiмдiлiгiн шектеу механизмi ретiнде қызмет ететiн ҚШЖМ типтер жүйесiн құрайды. Функция жиыны түрiндегi, қауiпсiздiк доменiн құрылымдаудың әр деңгейiнде есептеуге арналған, қолжетiмдiлiктi шектеу механизмiн құрастыру мақсаты қойылып отыр.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 42 – 48

UDK 519.224

TESTING A DIFFERENTIAL CONDITION AND LOCAL NORMALITY OF DENSITIES

K. T. Mynbaev¹, A. S. Aipenova²

¹Kazakh British Technical University, Almaty, Kazakhstan,
RSE «Institute of Mathematics and Mathematical Modeling», Almaty, Kazakhstan;

²Kazakh National University after al-Farabi, Almaty,
RSE «Institute of Mathematics and Mathematical Modeling», Almaty, Kazakhstan.
E-mail: kairat_mynbayev@yahoo.com, a.aipenova@mail.ru

Key words: testing, local normality test, alternative hypothesis, null hypothesis, asymptotic normality.

Abstract. In this paper, we consider testing if a density satisfies a differential equation. This result can be applied to see if a density belongs to a particular family of distributions. For example, the standard normal density $f(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$ satisfies the differential equation $f'(t) + tf(t) = 0$. If a density satisfies this equation at that point t , then it is called *locally standard normal* at that point. Thus, there is a practical need to test whether a density satisfies a certain differential equation. We consider the expression $F(x) = \sum_{l=0}^L g_l(x) f^{(l)}(x)$. We can test the null hypothesis $H_0: f$ satisfies the equation $F(x) = 0$ against the alternative hypothesis $H_a: F(x) \neq 0$. The testing procedure is accompanied by an asymptotic normality statement.

1. Introduction. In statistics, normality tests are used to determine if a data set is well-modeled by a normal distribution and to compute how likely it is for a random variable underlying the data set to be normally distributed. Nevertheless normality tests are useful in many areas of forecasting and econometric inference as complements to other diagnostic tests. The tests are a form of model selection, and can be interpreted several ways, depending on one's interpretations of probability, for example, in frequentist statistics, statistical hypothesis testing, data are tested against the null hypothesis that it is normally distributed.

In this paper, we propose a local normality test. Consider, for example, the standard normal density $f(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$. It satisfies a differential equation $f'(t) + tf(t) = 0$. The general solution of this equation is $f(t) = c \exp(-t^2/2)$, and if it is to be a density, one has to put $c = (2\pi)^{-1/2}$. We say that a density f is *locally standard normal* at point t if it satisfies the above differential equation at that point. Thus, there is a practical need to test whether a density satisfies a certain differential equation. The testing procedure is accompanied by an asymptotic normality statement.

There are a variety of statistical tests designed specifically to test the normality of data distribution. Different tests of normality often produce different results. The latest references concerning normality testing include [1–7]. According to [1], the Shapiro-Wilk test has the best power for a given level of significance, followed closely by the Anderson-Darling test, Lilliefors test and Kolmogorov-Smirnov test. [2] showed that the Jarque-Bera test is superior in power to its competitors for symmetric distributions with medium up to long tails and for slightly skewed distributions with long tails. The power of the Jarque-Bera test is poor for distributions with short tails, especially if the shape is bimodal, sometimes the test is even biased. According to [3], for testing other distributions, the statistics based on generalized sample spacings and the modified Anderson-Darling statistic provide the most powerful tests. [6] compared the power of six formal tests of normality and showed that D'Agostino-Pearson test achieves

the highest power under all conditions for large sample size. Most existing tests are based on some global properties of normal distributions. Our test is local. Both global and local approaches have their advantages and deficiencies. The main difference between the global and local approaches consists in the amount of calculation: rejecting normality locally is enough to reject it globally.

2. Main results. Let X_1, X_2, \dots, X_n be independent identically distributed observation from distribution having unknown density f . The Rosenblat-Parzen estimator for the density f evaluated at $x \in R$ is defined by

$$\hat{f}_R(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_j}{h}\right),$$

where $h > 0$ is a bandwidth and K is a kernel on R satisfying $\int_R K(t) dt = 1$. Denote $\alpha_j(K) = \int_R x^j K(x) dx$ the j -th moment of K and let K be a kernel of order q , that is $\alpha_j(K) = 0$, $j = 1, \dots, q-1$, $\alpha_q(K) \neq 0$

If f and K are l times continuously differentiable, then differentiation of $\hat{f}_R(x)$ leads to the estimator of $f^{(l)}(x)$

$$\hat{f}^{(l)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{h^{l+1}} K^{(l)}\left(\frac{x - X_j}{h}\right). \quad (1)$$

In asymptotic statements the sample size n tends to infinity and the bandwidth h depends on n but this dependence usually is not reflected in the notation.

Now we turn to the testing for local normality. More generally, consider the expression

$$F(x) = \sum_{l=0}^L g_l(x) f^{(l)}(x), \quad (2)$$

where $\{g_l(x)\}$ are given functions and the senior coefficient g_L is different from zero at the given point x . We can test

- the null hypothesis H_0 : f satisfies the equation $F(x) = 0$ against
- the alternative hypothesis H_a : $F(x) \neq 0$.

It is convenient to use the differential operator D defined by $(Df)(x) = F(x)$. Since the derivative $\hat{f}^{(l)}(x)$ is estimated by (1), it is natural to estimate $F(x)$ by

$$\hat{F}_h(x) = \sum_{l=0}^L g_l(x) \hat{f}_h^{(l)}(x, K) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^L \frac{g_l(x)}{h^{l+1}} K^{(l)}\left(\frac{x - X_j}{h}\right). \quad (3)$$

As one can see from part (a) of the next theorem, under the null hypothesis it also makes sense to consider the random variable $\hat{G}_h(x) = \hat{F}_h(x) / h$. Provided that

$$f(x) g_L(x) \neq 0, \quad (4)$$

let Ψ denote a normal variable distributed as $N\left(0, f(x) \left[\int g_L(x) K^{(L)}(t) dt\right]^2\right)$.

Assumption 1.

- f is infinitely differentiable.
- K has l continuous derivatives and $\max_{l=0, \dots, L} \|K^{(l)}\|_{C(R)} < \infty$.

Theorem 1. Suppose that Assumption 1 holds. Then the following statements are true:

- The bias of (3) is given by

$$E\hat{F}_h(x) - F(x) = g_L(x) \frac{f^{(q+L)}(x)}{q!} (-h)^q \alpha_q(K) + O(h). \quad (5)$$

Consequently, under H_0

$$E\hat{F}_h(x) = O(h^q) \quad (6)$$

If, however, $E\hat{F}_h(x) \rightarrow const \neq 0$, as $h \rightarrow 0$, then $F(x) \neq 0$ and H_0 can be rejected.

b) If $nh^{2L+1} \rightarrow \infty$ and (4) holds, then under the null $p \lim \hat{F}_h(x) = 0$ (this equation is preferable to (6) because in practice $E\hat{F}_h(x)$ is unknown).

c) If $nh \rightarrow \infty$ and (4) holds, then

$$d) \quad (nh^{2L+1})^{1/2} [\hat{F}_h(x) - E\hat{F}_h(x)] \xrightarrow{d} \Psi. \quad (7)$$

If, in addition, $nh^{2L+3} \rightarrow 0$, then

$$(nh^{2L+1})^{1/2} [\hat{F}_h(x) - F(x)] \xrightarrow{d} \Psi$$

e) If $nh \rightarrow \infty$, and $nh^{2L+3} \rightarrow 0$ and (4) holds, then under the null $(nh^{2L+1})^{1/2} \hat{G}_h(x) \xrightarrow{d} \Psi$.

Proof: a) Denoting

$$\omega_j = \sum_{l=0}^L \frac{g_l(x)}{h^{l+1}} K^{(l)}\left(\frac{x - X_j}{h}\right), j = 1, \dots, n$$

we rewrite (3) as

$$\hat{F}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \omega_j, \quad (8)$$

$$E\hat{F}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=0}^L E \frac{g_l(x)}{h^{l+1}} K^{(l)}\left(\frac{x - X_j}{h}\right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E\omega_j = E\omega_1. \quad (9)$$

Assumption 2.

To justify integration by parts below, for any $h > 0$ and $j = 0, \dots, l-1, l \geq 1$

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} K^{(j)}(-s) f^{(l-1-j)}(x+sh) = \lim_{s \rightarrow +\infty} K^{(j)}(-s) f^{(l-1-j)}(x+sh) = 0$$

Using (9),

$$E\omega_1 = E\hat{F}_h(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=0}^L E \frac{g_l(x)}{h^{l+1}} K^{(l)}\left(\frac{x - X_j}{h}\right) \right) = \sum_{l=0}^L \frac{g_l(x)}{h^{l+1}} \int_R K^{(l)}\left(\frac{x-s}{h}\right) f(s) ds =$$

(changing variables)

$$= \sum_{l=0}^L \frac{g_l(x)}{h^l} \int_R K^{(l)}(-t) f(x+ht) dt = \sum_{l=0}^L g_l(x) \left(\frac{1}{h^l} \int_R K^{(l)}(-t) f(x+ht) dt \right) =$$

(then Assumption 2 allows us to integrate l times by parts)

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=0}^L g_l(x) \left(-\frac{1}{h^l} K^{(l-1)}(-t) f(x+ht) \right)_{-\infty}^{+\infty} + \sum_{l=0}^L g_l(x) \left(\frac{1}{h^{l-1}} \int_R K^{(l-1)}(-t) f'(x+ht) dt \right) \\ &= \sum_{l=0}^L g_l(x) \left(-\frac{1}{h} K(-t) f^{(l-1)}(x+ht) \right)_{-\infty}^{+\infty} + \sum_{l=0}^L g_l(x) \left(\int_R K(-t) f^{(l)}(x+ht) dt \right) = \dots = \\ &= \sum_{l=0}^L g_l(x) \left(\int_R K(-t) f^{(l)}(x+ht) dt \right) \end{aligned}$$

This integral typically is not analytically solvable, so we approximate it using Taylor expansion of $f^{(l)}(x+ht)$ in the argument ht , which is valid as $h \rightarrow 0$. For a q -th order kernel we take the expansion out to the q -th term

$$f^{(l)}(x+ht) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(l+i)}(x)}{i!} (ht)^i = f^{(l)}(x) + \frac{f^{(q+l)}(x)}{q!} (ht)^q + o(h^{q+1})$$

Using $\int_{-\infty}^{+\infty} K(t)dt = 1$ and $\alpha_q(K) = \int_R x^q K(x)dx$, we get

$$E\omega_1 = \sum_{l=0}^L g_l(x) f^{(l)}(x) + \sum_{l=0}^L g_l(x) \frac{f^{(q+l)}(x)}{q!} (-h)^q \left(\int_R K(-t)(-t)^q dt \right) + o(h^{q+1}) =$$

$$= (Df)(x) + g_L(x) \frac{f^{(q+L)}(x)}{q!} (-h)^q \alpha_q(K) + o(h^{q+1}). \tag{10}$$

Equation (5) follows from (3) and (10)

$$E\hat{F}_h(x) - F(x) = g_L(x) \frac{f^{(q+L)}(x)}{q!} (-h)^q \alpha_q(K) + o(h^{q+1}).$$

The rest of part a) is an obvious consequence of (5).

b) We need an asymptotic expression for the variance of $\hat{F}_h(x)$. By the i.i.d. assumption

$$\text{var}(\hat{F}_h(x)) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \text{var}(\omega_j) = \frac{1}{n} [E\omega_1^2 - (E\omega_1)^2].$$

We need to evaluate $E\omega_1^2$ and $(E\omega_1)^2$.

$$E\omega_1^2 = \sum_{l,m=0}^L \frac{g_l(x)g_m(x)}{h^{l+m+2}} EK^{(l)}\left(\frac{x-X_1}{h}\right)K^{(m)}\left(\frac{x-X_1}{h}\right) =$$

$$= \sum_{l,m=0}^L \frac{g_l(x)g_m(x)}{h^{l+m+2}} \int_R K^{(l)}\left(\frac{x-s}{h}\right)K^{(m)}\left(\frac{x-s}{h}\right)f(s)ds =$$

$$= \sum_{l,m=0}^L \frac{g_l(x)g_m(x)}{h^{l+m+1}} \int_R K^{(l)}(-t)K^{(m)}(-t)f(x+ht)dt =$$

$$= \frac{g_L^2(x)}{h^{2L+1}} \left\{ f(x) \int_R (K^{(L)}(t))^2 dt \right\} + \frac{g_L^2(x)}{h^{2L+1}} \sum_{\substack{0 \leq l,m \leq L \\ l+m \leq 2L-1}} \frac{g_l(x)g_m(x)}{g_L^2(x)} h^{2L-l-m} \left[f(x) \int_R K^{(l)}(-t)K^{(m)}(-t)dt \right] =$$

$$= \frac{g_L^2(x)}{h^{2L+1}} \left\{ f(x) \int_R (K^{(L)}(t))^2 dt + O(h) \right\}. \tag{11}$$

Combining (10) and (11), we obtain the expression for the variance

$$\text{var}(\hat{F}_h(x)) = \frac{g_L^2(x)}{nh^{2L+1}} \left\{ f(x)\alpha_0 [K^{(L)}]^2 + O(h) \right\} - \frac{1}{n} [F(x) + O(h)]^2 =$$

$$= \frac{1}{nh^{2L+1}} \left\{ f(x)\alpha_0 [g_L(x)K^{(L)}]^2 + O(h) \right\}. \tag{12}$$

If H_0 holds then by (5) $E\hat{F}_h(x) \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ and by the Chebyshev inequality (12) implies

$$P\left(|\hat{F}_h(x) - E\hat{F}_h(x)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{var}(\hat{F}_h(x)) \rightarrow 0, h \rightarrow 0, \text{ for any } \varepsilon > 0.$$

Hence, $\hat{F}_h(x) = [\hat{F}_h(x) - E\hat{F}_h(x)] + E\hat{F}_h(x) \xrightarrow{P} 0$.

c) Let us prove convergence in distribution of the standardized version $S_n = [\hat{F}_h(x) - E\hat{F}_h(x)] / [\text{var}(\hat{F}_h(x))]^{1/2}$ of $\hat{F}_h(x)$. Using (8), we have

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\omega_j - E\omega_j}{\left[\text{var}(\hat{F}_h(x))\right]^{1/2}} = \sum_{j=1}^n X_{nj}$$

where $X_{nj} = \omega_j - E\omega_j / \left[\text{var}(\hat{F}_h(x))\right]^{1/2}$.

It is easy to see that by the i.i.d property

$$EX_{nj} = 0, \quad \text{var}(X_{nj}) = \frac{\text{var}(\omega_j)}{n^2 \text{var}(\hat{F}_h(x))} = \frac{1}{n}, \quad \text{var}(S_n) = 1.$$

Alternatively, using the notation in the Lindeberg-Feller theorem [7], we can rewrite

$$\mu_{nj} = 0, \quad \sigma_{nj} = \frac{1}{n}, \quad \sigma_n = 1.$$

Let F_{nj} be the distribution function of X_{nj} . Since X_{nj} are i.i.d., all F_{nj} coincide with F_{n1} and the Lindeberg function takes the form

$$\begin{aligned} \lambda &\equiv \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{j=1}^n \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nj} = n \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{n1}(x) \leq \frac{n}{\varepsilon^\delta} \int |x|^{2+\delta} dF_{n1}(x) = \\ &= \frac{n}{\varepsilon^\delta} E|X_{n1}|^{2+\delta} = \frac{E|\omega_1 - E\omega_1|^{2+\delta}}{\varepsilon^\delta n^{1+\delta} \left[\text{var}(\hat{F}_h(x))\right]^{1+\delta/2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

By Holder's inequality

$$\left(E|\omega_1 - E\omega_1|^{2+\delta}\right)^{\frac{1}{2+\delta}} \leq 2 \left(E|\omega_1|^{2+\delta}\right)^{\frac{1}{2+\delta}} \leq$$

(plugging ω_1 in and applying Minkowski's inequality)

$$\begin{aligned} &\leq 2 \sum_{l=0}^L \frac{|g_l(x)|}{h^{l+1}} \left[E \left| K^{(l)} \left(\frac{x - X_1}{h} \right) \right|^{2+\delta} \right]^{\frac{1}{2+\delta}} = 2 \sum_{l=0}^L \frac{|g_l(x)|}{h^{l+1}} \left[\int_R \left| K^{(l)} \left(\frac{x-s}{h} \right) \right|^{2+\delta} f(s) ds \right]^{\frac{1}{2+\delta}} = \\ &= 2 \sum_{l=0}^L \frac{|g_l(x)|}{h^{l+1}} \left[\int_R \left| K^{(l)}(t) \right|^{2+\delta} f(x+ht) dt \right]^{\frac{1}{2+\delta}} \leq 3 \frac{|g_L(x)|}{h^{L+1}} \left\{ \left[f(x) \int_R \left| K^{(L)}(t) \right|^{2+\delta} dt + O(h) \right]^{\frac{1}{2+\delta}} \right\}. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\left(E|\omega_1 - E\omega_1|^{2+\delta}\right) \leq 3^{2+\delta} \left(\frac{|g_L(x)|^{2+\delta}}{h^{L+1-1/(2+\delta)}} \left\{ f(x) \int_R \left| K^{(L)}(t) \right|^{2+\delta} dt + O(h) \right\} \right). \quad (14)$$

Combing (12) and (14), we get

$$\lambda \leq \frac{n^{1+\delta/2} h^{(2L+1)(1+\delta/2)} \left[3 |g_L(x)| \right]^{2+\delta} \left\{ f(x) \int_R \left| K^{(L)}(t) \right|^{2+\delta} dt + O(h) \right\}}{\varepsilon^\delta n^{1+\delta} h^{L+1-1/(2+\delta)} \left\{ f(x) \alpha_0 \left[g_L(x) K^{(L)} \right]^2 + O(h) \right\}^{1+\delta/2}} = \frac{c(\varepsilon, \delta, x)}{(nh)^{\delta/2}} \rightarrow 0,$$

as $nh \rightarrow \infty$.

By the Lindeberg-Feller theorem the assumption $nh \rightarrow \infty$ implies $S_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$.

Now we can prove the convergence stated in (7). By (12) the limit in distribution of $(nh^{2L+1})^{1/2} \left[\hat{F}_h(x) - E\hat{F}_h(x) \right]$ is the same as that of

$$\begin{aligned} & \left\{ f(x)\alpha_0 \left[g_L(x)K^{(L)} \right]^2 + O(h) \right\}^{1/2} \frac{\hat{F}_h(x) - E\hat{F}_h(x)}{\left[\text{var}(\hat{F}_h(x)) \right]^{1/2}} = \\ & = \left\{ f(x)\alpha_0 \left[g_L(x)K^{(L)} \right]^2 + O(h) \right\}^{1/2} S_n \xrightarrow{d} \Psi. \end{aligned}$$

In the equation

$$\left(nh^{2L+1} \right)^{1/2} \left[\hat{F}_h(x) - F(x) \right] = \left(nh^{2L+1} \right)^{1/2} \left[\hat{F}_h(x) - E\hat{F}_h(x) \right] + \left(nh^{2L+1} \right)^{1/2} \left[E\hat{F}_h(x) - F(x) \right]$$

the first term on the right converges in distribution, as we have just proved, and the second is of order $O\left(\left(nh^{2L+1}\right)^{1/2} h\right) = O\left(\left(nh^{2L+3}\right)^{1/2}\right) = o(1)$, according to (5) and the assumption $nh^{2L+3} \rightarrow 0$.

(d) Under the null one has the identity $\left(nh^{2L+3}\right)^{1/2} \hat{G}_h(x) = \left(nh^{2L+1}\right)^{1/2} \left[\hat{F}_h(x) - F(x) \right]$, the conclusion follows from part (c).

REFERENCES

- [1] Razali N.M., Wah Y.B. Power comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling tests. Journal of Statistical Modeling and Analytics. 1983. Vol. 2, N 1. P. 21-33.
- [2] Thadewald T., Buning H. Jarque-Bera test and its competitors for testing normality – a power comparison. Journal of Applied Statistics. 2007. Vol. 34. P. 87-105.
- [3] Surucu B. A power comparison and simulation study of goodness-of-fit tests. Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. P. 1617-1625.
- [4] Farrell P.J., Rogers-Stewart K. Comprehensive study of tests for normality and symmetry: extending the Spiegelhalter test. Journal of Statistical Computation and Simulation. 2008. Vol. 76. P. 803-816.
- [5] Szekely G.J., Rizzo M.L. A new test for multivariate normality. Journal of Multivariate Analysis. 2005. Vol. 93. P. 87-105.
- [6] Saculinggan M., Balase E.A. Empirical power comparison of goodness of fit tests for normality in the presence of outliers. Journal of Physics. 2013. Vol. 435. P. 1-11.
- [7] Henze N., Zirkler B. A class of invariant and consistent tests for multivariate normality. Communications in Statistics – Theory and Methods. 1990. Vol. 19. P. 3595–3617.
- [8] Davidson J. Stochastic limit theory. New York Oxford University Press, 1994.

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ШАРТТАРДЫ ТЕСТІЛЕУ ЖӘНЕ ТЫҒЫЗДЫҚТЫҢ ЖЕРГІЛІКТІ НОРМАЛІ

Қ. Т. Мынбаев¹, А. С. Аипенова²

¹Қазақстан-Британ техникалық университеті, Алматы, Қазақстан
РМК «Математика және математикалық модельдеу институты», Алматы, Қазақстан,

²Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
РМК «Математика және математикалық модельдеу институты», Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: тестілеу, жергілікті нормальды тест, баламалы болжау, нөлдік болжау, асимптотикалық нормальдық.

Аннотация. Жұмыста, тығыздық функциясы дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратын тестілеу әдісі ұсынылады. Бұл нәтиже тығыздық функциясы нақты үлестірімдер жиынына жататынын тексеру үшін қолданылуы мүмкін. Мысалы, стандартты нормальді тығыздық $f(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$ жиыны келесі дифференциалдық теңдеуді $f'(t) + tf(t) = 0$ қанағаттандырады. Егер тығыздық осы теңдеуді t нүктесінде қанағаттандырса, онда ол осы нүктеде жергілікті стандартты нормальді деп аталады. Сондықтан, тексерудің тәжірибелік қажеттілігі туындайды, яғни тығыздық функциясы қандайда бір дифференциалдық теңдеуді қанағаттандыратынын тексеру керек. Мынадай өрнекті $F(x) = \sum_{l=0}^L g_l(x) f^{(l)}(x)$ қарастырамыз. Біз H_0 нөлдік болжауды тексере аламыз, егер f функциясы $F(x) = 0$ теңдікті қанағаттандырса баламалы болжауға қарсы $H_a: F(x) \neq 0$.

Тестілеу әдісі асимптотикалық нормальдық ұйғарыммен анықталады.

**ТЕСТИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ
И ЛОКАЛЬНАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ПЛОТНОСТИ**

К. Т. Мынбаев¹, А. С. Аппенова²

¹Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан,
РГП «Институт математики и математического моделирования», Алматы, Казахстан;
²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
РГП «Институт математики и математического моделирования», Алматы, Казахстан

Ключевые слова: тестирование, тестирование локальной нормальности, альтернативная гипотеза, нулевая гипотеза, асимптотическая нормальность.

Анотация. В этой статье предлагается процедура тестирования ли плотность удовлетворяет ли плотность дифференциальному уравнению. Этот результат может быть применен для проверки, что плотность относится к конкретному семейству распределений. Например, стандартная нормальная плотность $f(t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-t^2/2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'(t) + tf(t) = 0$. Если плотность удовлетворяет этому уравнению в этой точке t , то она называется локально стандартной нормальной в этой точке. Таким образом, существует практическая необходимость в проверке, удовлетворяет ли плотность некоторому дифференциальному уравнению. Рассмотрим выражение $F(x) = \sum_{l=0}^L g_l(x) f^{(l)}(x)$. Мы можем проверить нулевую гипотезу $H_0: f$ удовлетворяет уравнению $F(x) = 0$ против альтернативной гипотезы $H_a: F(x) \neq 0$.

Метод тестирования сопровождается утверждением об асимптотической нормальности.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 49 – 53

**APPLICATION OF A PARALLEL ALGORITHM
FOR SOLVING THE CLUSTERING PROBLEM FOR BIG DATA
BY COMPLETE LINKAGE CLUSTERING WITH USING THE GPU****V. Pospelova, G. Litvinenko**

Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Almaty, Kazakhstan

Key words: data clustering, big data, complete-linkage clustering, GPU, CPU, SIMD, MIMD.

Abstract. This article discusses the solution to the problem of cluster analysis with data volumes up to 1 million records and the number of fields to 25 by the complete linkage method (CLM) using the computing power of graphics processors. CLM is one of the most difficult techniques for implementation in the program code. Large amounts of computation with this method require significant computational resources. In this paper is developed a parallel algorithm that focuses on the use of hybrid CPU and GPU.

This development may have a certain interest in solving problems with big data in in applied sciences.

УДК 519.683; 519.684

**ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КЛАСТЕРИЗАЦИИ
ДЛЯ БОЛЬШИХ ОБЪЕМОВ ДАННЫХ ПО МЕТОДУ ПОЛНОЙ СВЯЗИ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРОВ****В. Поспелова, Г. Литвиненко**

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: кластеризация данных, большие объемы данных, метод полной связи, графический процессор, центральный процессор, SIMD, MIMD.

Аннотация. В данной статье рассматривается решение задачи кластерного анализа с объемами данных до **1 млн** записей и количеством полей до **25** по методу полной связи (далее **МПС**) с использованием вычислительных мощностей графических процессоров. **МПС** является одним из наиболее тяжелых методов для реализации в программном коде. Большие объемы вычислений по данному методу требуют привлечения значительных вычислительных ресурсов. В данной работе разрабатывается параллельный алгоритм, ориентированный на гибридное использование центрального и графического процессоров.

Данная разработка может иметь определенных интерес при решении задач с большими объемами данных в прикладных отраслях науки.

В последние десятилетия интеллектуальный анализ данных (Data Mining) получил активное развитие, как новое и перспективное направление в области обработки информации. Основной идеей и отличием Data Mining от классического анализа являются попытки смоделировать поведение человека при решении сложных интеллектуальных задач. Кластеризация данных является частной задачей интеллектуального анализа данных, основной целью которой является объединение в группы объектов, как можно более схожих между собой, и как можно более отличающихся от объектов в других группах [1]. Степень похожести для каждой пары объектов определяется

измерением некоторой меры сходства или «расстояния» между ними. Однако вычисление расстояний между объектами, а, тем более кластерами, представляет собой дорогостоящую по времени операцию. Поиск двух кластеров с минимальным расстоянием между ними осуществляется на каждом шаге, для каждой итерации. Для определения расстояния между кластерами по методу МПС требуется вычислить расстояния между всевозможными парами объектов из рассматриваемых кластеров и взять пару с наибольшим расстоянием. Ориентация разрабатываемого программного обеспечения на работу с большими объемами данных заставляют в первую очередь заняться разрешением проблемы временных затрат, так как по приблизительным расчетам для вычисления расстояния между всевозможными парами объектов, к примеру, по Евклидовой метрике, для решаемой задачи нам потребуется около $5 \cdot 10^{20}$ тактов. Это без учета временных затрат на сортировку данных, обозначение кластеров и т.д. Рассчитанное количество тактов означает годы непрерывной работы рабочей станции.

Проведенный обзор современного состояния рынка программных продуктов, предлагающих решение задач кластерного анализа (в основном это статистические пакеты: **STATISTICA**, **Minilab**, **STADIA**, **KNIME** и др.) показывает, что задачи кластерного анализа для больших объемов данных на сегодня являются еще неразрешенными. Дело в том, что в большинстве из рассмотренных пакетов реализованы только самые популярные из методов кластеризации, такие как *k*-средних, ближайшего соседа, метод Варда. Однако несмотря на свою популярность среди исследователей, связанную, в первую очередь, с высокой скоростью работы и простотой использования, ни один из данных методов нельзя назвать универсальным – на выходе результаты кластеризации одного и того же набора данных по разным методам будут в корне отличаться друг от друга. Поэтому актуальным является разработка алгоритмов кластеризации по различным методам, с дальнейшей их реализацией в программном коде, что предоставит исследователю возможность выбора наиболее оптимального метода для кластеризации конкретного набора данных. На сегодня статистические пакеты предлагают решение задач кластеризации используя иерархические методы, в среднем, для данных в 14 000 – 16 000 записей, в зависимости от характеристик рабочей станции. Этого определенно недостаточно.

Именно поэтому необходимо найти принципиально новые подходы к решению задач с большими объемами данных. Ясно, что в однопоточном режиме такие задачи не решаются. Как минимум нужен многопоточный режим на центральном процессоре с несколькими ядрами. Значит должен быть параллельный алгоритм. Но и мощностей хорошего центрального процессора так же будет мало. Поиск дополнительных вычислительных ресурсов заставляет нас обратиться к графическим процессорам. Архитектура графических процессоров сориентирована на одновременное выполнение большого количества потоков (нитей). Количество ядер в графических процессорах может быть более тысячи. Потенциал очень велик, но технология SIMD, под которую сориентированы графические процессоры, ограничивает возможности их использования. Мы приходим к выводу, что эффективно использовать мощные графические процессоры вместе с универсальным центральным процессором.

Нам известно, что решением данного вопроса уже занимаются наши российские и зарубежные коллеги, но сведения о характере и стадии их разработок в открытом доступе нам найти не удалось. В связи с вышесказанным актуальным является решение о разработке собственного программного обеспечения с более высокой производительностью, ориентированного на решение объемных задач.

Перейдем к постановке задачи. *Имеется достаточно большой набор данных (до миллиона записей и 25 полей), описывающих некоторое множество объектов или процессов. Необходимо провести разбиение данного множества объектов на кластеры.* Для вычисления расстояний между объектами **a** и **b** используем Евклидову метрику:

$$\rho_{ab} = \sqrt{\sum_j (x_{j,a} - x_{j,b})^2}.$$

За расстояние между кластерами **P** и **R** возьмем

$$L_{PR} = \max_{\substack{a \in P \\ b \in R}} (\rho_{ab}).$$

Кластеризация по МПС является одной из самых ресурсоемких и времяемких операций. Поэтому наиболее затратные по времени места в алгоритме целесообразно ориентировать на обработку графическими процессорами. Такими местами при МПС является нахождение кластеров с минимальным расстоянием между ними и нахождение минимальных расстояний между объектами. Так же для повышения производительности алгоритма целесообразно ввести ряд следующих условий:

- *Первое условие построения кластеров:* построение кластеров прекращается, как только количество кластеров становится меньше заданного числа **N1**.

- *Второе условие построения кластеров:* работа по построению кластеров прекращается, если расстояние между двумя ближайшими кластерами становится больше заданного числа **N2**.

- *Первое условие объединения кластеров:* выбранный кластер не подлежит объединению с другими, если количество объектов в нем больше заданного числа **N3**.

- *Второе условие объединения кластеров:* кластер не подлежит объединению с другими кластерами, если его диаметр превышает значение заданного числа **N4**.

Ввиду больших временных затрат на вычисления при работе с большими объемами данных по стандартным иерархическим методам кластеризации, в данном алгоритме предлагается способ, когда на очередной итерации происходит объединение нескольких пар кластеров, а не одной. Пары выбираются таким образом, чтобы расстояние между кластерами в этих парах было наименьшим среди всевозможных рассматриваемых пар. Перед объединением кластеров из каждой пары в один кластер эти пары сортируются в порядке возрастания по расстоянию между кластерами. Таким образом, мы пытаемся сэкономить на количестве итераций. Вполне возможно, что некоторые из рассматриваемых пар окажутся в одном кластере раньше, чем мы соберемся их объединять. Просто пропустим такие пары кластеров.

При разработке алгоритма для данной метода (МПС) необходимо понять какие задачи должны выполняться на графическом процессоре, а какие на центральном. Графические процессоры – это в основном технология SIMD, что означает очень быстрые вычисления и очень большие неудобства для программиста. Центральный процессор – это технология MIMD. Здесь все наоборот – все очень удобно для программиста, но вычисления происходят значительно медленнее, чем на графическом процессоре. Поэтому будем стараться объемные, но простые задачи направлять на выполнение на графические процессоры, а сложные, но менее объемные задачи – на центральный процессор.

В начале, на первой итерации, мы считаем каждый объект отдельным кластером. Расстояние между кластерами будет равно расстоянию между объектами. На следующих итерациях уже некоторые объекты будут объединены в кластеры, а некоторые кластеры могут по-прежнему представлять из себя только один объект. У нас возникнут следующие основные задачи:

- Подготовка задания для потоков. Задача выполняется одним потоком.
- Расчет расстояний между объектами. Задача выполняется на графическом процессоре.
- Расчет расстояний между кластерами. Задача выполняется на графическом процессоре.
- Сортировка пар выбранных кластеров. Задача выполняется одним потоком.
- Объединение кластеров. Задача выполняется одним потоком.
- Подготовка задания для графического процессора. Задача выполняется каждым потоком центрального процессора.
- Проверка хода выполнения кластеризации объектов, окончания работы. Задача выполняется одним потоком.

Распределение задач было сделано из следующих соображений.

Так как принципиальным различием между центральным и графическим процессорами является стоимость операции переключения между потоками – в случае с первым она неоправданно высока, и большое количество потоков может сильно затормозить по времени остальные необходимые вычисления. Поэтому количество потоков на центральном процессоре не должно быть минимальным – по некоторым данным, оно не должно превышать утроенного значения числа физических ядер процессора. С потоками на графическом процессоре наоборот не возникает никаких проблем, так как из-за большого количества ядер переключения потоков случаются редко.

Введем следующие обозначения:

- K_1 – количество записей;

- K_2 – количество ядер процессора;
- K_3 – количество потоков;

Далее мы будем рассматривать только случай, когда количество данных, нуждающихся в обработке, требует задействовать все ресурсы графического процессора.

Подготовительный этап вычислений состоит из трех шагов:

- определение оптимального количества потоков для центрального процессора:

$$K_3 = K_2 \cdot 3 = 12.$$

Как уже отмечалось выше, по некоторым практическим данным, оптимальное количество потоков на центральном процессоре должно составлять утроенное количество ядер процессора. В данном случае учитывая, что наиболее распространенные модели процессоров имеют по 4 физических ядра, получаем, что количество потоков не должно превышать 12.

- определение оптимальных размеров блока и сетки на графическом процессоре:

$$K_{BL1} = \text{int} \left(\frac{50\,000}{K_3 \cdot 128} \right) + 1 = 33,$$

где K_{BL1} – количество блоков, определяемое как целое значение от отношения минимального количества записей, при которых подключение вычислительных мощностей графического процессора становится целесообразным, к K_3 потокам и количеству нитей в одном блоке, плюс единица.

- определение количества блоков в сетке и количества объектов в потоке.

$$K_{BL1} = \text{int} \left(\frac{K_1}{K_3 \cdot 128} \right) + 1,$$

$$K_{POT1} = K_{BL1} \cdot 128,$$

$$K_{POT2} = K_1 - K_{POT1} \cdot (K_3 - 1).$$

Мы исходим из того, что физически нити одновременно выполняются по **WARP'ам** (32 нити). У нас нет возможности заставить одновременно выполнять нити одного **WARP'a** разные команды. Поэтому количество нитей, передаваемых на обработку графическому процессору, должно быть кратно 32. Чтобы мультипроцессор графического процессора работал эффективно, блок должен содержать несколько **WARP'ов**. Мы взяли 4 **WARP'a**, то есть получили 128 нитей. Конечно, остаток распределяемых данных будет совершенно произвольным, но это будет потеря только в одном месте.

После вычислений всех перечисленных характеристик направляем эту информацию в оперативную память **MAS1**. Все имеющиеся данные необходимо разделить на K_3 потоков и сформировать для каждого потока задание. После получения своего задания, каждый из K_3 потоков должен сформировать задание для графического процессора.

За синхронизацию работы потоков, организацию корректной работы на всех потоках и обработку результатов у нас будет ответственен цикл, условно названный внешним. Так же в его задачу будет входить контролирование работы внутренних циклов. Задачи внутреннего цикла можно расписать следующим образом:

1. *Определение расстояния между центрами кластеров А и В.* Для определения данного расстояния все пары объектов, принадлежащих разным кластерам, просматриваются графическим процессором. Если найденная величина меньше удвоенного предельного расстояния между выбранными кластерами, найденного на предыдущей итерации, то вычисляется расстояние между кластерами **А** и **В**.

2. *Анализ расстояния графическим процессором.* Пара кластеров **А** и **В** запоминается, если найденное между ними расстояние является одним из 100 наименьших расстояний, вычисленных в данном потоке на данной итерации.

3. *Просмотр расстояний между всевозможными парами объектов.* Результатом данного шага является около 100 пар кластеров с наименьшим для данного потока расстоянием. Данные пары передаются своему потоку для дальнейших вычислений.

4. Сортировка результатов графическим процессором. Отсортированные пары будут переданы внешнему циклу. Все потоки ожидают.

Дальнейшая обработка данных совершается внешним циклом.

5. Обработка полученных данных со всех потоков. Выбираем из всех полученных пар со всех потоков 100 пар с наименьшим расстоянием.

6. Сортировка выбранных пар в порядке возрастания расстояний.

7. Объединение выбранных пар кластеров.

8. Определения стадии процесса формирования кластеров. Если процесс закончен – выход. Иначе переходим к новой итерации с откорректированными данными – с пункта 1, предварительно разделив новые данные на K_3 потоков и сформировав задание для каждого потока.

Для разработки программного обеспечения использовался системный блок следующей комплектации: Gigabyte Technology Co., Ltd., Z77MX-D3H с чипсетом Intel; Intel(R) Core(TM) i7-3770 CPU @ 3.40GHz; NVIDIA GeForce GTX 660; оперативная память 16384 Mb; жесткий диск емкостью 2 Тб. Разработки проводились на операционной системе Microsoft Windows 7, Ultimate, 32 bit, в среде Microsoft Visual Studio 2010 на языке C# с использованием CUDA 5.5.

Заключение. Таким образом, для достаточно актуального метода МПС использование вычислительных средств центрального и графического процессоров позволит решать достаточно объемные как по вычислениям, так и по объемам данных задачи. Разработка алгоритмов и их программная реализация для различных методов кластеризации (к-средних, МПС, центроидный метод и др.) даст разработчику прикладных задач инструментарий для исследования своей проблемы.

Работа выполнена при поддержке гранта 0741/ГФ МОН РК.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бериков В.Б., Лбов Г.С. Современные тенденции в кластерном анализе. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева, 2008. – 26 с.
- [2] Боресков А.В., Харламов А.А. Основы работы с технологией CUDA. – 2010. – С. 232.
- [3] NVIDIA CUDA C programming Guide. – May 2013, www.nvidia.com
- [4] Jain A., Murty M., Flynn P. Data Clustering: A Review // ACM Computing Surveys. – 1999. – Vol. 31, N 3.
- [5] Дюран Б., Одделл П. Кластерный анализ / Пер. с англ. Е. З. Демиденко, под ред. и с предисл. А. Я. Боярского. – М.: Статистика, 1977. – 128 с.
- [6] Шилдт Г. C# 4.0 полное руководство. – СПб.: Печатный двор, 2011.
- [7] Лупин С.А., Посыпкин М.А. Технологии параллельного программирования. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2011. – 208 с.

REFERENCES

- [1] Berikov V.B., Lbov G.S. Modern trends in cluster analysis. Novosibirsk: Publishing House of the Institute of Mathematics, 2008. P. 26.
- [2] Boreskov A.V., Kharlamov A.A., The basics of working with CUDA technology. 2010. P. 232.
- [3] NVIDIA CUDA C programming Guide. May 2013, www.nvidia.com
- [4] Jain A., Murty M., Flynn P. Data Clustering: A Review. ACM Computing Surveys. 1999. Vol. 31, N 3.
- [5] Durand B., Odell P. Cluster analysis. M.: Statistics, 1977. P. 128.
- [6] Shildt G. C # 4.0 complete guide. SPb.: Printing house, 2011.
- [7] Lupin S.A., Posypkin M.A. Parallel programming technologies. M: Publishing house "FORUM": INFRA-M, 2011. P. 208.

КӨП АҒЫНДЫЛЫҚ ТӘРТІБІНДЕГІ (РЕЖИМІНДЕГІ) КӨЛЕМДІ МАҒЛҰМАТТАРДЫ ТОЛЫҚ БАЙЛАНЫС ӘДІСІ БОЙЫНША КЛАСТЕРИЗАЦИЯЛАУ.

В. Поспелова, Г. Литвиненко

Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: мағлұматтарды кластеризациялау, үлкен көлемді мағлұматтар, толық байланыс әдіс, графикалық процессор, орталық процессор, SIMD, MIMD.

Аннотация. Берілген мақалада толық байланыс әдіс (ТБӘ) арқылы және есептеуіш графикалық процессорларды қолдана отырып көлемі 1 млн дейін жазбасы және 25-ке дейін жиек көрсеткіштері бар есептердің шығару жолдары қарастырылады. ТБӘ бағдарламалық кодта жүзеге асырылуы ең ауыр әдіс болып табылады. Бұл әдіс үлкен көлемді есептеулер үшін айтарлықтай есептеу қорын талап етеді. Бұл жұмыста, орталық және графикалық процессорларды гибриді қолдануларына бейімделген, параллельді алгоритм жетілдірінеді. Айтылмыш зерттеме үлкен көлемді мағлұматтары бар есептерді шығару үшін, ғылымның қосымша тармақтарында белгілі қызығушылықтарды танытуы мүмкін.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 54 – 59

УДК 517.957.6

ANALYTICAL SOLUTION OF ONE PHASE STEFAN PROBLEM BY HEAT POLYNOMIALS

M. M. Sarsengeldin^{1,2}

¹Department of mathematics and natural sciences, Suleyman Demirel University, Kaskelen, Kazakhstan,

²Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: sarsengeldin.merey@sdu.edu.kz

Key words: Stefan problem, degenerate free boundary, integral error functions, heat polynomials.

Abstract. Solution of One Phase Stefan Problem with degenerate free boundary represented in explicit analytic form. The developed method is based on the use of Integral Error Functions and its properties. The main idea of this method is to find coefficients of linear combination of Integral Error Functions which a priori satisfy the heat equation. Convergence of series proved. Method was tested and applied in experimental problem.

1. Introduction. A wide range of transient phenomena in the field of heat and mass transfer, low-temperature plasma, filtration and other evolutionary processes associated with phase transformation of materials considered in quite extensive literature; see, e.g., [1-7], and a long bibliography on these problems given in [8] leads to the necessity of solving boundary value problems of heat and mass transfer with free moving inter-phase boundaries.

From theoretical point of view, these problems are among the most challenging problems in the theory of non-linear parabolic equations, which along with the desired solution, an unknown moving boundary has to be found (Stefan type problems). In some specific cases it is possible to construct Heat potentials for which, boundary value problems can be reduced to integral equations [4], [5], [9]. However, in the case of domains that are degenerate at the initial time, there are additional difficulties because of the singularity of the integral equations, which belong to the class of pseudo - Volterra equations which are unsolvable in the general case, by the method of successive approximations [9]. Therefore, investigation of methods for the solution of Stefan type problems is an actual mathematical problem.

Tracking answers of these questions will be as following. In the first section introductory information and some properties of Integral Error Functions necessary for elaborating different methods (e.g. Heat Polynomials method) are represented. In the second section one phase Stefan problem stated and the solution represented. In the third section test problem with given exact solution is solved by proposed method. Fourth section is devoted to discussion of further development of method for wider class of problems.

1.1. Integral Error Functions

The integral error functions determined by recurrent formulas

$$i^n \operatorname{erfc} x = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} v dv, \quad n=1,2,\dots \quad i^0 \operatorname{erfc} x \equiv \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-v^2) dv \quad (1)$$

where

$$\operatorname{erf} x = 1 - \operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-v^2) dv \quad (2)$$

It is well known that the Integral Error Functions

$$u_n(\pm x, t) = t^{\frac{n}{2}} i^n \operatorname{erfc} \frac{\pm x}{2a\sqrt{t}} \quad (3)$$

exactly satisfy the heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

and by superposition principle, linear combination of (6) or even series also satisfy (4)

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n u_n(x, t) + B_n u_n(-x, t)] \quad (5)$$

We consider (4) and solution (5) in degenerate domain where constants A_n , B_n have to be determined and can be derived by substituting (5) into boundary conditions at $x=0$ and $x=\alpha(t)$, if given boundary functions can be expanded into Taylor series with powers t or \sqrt{t} .

1.2. Properties of Integral Error Functions

1. Using formula for Hermite polynomials one can derive

$$i^n \operatorname{erfc}(-x) + (-1)^n i^n \operatorname{erfc}x = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{n-2m}}{2^{2m-1} m!(n-2m)!} \quad (6)$$

and represent (5) in the form of heat polynomials

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{2n} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m} t^m \beta_{2n,m} + A_{2n+1} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m+1} t^m \beta_{2n+1,m} \right] \quad (7)$$

where

$$\beta_{n,m} = \frac{1}{2^{n+m-1} \cdot m!(n-2m)!} \quad (8)$$

2. Using L'Hopital rule it is not difficult to show that

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{i^n \operatorname{erfc}(-x)}{x^n} = \frac{2}{n!} \quad (9)$$

2. One Phase Stefan Problem and its solution

Definition of One phase stefan problem, it's physical interpretation.

2.1. Problem statement

Solve the Heat Equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \alpha(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (10)$$

Subject to

$$-\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} - u \right) \Big|_{x=0} = P(t), \quad 0 < t < \infty, \quad (11)$$

$$u_{x=\alpha(t)} = U_m, \quad 0 < t < \infty, \quad (12)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} - u \right) \Big|_{x=\alpha(t)} = \frac{d\alpha(t)}{dt}, \quad 0 < x < \alpha(t) \quad (13)$$

$$u(0,0) = 0 \quad (14)$$

It is necessary to find $u(x,t)$ -heat transfer function and free moving boundary $\alpha(t)$ which can be represented in the following form

$$\alpha(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n t^{\frac{n}{2}} \quad (15)$$

2.2. Solution:

We represent solution in the following form

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} (2at)^n \left[i^{2n} \operatorname{erfc} \frac{(-x)}{2\sqrt{t}} + i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} (2at)^{\frac{2n+1}{2}} \left[i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{(-x)}{2\sqrt{t}} - i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{t}} \right] \quad (16)$$

and by property (6) we represent (16) in the form of Heat Polynomials

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{2n} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m} t^m \beta_{2n,m} + A_{2n+1} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m+1} t^m \beta_{2n+1,m} \right] \quad (17)$$

where A_{2n} and A_{2n+1} coefficients have to be found.

From (11)

$$A_{2n} + A_{2n+1} = \frac{P_n}{\beta_{2n+1,n}} \quad (18)$$

where

$$P_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \quad (19)$$

Making substitution $\sqrt{t} = \tau$ in (17) we have

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{2n} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m} \tau^{2m} \beta_{2n,m} + A_{2n+1} \sum_{m=0}^n x^{2n-2m+1} \tau^{2m} \beta_{2n+1,m} \right] \quad (20)$$

we take both sides of (12) $2k$ – times derivatives at $\tau = 0$ and get following expression

$$0 \equiv 0^{(2k)} = \sum_{n=1}^{k-1} A_{2n} \sum_{m=0}^n c[2k] \beta_{2n,m} + A_{2k} \sum_{m=0}^n c[2k] \beta_{2n,m} + \sum_{n=1}^k A_{2n-1} \sum_{m=0}^n c[2k] \beta_{2n-1,m} \quad (21)$$

It is easy to see that, if we express from (18) A_{2n+1} in terms of A_{2n} and substitute it into (21) we obtain recurrent formula for A_{2n}

Thus A_{2n} coefficients are found from (21) where $c[2k]$ multinomial coefficients, which can be found as following are:

From (13)

for $2k$ -th derivative we consider (15) in the form $\alpha(t) = \sum_{n=1}^k \alpha_n t^{\frac{n}{2}}$ because other coefficients $\alpha_i, i > 2k$ don't affect $C[2k]$

$$\left(\alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \dots + \alpha_{2k} \tau^{2k} \right)^n = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_{2k} = n} \binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_{2k}} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \dots \alpha_{2k}^{j_{2k}} \tau^{j_1 + 2j_2 + \dots + (2k)j_{2k}}$$

$$\text{We have } [(\alpha(\tau))^n]_{\tau=0}^{(2k)} = [(\alpha_1 \tau + \alpha_2 \tau^2 + \dots + \alpha_{2k} \tau^{2k})^n]_{\tau=0}^{(2k)} = c[2k]$$

where

$$c[2k] = \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_{2k} = n} \binom{n}{j_1, j_2, \dots, j_{2k}} \alpha_1^{j_1} \alpha_2^{j_2} \dots \alpha_{2k}^{j_{2k}} \quad (22)$$

and $j_i, i = 1, \dots, 2k$ satisfy the equations

$$j_1 + j_2 + \dots + j_{2k} = n \tag{23}$$

$$j_1 + 2j_2 + \dots + (2k)j_{2k} = 2k \tag{24}$$

Making substitution $\sqrt{t} = \tau$ and taking both sides of (18) $2k$ and $(2k+1)$ – times derivatives at $\tau = 0$ it is possible to derive α_n coefficients as following

$$[(\alpha(\tau))^n]_{\tau=0}^{(2k)} \equiv \alpha_{2k+1} = \sum_{n=1}^k A_{2n} \sum_{m=0}^{n-1} [2(n-m)]c[2k]\beta_{2n,m} + \sum_{n=1}^{k-1} A_{2n+1} \sum_{m=0}^{n-1} [2(n-m)-1]c[2k]\beta_{2n+1,m} \tag{25}$$

$$[(\alpha(\tau))^n]_{\tau=0}^{(2k+1)} \equiv \alpha_{2k+2} = \sum_{n=1}^k A_{2n} \sum_{m=0}^{n-1} [2(n-m)]c[2k+1]\beta_{2n,m} + \sum_{n=1}^k A_{2n+1} \sum_{m=0}^{n-1} [2(n-m)+1]c[2k]\beta_{2n+1,m} \tag{26}$$

for $k=1,2,\dots$

Thus from (18),(21),(25),(26) we derive A_{2n} , A_{2n+1} and α_{2k+1} , α_{2k+2} respectively where $n=1,2,\dots$

2.3. Convergence

Let $\alpha(t_0) = \mu_0$ for any time $t = t_0$. Then the series

$$u(x, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} (2at_0)^n \left[i^{2n} \operatorname{erfc} \frac{(-\mu_0)}{2\sqrt{t_0}} + i^{2n} \operatorname{erfc} \frac{\mu_0}{2\sqrt{t_0}} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} (2at_0)^{\frac{2n+1}{2}} \left[i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{(-\mu_0)}{2\sqrt{t_0}} - i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{\mu_0}{2\sqrt{t_0}} \right]$$

should be convergent, because $U = U_m$ on the interface. Therefore there exist a constant C independent of n , such that

$$|A_{2n+1}| < C / (2at_0)^{\frac{2n+1}{2}} \left[i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{(-\mu_0)}{2\sqrt{t_0}} + i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{\mu_0}{2\sqrt{t_0}} \right] \tag{27}$$

Multiplying both sides of (27) by $(2at)^{\frac{2n+1}{2}} \left[i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{(-\alpha(t))}{2\sqrt{t}} + i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t}} \right]$ and taking sum we obtain

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} (2at)^{\frac{2n+1}{2}} \left[i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{(-\alpha(t))}{2\sqrt{t}} + i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t}} \right] < \\ & < C \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} (2at)^{\frac{2n+1}{2}} \left[i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{(-\alpha(t))}{2\sqrt{t}} + i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t}} \right]}{\sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} (2at_0)^{\frac{2n+1}{2}} \left[i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{(-\mu_0)}{2\sqrt{t_0}} + i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{\mu_0}{2\sqrt{t_0}} \right]} < C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2n+1}{2}} \end{aligned} \tag{28}$$

In the same manner, similar estimations for α_n can be obtained from (25) and (26)

Thus on the base of monotonicity of function $\left[i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{(-\alpha(t))}{2\sqrt{t}} + i^{2n+1} \operatorname{erfc} \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t}} \right]$, and above estimations it is possible to conclude that series (17) is convergent.

3. Test problem

Solve the Heat Equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \alpha(t), \quad 0 < t < 1, \tag{29}$$

Subject to

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = e^t, \quad 0 < t < 1, \quad (30)$$

$$u_{x=\alpha(t)} = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (31)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\alpha(t)} = \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t}, \quad 0 < x < \alpha(t) \quad (32)$$

$$u(0,0) = 0 \quad (33)$$

Exact solution:

$$u(x,t) = e^{t-x} - 1 \text{ and } \alpha(t) = t \quad (34)$$

Solution by Heat polynomials:

We consider solution in the form of heat polynomials (20) and it is necessary to determine A_{2n} , A_{2n+1} coefficients and free boundary (15). It is easy to see that from (30) we can directly derive A_{2n+1} coefficients

$$A_{2n+1} = \frac{P_n}{\beta_{2n+1,n}} \quad (35)$$

where $P(t)=e^t$, and $P_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$.

In the same manner, to derive recurrent formula for A_{2n} , we take both sides of (31) $2k -$ times derivatives at $\tau = 0$ and get following expression

$$0 \equiv 0^{(2k)} = \sum_{n=1}^{k-1} A_{2n} \sum_{m=0}^n c[2k]\beta_{2n,m} + A_{2k} \sum_{m=0}^n c[2k]\beta_{2n,m} + \sum_{n=1}^k A_{2n-1} \sum_{m=0}^n c[2k]\beta_{2n-1,m} \quad (36)$$

Making substitution $\sqrt{t} = \tau$ and taking both sides of (32) $2k$ and $(2k+1) -$ times derivatives at $\tau = 0$ we derive recurrent formulas for α_n coefficients (25), (26) for $k=1,2,\dots$

For example if we expand (20) and calculate first four coefficients and α_1, α_2 we can easily find that $A_0 = 0, A_2 = 0, A_1 = -1/2, A_3 = -8$ and $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ which agree with exact solution (34).

4. Discussion and conclusion

Successful applications of represented method induce the question:

1) Is it possible to elaborate similar methods for the Stefan type problems with several phases and for two or three dimensional cases?

2) It can be shown that Generalized Integral Functions and their linear combinations satisfy the equation

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\nu}{z} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$

where $\nu = 1,2,3$ are plane, cylindrical and spherical cases, which is very important for the modeling of Heat transfer in solid with variable cross section.

3) One of the objectives of further research is to prove that mentioned Generalized Integral Functions or elaborated Degenerate Hypergeometric Functions and their linear combinations satisfy above equation for any ν .

Main results namely coefficients of function (17) A_{2k} , A_{2k+1} and free boundary are found analytically, convergence of (17) is proved.

REFERENCES

- [1] [1] V. Alexiades, A. D. Solomon, *Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes*, Taylor and Francis, Washington, DC, 1993.
- [2] [2] M. Grassi, G. Grassi, Mathematical modeling and controlled drug delivery: matrix systems, *Current Drug Delivery* 2 (2005) 97–116.
- [3] [3] S. C. Gupta, *The Classical Stefan Problem: Basic Concepts, Modeling and Analysis*, North-Holland Ser. Appl. Math. Mech., Elsevier, Amsterdam, London, 2003.
- [4] [4] A. Friedman, *Free boundary problems for parabolic equations I. Melting of solids*, *J. Math. Mech.*, 8 (1959), pp. 499–517.
- [5] [5] L. I. Rubinstein, *The Stefan Problem*, Transl. Math. Monogr. 27, AMS, Providence, RI, 1971
- [6] [6] J. Crank, *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, London, 1984.
- [7] [7] Kharin S.N., Sarsengeldin M. Influence of Contact Materials on Phenomena in a Short Electrical Arc. *Trans Tech Publications*. – Switzerland: Key Engineering Materials. – 2012. - Vol. 510-511. - P. 321-329.
- [8] [8] D. A. Tarzia, *A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems*, *MAT - Ser. A*, 2 (2000), pp. 1–297.
- [9] [9] A.N. Tikhonov, A.A. Samarski, *Equations of Mathematical Physics*. Gostechteorizdat, 1951.

БІР ФАЗАЛЫ СТЕФАН ЕСЕБІНІҢ ЖЫЛУ ПОЛИНОМДАРЫ АРҚЫЛЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ШЕШІМІ

М. М. Сарсенгельдин

Сүлеймен Демирел атындағы университет, Қаскелен, Қазақстан,
Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: бір фазалы Стефан, интегралды функциясының кемшілігі, жылуөткізгіштік тендеуі, эксперименттік мәселелер.

Аннотация. Бастапқы уақытта құлдырайтын, жылжымалы шекарасы бар аймақтарда бір фазалы Стефан есебінің жылу полиномдар арқылы аналитикалық шешімі табылған.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА МЕТОДОМ ТЕПЛОВЫХ ПОЛИНОМОВ

М. М. Сарсенгельдин

Университет им. Сулеймана Демиреля, Каскелен, Казахстан,
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: однофазная задача Стефанаса, интегральная погрешность функции, уравнения теплопроводности, экспериментальные проблемы.

Аннотация. Найдено аналитическое решение однофазной задачи Стефанаса вырождающейся в начальный момент времени границей методом тепловых полиномов.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 60 – 63

MODEL OF TORSIONAL VIBRATIONS OF THE RUBBER-SHAFT ON THE BASIS OF BARTENEV-HAZANOVICH POTENTIAL

L. Khajiyeva, S. Abdrakhman, A. Rakhimzhanova

Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan

Key words: dynamics, nonlinearity, damping, potential, torsional fluctuations.

Abstract. Dynamics of rotating rod elements of mechanisms and machines from physically nonlinear material is considered. The rod material is characterised by Bartenev-Hazanovich elastic potential. The deformation characteristic is the corner of torsion of one section concerning of a another section. For a considered case the hypothesis of flat sections is accepted. The dynamic model of torsion of a rod element is constructed. The received model has nonlinear character. It is caused by physically nonlinear properties of a material and finiteness of its deformations.

УДК 539.3:621.01

МОДЕЛЬ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЗИНОКОРДНОГО ВАЛА НА ОСНОВЕ ПОТЕНЦИАЛА БАРТЕНЕВА-ХАЗАНОВИЧА

Л. А. Хаджиева, С. Н. Абдрахман, А. Ж. Рахимжанова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: динамика, нелинейность, демпфирование, потенциал, крутильные колебания.

Аннотация. В работе рассматривается динамика вращающихся стержневых элементов механизмов и машин из физически нелинейного материала. Свойства материала стержня задаются упругим потенциалом Бартенева-Хазановича. В рассматриваемом случае характеристикой деформирования является угол кручения одного сечения вала относительно другого. В данном случае принимается гипотеза плоских сечений. Построена динамическая модель крутильных колебаний вала. Полученная модель имеет нелинейный характер. Это вызвано физически нелинейными свойствами материала вала и конечностью его деформаций.

Известно, что высокомолекулярные материалы типа пластмасс и резины характеризуются большим внутренним трением. Установлено, что для наполненных резин величина относительного гистерезиса превышает аналогичную величину для сталей более чем в 100 раз. Поэтому резина, как конструкционный материал, находит широкое применение в технике. В силу своих особенностей резина применяется в качестве демпферов и поглотителей колебаний, применяется в муфтах, соединяющих наиболее перегруженные элементы кинематической цепи машин, в целях гашения возникающих в них нежелательных колебательных процессов.

Резина и подобные материалы относятся к физически нелинейным средам, работа которых далека от принятых в большинстве традиционных расчетных схем моделей линейного деформирования. Поэтому для их моделирования необходимо привлекать общую теорию больших упругих деформаций с физическим законом, отражающим основные свойства материала, и математический аппарат для выведения из этого закона отдельных следствий, необходимых для решения технических задач. Таким законом является зависимость между тензором напряжений и тензором деформаций – упругий потенциал.

В работе рассматривается динамика вращающихся стержневых элементов механизмов и машин из физически нелинейного материала, свойства которого задаются упругим потенциалом Бартенева-Хазановича [1]:

$$W = 2G(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3), \quad (1)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – относительное удлинение единичного элемента среды в трех главных направлениях деформации, G – модуль сдвига. Указанный потенциал описывает поведение упругого, несжимаемого, изотропного тела.

Используя условия изотропности и несжимаемости резины при конечных деформациях $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$, представим упругий потенциал (1) в главных компонентах тензора деформации ε_i ($i = 1, 2, 3$):

$$W = 2G \left(\sqrt{1 + 2\varepsilon_1} + \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} + \frac{1}{\sqrt{1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3)}} \right). \quad (2)$$

Для удобства моделирования в (2) осуществляется переход к главным компонентам деформации $\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{zz}$ через следующие соотношения [2]:

$$\varepsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{e} \sin \left(\bar{\phi} + \frac{2}{3} \pi \right) + \frac{1}{3} e, \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{e} \sin \bar{\phi} + \frac{1}{3} e, \quad \varepsilon_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{e} \sin \left(\bar{\phi} + \frac{4}{3} \pi \right) + \frac{1}{3} e, \quad (3)$$

где

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = E_1, \quad (4)$$

$$\bar{\phi} = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{\sqrt{3} e_3}{3 e} \right), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \bar{\phi} \leq \frac{\pi}{6}, \quad (5)$$

$$\bar{e}^2 = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 3(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) \right], \quad (6)$$

$$e_3 = -3 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} E_1 & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} E_1 & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} - \frac{1}{3} E_1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Принимая гипотезу плоских сечений, получен вид потенциала (1) для рассматриваемого случая вращения вала с круглым сечением:

$$W = 2G \left(\sqrt{1 + \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}} + \sqrt{1 - \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)}} \right). \quad (8)$$

Компоненты тензора напряжения в любой точке сечения вала при этом определяются как:

$$\tau_{xz} = 2G \frac{\varepsilon_{xz}}{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}} - \frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}{(1 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

$$\tau_{yz} = 2G \frac{\varepsilon_{yz}}{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}} - \frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}{(1 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (9)$$

Соотношения (9) представляют собой нелинейный закон деформирования вала из резинокордного материала, описываемого упругим потенциалом Бартенева-Хазановича. Частным случаем (9) является закон Гука. Задавая абсолютную величину векторов напряжений через его составляющие:

$$|\sigma| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}, \quad (10)$$

определена ее величина

$$|\sigma| = 2G \left[\frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}} - \frac{1}{2\sqrt{1 - \sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}} + \frac{\sqrt{\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2}}{\left(1 - \varepsilon_{xz}^2 - \varepsilon_{yz}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (11)$$

В рассматриваемом случае характерным типом деформации является угол поворота сечения $\varphi(z, t)$. Полагая отсутствие деформации сечения вала и используя известные соотношения между перемещениями и углами поворота сечения при допущении конечности деформаций согласно второй системе упрощений В.В. Новожилова, имеем:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(-y - \frac{1}{2} x \varphi \right), \quad (12)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(x - \frac{1}{2} y \varphi \right). \quad (13)$$

Полагая отсутствие деформации сечения вала, переходим от зависимости напряжений от тензора деформаций в общем виде (11) к зависимости между напряжением и характерной в данном случае видом деформации – углом поворота сечения $\varphi(z, t)$:

$$|\sigma| = G \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} r \sqrt{1 + \frac{1}{4} \varphi^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} r \sqrt{1 + \frac{1}{4} \varphi^2}}} + \frac{2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} r \sqrt{1 + \frac{1}{4} \varphi^2}}{\left(1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} r\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4} \varphi^2\right)\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (14)$$

Здесь $\partial \varphi / \partial x$ – относительный угол закручивания, r – радиус-вектор элемента сечения. Зависимость напряжений от угла поворота φ и крутки $\partial \varphi / \partial x$ носит нелинейный характер.

После упрощения (14) согласно второй системе упрощений В.В. Новожилова [3], получена нелинейная зависимость между напряжением и углом поворота сечения, которая отлична от известного закона Гука:

$$\sigma = Gr \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(1 + \frac{1}{8} \varphi^2 \right) + \frac{19}{8} G \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^3 \left(1 + \frac{1}{8} \varphi^2 \right)^3. \quad (15)$$

Суммируя по длине момент касательных напряжений сечения относительно оси вала

$$M_{кр} = \int_F R |\sigma| dF, \quad (16)$$

находится внутренний момент кручения:

$$M_{кр} = GJ_p r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(1 + \frac{1}{8} \varphi^2 \right) + \frac{19}{8} GJ_p r^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^3 \left(1 + \frac{1}{8} \varphi^2 \right)^3, \quad (17)$$

интенсивность которого есть величина:

$$\frac{\partial M_{kp}}{\partial z} = GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{8} GJ_p \varphi^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{4} GJ_p \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 + \frac{57}{8} r^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{171}{64} r^2 \varphi^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (18)$$

Исключая номинальное вращение вала, одинаковое для любого элемента его сечений, построено уравнение крутильных колебаний стержня из резиноподобного материала, поведение которого задавалось потенциалом Бартенева-Хазановича:

$$GJ_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{8} GJ_p \phi^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{4} GJ_p \phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{57}{8} r^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{171}{64} r^2 \phi^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \xi_1 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^2 \partial t} - \xi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(z, t), \quad (19)$$

где $G_0 J_p$ – жесткость вала на кручение; ρJ_p – момент инерции единицы длины вала; ξ_1, ξ_2 – коэффициенты, характеризующие внутреннее и внешнее трение, соответственно; $\varphi(z, t)$ – угол скручивания в некотором сечении вала; $F(z, t)$ – интенсивность внешнего скручивающего момента.

Таким образом, на основе ранее разработанной методики построения модели колебаний стержневых элементов из физически нелинейных материалов [4-5], здесь на основе потенциала Бартенева-Хазановича построена нелинейная динамическая модель крутильных колебаний вала. Она существенно отличается от известного в литературе линейного уравнения крутильных колебаний вала [6].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
- [2] Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 374 с.
- [3] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
- [4] Кыдырбекулы А.Б., Хаджиева Л.А. О моделировании физически нелинейных сред с начальными напряжениями // Труды Всероссийской школы-семинара по современным проблемам МДТТ. – Новосибирск, 2003. – С. 119-123.
- [5] Хаджиева Л.А. Нелинейные модели динамических систем: Учеб. пособие. – Алматы: Қазақ университеті, 2009. – 132 с.
- [6] Филиппов И. Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: Штиинца, 1988. – 188 с.

REFERENCES

- [1] Chernykh K.F. Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations. L.: Mashinostroenie, 1986. P. 336.
- [2] Novozhilov V.V. Theory of elasticity. L.: Sudpromgiz, 1958. P. 374.
- [3] Novozhilov V.V. Fundamentals of the nonlinear theory of elasticity. M.-L.: OGIz 1948. P. 211.
- [4] Kudyrbekuly A.B., Khajiyeva L. On the modeling of physically nonlinear media and media with initial stresses. Proceedings of the All-Russian School-Seminar on contemporary issues MRTT. Novosibirsk, 2003. P. 119-123.
- [5] Khajiyeva L. Nonlinear models of dynamic systems: Studies. Manual. Almaty: Kazakh University, 2009. P. 132.
- [6] Filippov I.G. Mathematical theory of vibrations of elastic and viscoelastic plates and rods. Chisinau: Shtiintsa, 1988. P. 188.

БАРТЕНЕВА-ХАЗАНОВИЧ ПОТЕНЦИАЛЫ НЕГІЗІНДЕГІ РЕЗЕҢКЕЛІ-КОРДТЫҚ БІЛІКТІҢ АЙНЫМАЛЫ ТЕРБЕЛІСТЕР МОДЕЛІ

Л. А. Хаджиева, С. Н. Абдрахман, А. Ж. Рахимжанова

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: динамика, сызықсыздық, демпфирлік, потенциал, айнымалы тербелістер.

Аннотация. Берілген жұмыста айналмалы стержндік элементтер механизмінің динамикасы және физикалық сызықты емес материалды машиналар қарастырылады. Стержн материалының құрамы Бартенева-Хазанович серпімді потенциалымен беріледі. Қарастырылған жағдайда деформация сипаттамасы болып белгілі бір біліктің екінші білікпен қиылысуының айнымалы бұрышы табылады. Бұл жағдайда жазық қиылысу гипотезасы алынған. Айнымалы тербелістер білігінің динамикалық моделі құрылған. Нәтижесінде алынған модель сызықсыз сипаттамалы. Бұл жағдай материалдың физикалық сызықты емес сипаттамасы мен оның ақырғы деформациясы әсерінен туындаған.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 64 – 68

THE ANALYSIS OF FLUCTUATIONS OF THE HORIZONTAL DRILL-STRING MODEL BY THE LUMPED PARAMETERS METHOD

L. Khajiyeva, A. Sergaliyev

Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan

Key words: dynamics, nonlinear model, drill string, frictional force, lumped parameters.

Abstract. The dynamics of a horizontal drill-string considering the frictional forces between the column and the borehole is investigated. A model of longitudinal vibrations of columns proposed in T.G. Ritto et al. is considered. The investigated model has nonlinear character, and is modelled by lumped parameters method. The drill-string is discretized with 100 nodes of lumped masses. Displacement of the bit, bit speed and also the ratio between the output power (obtained from the bit-rock interaction) and the input power is defined by the authors. Obtained results qualitatively and quantitatively consistent with the results of Ritto, where the dynamic model calculations were carried out by finite element method.

УДК 622.257.2

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ БУРОВОЙ ШТАНГИ МЕТОДОМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Л. А. Хаджиева, А.С. Сергалиев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: динамика, нелинейная модель, буровая штанга, сила трения, сосредоточенные параметры.

Аннотация. Исследуется динамика горизонтальных бурильных колонн с учетом их сил трения о стенки скважины. Рассмотрена модель продольных колебаний колонны, предложенная в работе Т. G. Ritto и его соавторов. Исследуемая модель носит нелинейный характер и анализируется здесь методом сосредоточенных параметров. Согласно указанного метода буровая колонна представлена конечным числом равноудаленных точечных масс, в данной работе число разбиений принималось равным 100. Определены перемещения и скорость движения бура, а также отношение мощности на входе бура к мощности на выходе бура, являющееся показателем эффективности производимых буровых работ. Полученные в работе результаты качественно и количественно согласуются с результатами работы Ritto, где расчеты динамической модели проводились методом конечных элементов.

Работа посвящена численному анализу модели движения горизонтальной буровой штанги методом сосредоточенных параметров с целью изучения эффективности применения указанного метода к динамическому анализу оборудования нефте-газодобывающей промышленности. Обычно метод сосредоточенных параметров успешно применяется в строительной механике для анализа конструкций в виде балок с переменным сечением, разнородными материалами. Удобен метод так же для анализа конструкций с локальным или точечным нагружением. Впервые данный метод был применен для исследования динамических систем, в частности плоских механизмов со стержневыми элементами, в работах J. P. Sadler [1].

Здесь, как и в работе Т. G. Ritto и др. [2], рассмотрено движение горизонтальной буровой штанги длиной L под действием статической сжимающей нагрузки на левом конце бурового оборудования, переменной гармонической силы на бур, продольной реакции со стороны породы на бур, а также гравитационных сил и сил трения буровой колонны о породу (рисунок 1).

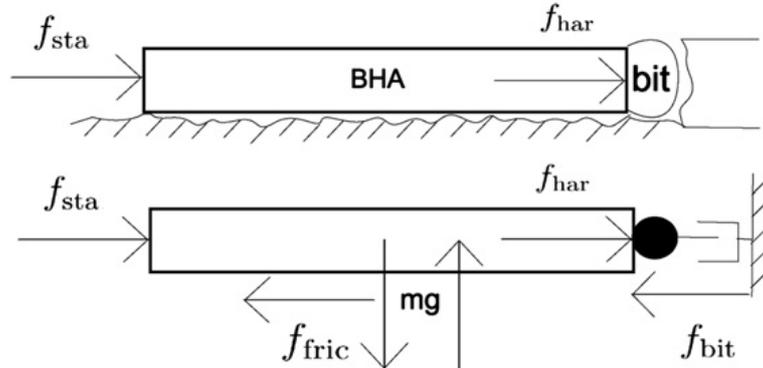


Рисунок 1 – Схема нагружения бурового оборудования

Исследуется ее динамическая модель, задаваемая уравнением вида [2]:

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f_{sta}(x,t) + f_{har}(x,t) + f_{bit}(\dot{u}(x,t)) + f_{fric}(\dot{u}(x,t)) + f_{mass}(\ddot{u}(x,t)), \quad (1)$$

где u – продольное перемещение буровой колонны, ρ – плотность, E – модуль упругости материала, A – площадь поперечного сечения колонны. Правая часть уравнения (1) содержит в себе действующие на буровое оборудование нагрузки. При этом концевые нагрузки представляются как:

$$f_{sta}(x,t) = F_{sta} \delta(x), \quad (2)$$

$\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, F_{sta} – амплитуда нагрузки,

$$f_{har}(x,t) = F_0 \sin(\omega_f t) \delta(x-L), \quad (3)$$

где F_0 и ω_f – амплитуда и частота гармонической нагрузки, соответственно.

Согласно схеме нагружения (рисунок 1), модель (1) представляется следующим уравнением с краевыми условиями:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{fric}(\dot{u}(x,t)), \quad (4)$$

$$x = 0: \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} = -F_{sta},$$

$$x = L: \quad EA \frac{\partial u}{\partial x} = f_{har}(x,t) + f_{mass}(\ddot{u}(x,t)) + f_{bit}(\dot{u}(x,t)),$$

где

$$f_{fric}(\dot{u}(x,t)) = -\mu(x)(\rho A)g \operatorname{sgn}(\dot{u}(x,t)),$$

$$f_{har}(x,t) = F_0 \sin(\omega_f t),$$

$$f_{mass}(\ddot{u}(x,t)) = -m_{bit} \ddot{u}(x,t), \quad (5)$$

$$f_{bit}(\dot{u}(x,t)) = \begin{cases} c_1 e^{-c_2 \dot{u}(x,t)} - c_1, & \text{при } \dot{u}(x,t) > 0 \\ 0, & \text{при } \dot{u}(x,t) \leq 0 \end{cases}.$$

Введем безразмерные переменные: $u = L\tilde{u}$, $x = L\tilde{x}$, $t = \frac{\tilde{t}}{c}$, $c = \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$, при этом знак « \sim » в

дальнейшем будет опущен.

После упрощений получено:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\mu(x)g}{Lc^2} \text{sgn}(\dot{u}(x,t)), \quad (6)$$

$$x = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F_{sta}}{EA}, \quad (7)$$

$$x = 1: \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\rho A)L}{m_{bit}} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F_0}{m_{bit}Lc^2} \sin\left(\frac{\omega_f}{c} t\right) + \frac{1}{m_{bit}Lc^2} f_{bit}(Lc\dot{u}(x,t)). \quad (8)$$

Модель движения горизонтальной буровой колонны (6) с краевыми условиями (7)-(8) носит нелинейный характер и моделируется здесь методом сосредоточенных параметров. Согласно методу сосредоточенных параметров буровая колонна представлена конечным числом N равноудаленных точечных масс, соединенных безмассовыми упругими элементами длиной $2l = L/(N-1)$, с параметрами E , A . Масса каждого элемента сосредоточена на нейтральной оси колонны в середине отрезка $2l$.

В работе проведен численный анализ буровой штанги, когда число разбиений N принималось равным 100. В дискретном представлении модель (6)-(8) примет вид:

На левом конце буровой колонны

$$x = 0: \quad u_1 - u_0 = -\frac{lF_{sta}}{EA}. \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{1}{3l^2} (2u_0 - 3u_1 + u_2) = -\frac{\mu g}{Lc^2} \text{sgn}(\dot{u}_1) \quad \text{при } j = 1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{1}{4l^2} (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) = -\frac{\mu g}{Lc^2} \text{sgn}(\dot{u}_j) \quad \text{при } j = \overline{2, N-2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 u_{N-1}}{\partial t^2} - \frac{1}{3l^2} (u_{N-2} - 3u_{N-1} + 2u_N) = -\frac{\mu g}{Lc^2} \text{sgn}(\dot{u}_N) \quad \text{при } j = N-1, \quad (12)$$

на правом конце буровой колонны $x = 1$:

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial t^2} + \frac{(\rho A)L}{m_{bit}} (u_N - u_{N-1}) = \frac{F_0}{m_{bit}Lc^2} \sin\left(\frac{\omega_f}{c} t\right) + \frac{1}{m_{bit}Lc^2} f_{bit}(Lc\dot{u}_N) \quad (13)$$

Начальные условия в узлах принимались нулевыми, то есть:

$$u_j|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (14)$$

Полученная система из 101 нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка решалась с помощью пакета символьной математики **Wolfram Mathematica (WM)**. Расчеты по анализу динамической модели (9)-(14) проводились, как и в работе [2], при следующих геометрических и физических параметрах горизонтальной буровой колонны, а также действующих на нее нагрузках: $E = 210$ ГПа; $\rho = 7850$ кг/м³; $g = 9,81$ м/с²; $D_i = 0,10$ м (внутренний диаметр); $D_o = 0,15$ м (внешний диаметр); $L/D_o = 400$; $m_{bit} = 20$ кг; $c_1 = 1,4 \cdot 10^3$ Н; $c_2 = 400$; $\mu = 0,1$; $\omega_f = 100 \cdot 2\pi/60$ рад/с; $t \in [0, 10]$ с; $\Delta t = 0,0001$ с; $f_{sta} = 5500$ Н; $F_0 = 550$ Н.

Авторами работы получены величины перемещений и ускорений буровой штанги в аппроксимирующих ее узлах на заданном временном интервале. Определены перемещения (рисунок 2) и скорость движения бура (рисунок 3), а также отношение мощности на входе бура к мощности на выходе бура (рисунок 4), являющееся показателем эффективности производимых буровых работ.

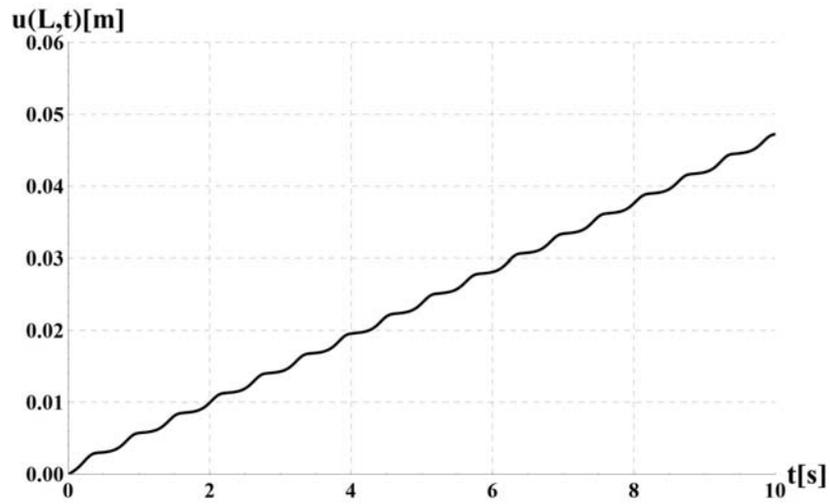


Рисунок 2 – Перемещение бура

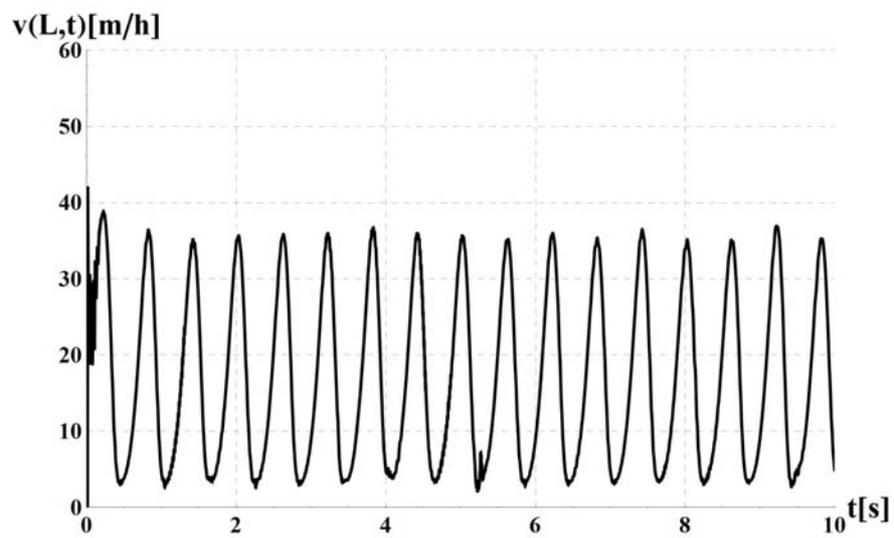


Рисунок 3 – Скорость движения бура

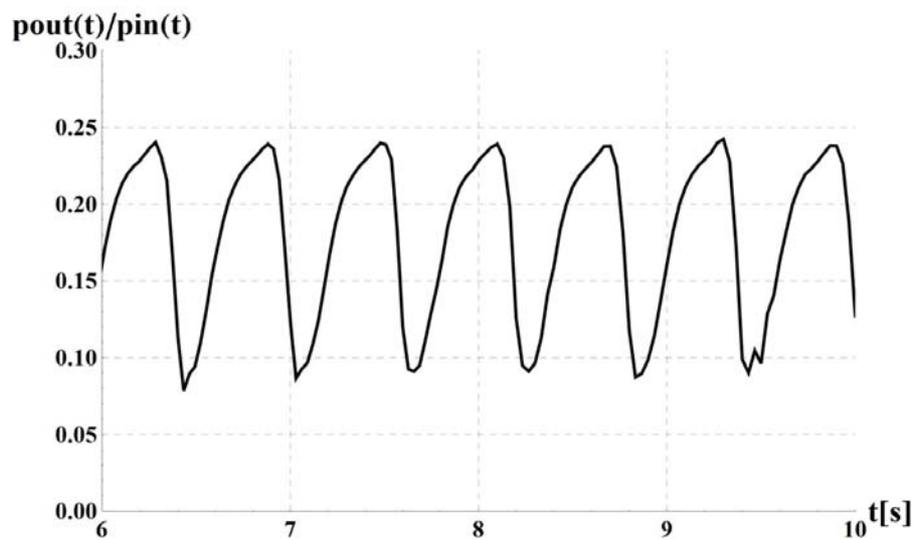


Рисунок 4 – Динамика отношения мощности на входе бура к мощности на его выходе

Рисунок 3 свидетельствует о наличии осциллирующего процесса в буровой колонне, стремящегося к «зануливанию» скорости движения бура. Результаты исследований, представленные на рисунке 4, свидетельствуют, что эффективность бурильного процесса близка к 25%. Причиной потерь энергии являются указанные в рассмотренной модели действующие на буровую штангу нагрузки в виде сил трения, реакции со стороны породы на бур и др.

Полученные в работе результаты качественно и количественно согласуются с результатами работы Ritto, где расчеты динамической модели проводились методом конечных элементов. Анализ результатов исследований свидетельствует об эффективности применения метода сосредоточенных параметров для решения нелинейных задач динамики стержневых элементов. Нелинейные модели движения конструкций с распределенными параметрами мало изучены и представляют практический интерес. Их решение в настоящее время является актуальным в области моделирования физических и технологических процессов в упругих средах, задачах машиностроения и др. областях техники.

Помимо отмеченного выше, метод сосредоточенных параметров эффективен при численном анализе динамики конструкций с переменными сложными сечениями, неоднородностью среды и локальными нагрузками. Эти осложняющие моделирование факторы устраняются путем разбиения исследуемого объекта в местах перепада форм сечения, свойств среды или мест действия локальных нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Sadler J.P. A lamped parameter approach to the kineto-elastodynamic analysis of mechanisms: Doctoral dissertation. – Rensselaer Polytechn. Institute, 1971.
- [2] Ritto T.G. Drill-string horizontal dynamics with uncertainty on the frictional force // Journal of Sound and Vibration. – 2013, 332. – P. 145-153.

REFERENCES

- [1] Sadler J.P. A lamped parameter approach to the kineto-elastodynamic analysis of mechanisms: Doctoral dissertation. Rensselaer Polytechn. Institute, 1971.
- [2] Ritto T.G. Drill-string horizontal dynamics with uncertainty on the frictional force. Journal of Sound and Vibration. 2013, 332. P.145-153.

ЖИНАҚТАЛҒАН ПАРАМЕТРЛЕР ӘДІСІ БОЙЫНША ГОРИЗОНТАЛЬДІ БҰРҒЫЛАУ ШТАНГІСІ ТЕРБЕЛІСІНІҢ АНАЛИЗІ

Л. А. Хаджиева, А. С. Сергалиев

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: динамика, сызықты емес модель, бұрғылау штангасы, үйкеліс күші, жинақталған параметрлер.

Аннотация. Жұмыста скважина қабырғаларының үйкеліс күші ескерілген горизонтальді бұрғылау саптарының динамикасы зерттелген. Т. G. Ritto және оның қосымша авторлары ұсынған саптың бойлық тербелістер моделі қарастырылған. Қарастырылған модель сызықсыз сипаттамалы және жинақталған параметрлер әдісі бойынша зерттелген. Әдістің нәтижесі бойынша бұрғылау сабы тең қашықтықтағы нүктелік массаның ақырғы санымен сипатталған, берілген жұмыста бөліну саны 100 тең. Бұрғылау қозғалысының жылдамдығы мен ауыспалылығы анықталды, сонымен қатар бұрғылау жұмысының өндірістік көрсеткіші болып табылатын бұрғылаудың бастапқы және ақырғы қуаттылықтарының қатынасы да есептелді. Алынған нәтижелер сапалы және Ritto-ның ақырғы элементтер әдісі бойынша жүргізілген динамикалық моделінің нәтижесімен сәйкес.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 69 – 72

OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATORS POSSESSING A COUNTABLE SET AND THE SINGLE-VALUED EIGENVALUE

A. A. Shaldanbaeva, A. Sh. Shaldanbaev, I. O. Orazov

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

Key words: border terms, operator, account, great number, task, equalization.**Abstract.** In this paper we obtained the boundary conditions of the Sturm-Liouville operators possessing a countable set and the single-valued eigenvalue.

УДК 517.9

ОПЕРАТОРЫ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ

А. А. Шалданбаева, А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

*(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)***Ключевые слова:** граничные условия, оператор, счет, множество, задача, уравнение.**Аннотация.** В настоящей работе получены граничные условия операторов Штурма-Лиувилля, обладающих счетным множеством, однократных собственных значений.

1. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ краевую задачу, порождаемую на интервале $(0,1)$, уравнением Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

и двумя ($i = 1,2$) линейно независимыми граничными условиями

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2), \quad (2)$$

где $a_{i,j}$ ($i = 1,2; j = 1,2,3,4$) – комплексные постоянные.

Значения параметра λ , при которых эта краевая задача имеет ненулевые решения, называются собственными значениями, а соответствующие решения – собственными функциями. Совокупность собственных значений: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ составляет спектр краевой задачи (1)–(2).

Собственному значению приписываются кратность k , если при этом значений параметра задачи (1)–(2) k -кратно разрешима [1, с. 193].

Фундаментальная система решений уравнения (1), определяемая начальными данными: $y_1(\lambda, 0) = y_2'(\lambda, 0) = 1; y_1'(\lambda, 0) = y_2(\lambda, 0) = 0$ имеет вид

$$y_1(\lambda, x) = \cos \sqrt{\lambda} x, \quad y_2(\lambda, x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}. \quad (3)$$

Так как общее решение $y(\lambda, x)$ уравнения (1) является линейной комбинацией функций $y_1(\lambda, x), y_2(\lambda, x)$; $y(\lambda, x) = A \times y_1(\lambda, x) + B y_2(\lambda, x)$, то

$$U_i[y] = A[a_{i1} + a_{i3}y_1(\lambda, 1) + a_{i4}y_1'(\lambda, 1) + B \times [a_{i2} + a_{i3}y_2(\lambda, 1) + a_{i4}y_2'(\lambda, 1)]] \quad (i = 1,2)$$

откуда следует, что краевая задача (1)–(2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} A[a_{11} + a_{13}y_1(\lambda, 1) + a_{14}y_1'(\lambda, 1)] + B[a_{12} + a_{13}y_2(\lambda, 1) + a_{14}y_2'(\lambda, 1)] = 0, \\ A[a_{21} + a_{23}y_1(\lambda, 1) + a_{24}y_1'(\lambda, 1)] + B[a_{22} + a_{23}y_2(\lambda, 1) + a_{24}y_2'(\lambda, 1)] = 0 \end{cases}$$

относительно коэффициентов A, B имеет нетривиальное решение. Поэтому собственные значения рассматриваемой задачи совпадают с квадратами корней его характеристического детерминанта

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{13}y_1(\lambda, 1) + a_{14}y_1'(\lambda, 1) & a_{12} + a_{13}y_2(\lambda, 1) + a_{14}y_2'(\lambda, 1) \\ a_{21} + a_{23}y_1(\lambda, 1) + a_{24}y_1'(\lambda, 1) & a_{22} + a_{23}y_2(\lambda, 1) + a_{24}y_2'(\lambda, 1) \end{vmatrix}$$

Раскрывая этот определитель и замечая, что вронскиан $W[y_1, y_2] = y_1(\lambda, x) \times y_2'(\lambda, x) - y_1'(\lambda, x) \times y_2(\lambda, x)$ тождественно равен единице, находим

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{12} + \Delta_{34} + \Delta_{13} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + (\Delta_{14} + \Delta_{32}) \cos \sqrt{\lambda} - \Delta_{42} \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} = 0, \quad (4)$$

где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j} \times a_{2i}$ – минор, составленный из i - и j -го столбцов матрицы A , составленной из коэффициентов граничных условий

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

Кратность собственного значения λ_0 меньше или равна кратности λ_0 как корня функций $\Delta(\lambda)$. $\Delta(\lambda)$ представляет собой целую функцию от λ . Эти две кратности не обязаны совпадать, например, $\lambda = 0$ есть простое собственное значение задачи [1, с. 193]

$$-y''(x) = \lambda y(x); y(0) - y(1) + \frac{1}{2}y'(1) = 0, y'(0),$$

но оно является двукратным корнем соответствующего детерминанта

$$\Delta(\lambda) = 1 - chk + \frac{k}{2}shk, (k^2 = \lambda).$$

ПРИМЕР. Для задачи о собственных значениях

$$y'' + \lambda y = 0; y(a) = y(b), y'(a) = y'(b)$$

следует положить

$$\varphi(x) = \begin{cases} \cos kx \\ 1, \\ chkx \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sin kx & \text{при } \lambda = k^2 > 0 \\ x & \text{при } \lambda = 0, \\ \frac{1}{k} shkx & \text{при } \lambda = -k^2 < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta(\lambda) = \begin{cases} 2 - 2\cos k(b-a) \\ 0 \\ 2 - 2ch k(b-a) \end{cases}$$

т.е. собственные значения образуют последовательность

$$\lambda_m = \left(\frac{2\pi m}{b-a}\right)^2, m = 0, 1, 2, \dots$$

причем все λ_m при $m \neq 0$ двукратны [1, с. 194].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Предположим, что характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ имеет счетное множество кратных корней, то какой вид принимают граничные условия такой краевой задачи. Например, известно, что если краевая задача (1)–(2) имеет не менее двух двукратных собственных значений, то она принимает вид

$$y(0) + ky(1) = 0, y'(0) + ky'(1) = 0, (k^2 = 1).$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Если $a \times d \neq 0$, то уравнение

$$\Delta(\lambda) = a + \left(\frac{b}{\sqrt{\lambda}} + d\sqrt{\lambda}\right) \sin \sqrt{\lambda} + c \times \cos \sqrt{\lambda} = 0 \quad (6)$$

может иметь не более четырех кратных нулей, отличных от нуля;

б) Если $a = 0, d \neq 0$, то уравнение (6) может иметь не более двух кратных нулей, отличных от нуля.

в) Если $d = 0, b \neq 0$, то уравнения (6) может иметь не более двух кратных нулей.

СЛЕДСТВИЕ 1.

Если $d = 0, b \neq 0, c^2(a^2 - c^2) = 0$, то уравнение (6) может иметь не более одного кратного нуля.

СЛЕДСТВИЕ 2.

Если $d = 0, 2bc(a^2 - c^2) - 2b^2c^2 + a^2b^2 = 0, b^2(a^2 - c^2) - b^4 - 2b^3c \neq 0$, то уравнение (6) не имеет кратных нулей, например, при $(c = 0, a = 0, b \neq 0)$.

ЛЕММА 2. Если $c \neq 0$ и функция

$$\Delta(\lambda) = a + \frac{b}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} + c \times \cos \sqrt{\lambda}$$

имеет более двух кратных нулей, то $b = 0, a^2 = c^2$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ краевой задачи (1)–(2) имеет счетное множество кратных нулей, то краевые условия (2) не усиленно регулярны [2, с. 71].

ТЕОРЕМА 2. Если характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ краевой задачи (1)–(2) имеет счетное количество кратных нулей, то оператор Штурма-Лиувилля соответствующий этой краевой задаче принимает один из следующих видов

$$L_1(k)y = -y''(x), x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0, & k \in \bar{\mathbb{C}}, k \neq -1; \\ y(0) + ky(1) = 0 \end{cases}$$

$$L_3(k)y = -y''(x), \quad x \in (0,1)$$

$$\begin{cases} k \times y'(0) - y'(1) = 0, & k \in \bar{\mathbb{C}}, k \neq -1 \\ y(0) - y(1) = 0 \end{cases}$$

или им сопряженных, где k принадлежит к расширенной комплексной плоскости

ТЕОРЕМА 3. Если операторы A и B определены формулами

$$Ay = iy'(x), y(0) + ky(1) = 0, \quad k \in \bar{\mathbb{C}}, k \neq -1$$

$$Bz = iz'(x), z(0) + z(1) = 0,$$

то имеет место формулы

$$1) L_1(k) = BA, \quad k \in \bar{\mathbb{C}}, k \neq -1$$

$$2) L_2\left(\frac{1}{k}\right) = AB,$$

где $L_1(k)y = -y''(x), x \in (0,1)$

$$\begin{cases} y'(0) + y'(1) = 0, & k \in \bar{\mathbb{C}}, k \neq -1 \\ y(0) + ky(1) = 0 \end{cases}$$

$$L_2(k)y = -y''(x), \quad x \in (0,1);$$

$$\begin{cases} ky'(0) + y'(1) = 0, & k \in \bar{\mathbb{C}}, k \neq -1 \\ y(0) + y(1) = 0 \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4. Если операторы C и D определены формулами

$$Cy = i y'(x), ky(0) - y(1) = 0, k \in \bar{C}, k \neq -1$$

$$Dz = i z'(x), z(0) - z(1) = 0,$$

то имеет место формулы

$$3) L_3(k) = C \times D;$$

$$4) L_4(k) = D \times C,$$

где

$$\begin{cases} L_3(k)y = -y''(x), x \in (0,1) \\ ky'(0) - y'(1) = 0, \\ y(0) - y(1) = 0; \end{cases} \quad k \in \bar{C}, k \neq -1$$
$$\begin{cases} L_4(k)y = -y''(x), x \in (0,1) \\ y'(0) - y'(1) = 0, \\ y(0) - ky(1) = 0 \end{cases} \quad k \in \bar{C}, k \neq -1$$

ТЕОРЕМА 5. Если $k^2 \neq 1$, то имеет место формулы

$$а) L_1(k) = P^{-1}(k)L_1(0)P(k), P(k)y(x) = y(x) + ky(1-x);$$

$$б) L_3(k) = Q^{-1}(k)L_3(\infty)Q(k), Q(k)y(x) = ky(x) + y(1-x).$$

ТЕОРЕМА 6. Имеет место уравнение Лакса

$$\dot{L}_1(k) = L_1(k)(kI + S)^{-1} - (kI + S)^{-1}L_1(k),$$

где (\circ) – означает дифференцирование по параметру k .

Следует отметить, что тема настоящей работы мало исследовано [2, с. 9].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
- [2] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

REFERENCES

- [1] Kamke E. Spravochnik po differencial'nyum uravneniyam. M.: Nauka, 1971. 576 p. (in Russ.).
- [2] Naimark M.A. Lineinye differencial'nye operatory. M.: Nauka, 1969. 528 p. (in Russ.).

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЛАРЫНЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ

А. А. Шалданбаева, А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер: шекаралық шарт, оператор, есепшот, көпшілік, мақсат, уравнение.

Аннотация. Бұл еңбекте бір еселі меншікті мәндері шексіз көп, Штурм-Лиувилл операторларының шекаралық шарттары алынды.

Поступила 01.10.2014 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 5, Number 297 (2014), 73 – 76

SPECTRAL RESOLUTION OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH THE VOLTERRA PROPERTY

A. A. Shaldanbaev, A. Sh. Shaldanbaev, I. O. Orazov

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

Key words: spectrum, decomposition, task, space, number.**Abstract.** In this paper we obtained a spectral resolution of the Sturm-Liouville operator with the Volterra property in the Krein space.

УДК 517.9

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ВОЛЬТЕРРОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А. А. Шалданбаев, А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

Ключевые слова: спектр, разложение, задача, пространство, число.**Аннотация.** В данной работе получено спектральное разложение вольтеррова оператора Штурма-Лиувилля в пространстве Крейна.Рассмотрим в пространстве $H = L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x); \quad x \in (0,1) \quad (1)$$

$$U_i[y] = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2)$$

с двумя ($i = 1,2$) линейно независимыми граничными условиями (2), где a_{ij} ($i = 1,2; j = 1,2,3,4$) – произвольные комплексные числа, λ – спектральный параметр. Линейная независимость граничных условий ($i = 1,2$) имеет место тогда и только тогда, когда хотя бы один из миноров

$$\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i} \quad (i, j = 1,2,3,4) \quad (3)$$

граничной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

отличен от нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор Штурма-Лиувилля (1)–(2) называется вольтерровой, если он не имеет собственных значений на всей конечной части комплексной z плоскости S .

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Получить «спектральное» разложение вольтеррова оператора Штурма-Лиувилля в пространстве с индефинитной метрикой, порожденной скалярным произведением $[u, v] = (Su, v)$, где $Su(x) = u(1-x)$, $(, , \cdot)$ – скалярное произведение пространства H .

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Если оператор Штурма-Лиувилля (1)-(2) вольтерров, то он подобен оператору Коши

$$\begin{aligned} Cz &= -z'(x), \quad x \in (0,1) \quad (4) \\ z(0) &= 0, \quad z'(0) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где оператор подобия имеет вид

$$z(x) = Ty(x) = (I - kS)y(x), \quad k^2 \neq 1 \quad (6)$$

$$Sy(x) = y(1-x), \quad (7)$$

I – тождественный оператор, т.е.

$$L = T^{-1}CT \quad (8)$$

ЛЕММА 2. Оператор SC является самосопряженным оператором в пространстве H . Обратный оператор $(SC)^{-1}$ является самосопряженным и вполне непрерывным оператором а пространстве $L^2(0,1)$, поэтому имеет место спектральное разложение

$$(SC)^{-1}f = C^{-1}Sf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n; \quad (9)$$

$$SCg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, \varphi_n) \times \varphi_n, \quad (10)$$

где $SC\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, n = 1, 2, \dots; (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$.

Эта лемма играет в дальнейшем существенную роль и является следствием теоремы Гилберта-Шмидта [1, с. 231].

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если $k^2 \neq 1$, то оператор Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} Ly &= -y''(x); \quad x \in (0,1) \quad (1) \\ y(0) &= ky(1), \quad y'(0) = -ky'(1) \end{aligned} \quad (2)$$

вольтерров и для него имеет место спектральные разложения

$$\begin{aligned} L^{-1}f &= \sum_{n=1}^{\infty} (f, ST^*\varphi_n) T^{-1} \varphi_n, \\ Lg &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, T^*\varphi_n) ST^{-1} \varphi_n, \end{aligned}$$

где $\{\varphi_n\}$ – ортонормированные собственные векторы оператора SC , соответствующие собственным значениям λ_n , т.е. $SC\varphi_n = \lambda_n \varphi_n, (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$; C – оператор Коши, оператор S определен формулой (7), $T = I - KS$ – оператор подобия, f и g произвольные элементы пространства H .

Системы $\{ST^*\varphi_n\}$ и $\{ST^{-1}\varphi_n\}$ образуют биортогональную пару в пространстве Крейна [2] со скалярным произведением

$$[u, v] = (Su, v),$$

где $(., .)$ – скалярное произведение пространства H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы (1) имеет место формула (8) $L = T^{-1}CT$, где $I - kS$, C – оператор Коши. Несложно заметить, что операторы S и T коммутируют. В самом деле

$$ST = S - kS^2 = S - kI; TS = (I - kS)S = S - kS^2 = S - kI.$$

т.е. $ST = TS, \Rightarrow T^{-1}S = ST^{-1}$, где T^{-1} оператор обратный к оператору T , оно существует при $k^2 \neq 1$. Действуя оператором S , слева на формулу

$$L = T^{-1}CT,$$

имеем

$$SL = ST^{-1}CT = T^{-1}SCT.$$

В силу леммы (2) оператор SC самосопряжен и его собственные функции $\{\varphi_n\}$ полны и ортогональны в пространстве H , т.е. имеют место формулы

$$SC\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm},$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \times \varphi_n.$$

$$SCf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, \varphi_n) \varphi_n; \rightarrow$$

Заменив в этой формуле f на Tg имеем

$$SCTg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (Tg, \varphi_n) \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, T^* \varphi_n) \varphi_n, \rightarrow$$

$$SLg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, T^* \varphi_n) T^{-1} \varphi_n, \rightarrow$$

$$Lg = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, T^* \varphi_n) ST^{-1} \varphi_n.$$

Далее, из формулы $SL = T^{-1}SCT$, имеем $(SL)^{-1} = T^{-1}(SC)^{-1}T$.

В силу той же леммы (2) имеем

$$(SC)^{-1}g = L^{-1}Sg = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n.$$

Заменив в этой формуле g на Tf , имеем

$$(SC)^{-1}Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Tf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, T^* \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n;$$

следовательно

$$(SL)^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, T^* \varphi_n)}{\lambda_n} T^{-1} \varphi_n.$$

Преобразуем левую часть этой формулы

$$L^{-1}Sf = \sum_{n=1}^{\infty} (f, T^* \varphi_n) T^{-1} \varphi_n.$$

Заменив f на Sf , получим

$$L^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} (Sf, T^* \varphi_n) T^{-1} \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (f, ST^* \varphi_n) T^{-1} \varphi_n.$$

Пусть $[u, v] = (Su, v)$, тогда

$$[T^* \varphi_n, ST^{-1} \varphi_m] = (ST^* \varphi_n, ST^{-1} \varphi_m) = (T^* \varphi_n, T^{-1} \varphi_m) = (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm};$$

$$[ST^* \varphi_n, T^{-1} \varphi_m] = (T^* \varphi_n, T^{-1} \varphi_m) = (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
- [2] Пятков С.Г., Егоров И.Е., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.

REFERENCES

- [1] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza. M.: Nauka, 1976. 544 p. (in Russ.).
- [2] Pyatovskii S.G., Egorov I.E., Popov S.V. Neklassicheskie differentsial'no-operatornye uravneniya. Novosibirsk: Nauka, 2000. 336 p. (in Russ.).

ВӨЛТЕРЛІ ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ КРЕЙН КЕҢІСТІГІНДЕГІ СПЕКТРӘЛДІ ТАРАЛЫМЫ

А. А. Шалданбаев, А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер: спектр, кеңістік, таралым, есеп, сан.

Аннотация. Бұл еңбекте вөлтерлі Штурм-Лиувилл операторының Крейн кеңістігіндегі спектрәлді таралымы алынды.

Поступила 01.10.2014 г.

МАЗМҰНЫ

Теориялық және тәжірибелік зерттеулер

<i>Боос Э. Г., Темірәшев Т., Избасаров М., Самойлов В.В., Федосимова А.И.</i> 22.4 ГэВ/с импульсте $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^-X^0$ реакциясындағы серпімсіздіктің үлестік коэффициенттерінің корреляциясын және олардың серпімсіздіктің толық коэффициентіне байланысын зерттеу.....	3
<i>Алдашев С.А.</i> Көп өлшемді азғындалған гипербола-параболалық теңдеуге Дирихле есебінің корректілігі.....	7
<i>Байгісова Қ.</i> Кубтық кристалдардағы вакансиялардың миграция энергиясын есептеу әдістері.....	12
<i>Байгісова Қ.Б.</i> ҚЦК металдардағы вакансиялардың миграция энергиясын есептеу әдістері.....	16
<i>Батура Т.В., Мурзин Ф.А., Сперанский Д.О., Байжанов Б.С., Немченко М.В.</i> Берілген тақырыпқа байланысты мәтіннің релевантын анықтау үлгілері, мәтінмен және реферат оқу міндетімен ассоциацияланған графтар.....	25
<i>Бияшев Р.Г., Қалимолдаев М.Н., Рог О.А.</i> Болмыстарды полиморфты типтендіру және көпкритериалды қолжетімділікті шектеу механизмін құрастыру есебі.....	33
<i>Мынбаев К.Т., Аипенова А.С.</i> Дифференциалдық шарттарды тестілеу және тығыздықтың жергілікті нормалі.....	42
<i>Поспелова В., Литвиненко Г.</i> Көп ағындылық тәртібіндегі (режиміндегі) көлемді мағлұматтарды толық байланыс әдісі бойынша кластеризациялау.....	49
<i>Сарсенгельдин М.М.</i> Бір фазалы Стефан есебінің жылу полиномдары арқылы аналитикалық шешімі.....	54
<i>Хаджиева Л.А., Абдрахман С.Н., Рахимжанова А.Ж.</i> Бартенева-Хазанович потенциалы негізіндегі резеңкелі-кордтық біліктің айнымалы тербелістер моделі.....	60
<i>Хаджиева Л.А., Серғалиев А.С.</i> Жинақталған параметрлер әдісі бойынша горизонтальді бұрғылау штангісі тербелісінің анализі.....	64
<i>Шалданбаева А.А., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О.</i> Штурм-Лиувилл операторларының шекаралық шарттары.....	69
<i>Шалданбаев А.А., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О.</i> Вөлтерлі Штурм-Лиувилл операторының Крейн кеністігіндегі спектрәлді таралымы.....	73

СОДЕРЖАНИЕ

Теоретические и экспериментальные исследования

Боос Э.Г., Темиральев Т., Избасаров М., Самойлов В.В., Федосимова А.И. Исследование корреляций парциальных коэффициентов неупругости и их зависимости от полного коэффициента неупругости в реакции $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^-X^0$ при 22.4 ГэВ/с.....	3
Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле для вырождающегося многомерного гипербола-параболического уравнения.....	7
Байгисова К.Б. Метод вычисления энергии миграции вакансий в кубических кристаллах.....	12
Байгисова К.Б. Методы расчета энергии миграции вакансий в ГЦК металлах.....	16
Батура Т.В., Мурзин Ф.А., Сперанский Д.О., Байжанов Б.С., Немченко М.В. Модели определения релевантности текста заданной теме, графы ассоциированные с текстами и задача реферирования.....	25
Бияшев Р.Г., Калимолдаев М.Н., Рог О.А. Полиморфная типизация сущностей и задача конструирования механизма многокритериального разграничения доступа.....	33
Мынбаев Қ.Т., Аипенова А.С. Тестирование дифференциальных условий и локальная нормальность плотности.....	42
Поспелова В., Литвиненко Г. Применение параллельных алгоритмов для решения задач кластеризации для больших объемов данных по методу полной связи с использованием графических процессоров.....	49
Сарсенгельдин М.М. Аналитическое решение однофазной задачи Стефана методом тепловых полиномов.....	54
Хаджиева Л.А., Абдрахман С.Н., Рахимжанова А.Ж. Модель крутильных колебаний резинокордного вала на основе потенциала Бартенева-Хазановича.....	60
Хаджиева Л.А., Сергалиев А.С. Анализ колебаний горизонтальной буровой штанги методом сосредоточенных параметров.....	64
Шалданбаева А.А., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О. Операторы Штурма-Лиувилля с кратным спектром.....	69
Шалданбаев А.А., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О. Спектральные разложения одного класса вольтерровых операторов Штурма-Лиувилля.....	73

CONTENTS

Theoretical and experimental researches

<i>Boos E.G., Temiraliev T., Izbasarov M., Samoilov V.V., Fedosimova A.I.</i> Investigation of partial unelasticity coefficient correlations and their dependence of total unelasticity coefficient in the reaction $\tilde{p}p \rightarrow \tilde{p}p\pi^+\pi^- X^0$ at 22,4 GeV/c.....	3
<i>Aldashev S.A.</i> The well-posedness of the Dirichlet problem for degenerate multi-dimensional hyperbolic-parabolic equation.....	7
<i>Baigisova K.</i> The method of calculation of the migration energy of vacancies in cubic crystals.....	12
<i>Baigisova K.</i> Calculation methods of vacancy migration energy in FCC metals.....	16
<i>Batura T.V., Murzin F.A., Speransky D.O., Baizhanov B.S., Nemchenko M.V.</i> Models of determination of relevance of the text to the given theme, graphs associated with texts and a problem of summarizing.....	25
<i>Bijashev R.G., Kalimoldaev M.N., Rog O.A.</i> Polymorphic typing of entities and a task of constructing multi-criteria access control mechanism.....	33
<i>Mynbaev K.T., Aipenova A.S.</i> Testing a differential condition and local normality of densities.....	42
<i>Pospelova V., Litvinenko G.</i> Application of a parallel algorithm for solving the clustering problem for big data by complete linkage clustering with Using the GPU.....	49
<i>Sarsengeldin M.M.</i> Analytical solution of one phase Stefan problem by heat polynomials.....	54
<i>Khajiyeva L., Abdrakhman S., Rakhimzhanova A.</i> Model of torsional vibrations of the rubber-shaft on the basis of Bartenev-Hazanovich potential.....	60
<i>Khajiyeva L., Sergaliyev A.</i> The analysis of fluctuations of the horizontal drill-string model by the lumped parameters method.....	64
<i>Shaldanbaeva A.A., Shaldanbaev A.Sh., Orazov I.O.</i> Of the Sturm-Liouville operators possessing a countable set and the single-valued eigenvalue.....	69
<i>Shaldanbaev A.A., Shaldanbaev A.Sh., Orazov I.O.</i> Spectral resolution of the Sturm-Liouville operator with the Volterra property.....	73

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

[www:nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

Редактор *М. С. Ахметова*
Верстка на компьютере *Д. Н. Калкабековой*

Подписано в печать 13.10.2014.
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.
4,5 п.л. Тираж 300. Заказ 5.